

Gravitation et cosmologie

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, mars 2008)

Table des matières

1	Avertissement	2
2	Résumé	3
3	L'expansion de l'Univers et le Big Bang	3
4	Modèle 1 (modèle explosif non relativiste)	9
5	De Newton à Friedmann	13
6	Modèle 2 (modèle de De Sitter)	18
7	Modèle 3 (modèle de Friedmann)	21
8	Discussion du modèle de Friedmann	26
9	Réflexion sur les repères comobiles	28
10	La pression dans le modèle de Friedmann	30
11	Pression de radiation et expansion de l'Univers	31
12	Conservation de l'énergie dans modèle de Friedmann	33
13	L'horizon dans le modèle de Friedmann	35
14	Modèle 4 (modèle de De Sitter homogénéisé)	36
15	Projection dans un espace euclidien	40
16	L'horizon dans le modèle de De Sitter homogénéisé	44
17	Redshift usuel, redshift homogénéisé et redshift de Friedmann	47
18	L'énergie sombre existe-t-elle ?	49
19	Et si on sortait du cadre ?	54

20 L'âge de l'Univers	55
------------------------------	-----------

21 Le paradoxe d'Olbers dans le modèle 4	55
---	-----------

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

- 01) **Gravitation relativiste : introduction**
 - Relativité restreinte :
- 02) **Les vitesses en Relativité restreinte**
 - Physique quantique :
- 03) **Physique quantique : généralités**
- 04) **Physique quantique : l'aventure collective**
 - Gravitation :
- 05) **La relativité générale a-t-elle été prise en défaut ?**
- 06) **Gravitation relativiste : principes fondamentaux**
- 07) **Gravitation et critère de Schild**
- 08) **L'hypothèse du champ d'entraînement**
- 09) **Métriques et géodésiques**
- 10) **Tenseur de Ricci**
- 11) **Potentiel gravitationnel**
- 12) **Ni ou Schwarzschild ?**
- 13) **Gravitation et vide quantique**
- 14) **L'hypothèse du flux à double sens**

- 15) Etude du système solaire en métrique de Ni
- 16) Etude des systèmes binaires en métrique de Ni
- 17) Sur la matière noire
- 18) Trous noirs et trous gris
- 19) Ondes gravitationnelles
- 20) Gravitation et cosmologie

2 Résumé

Il n'est pas question ici de résoudre les problèmes posés par le Big Bang et l'expansion de l'Univers, mais seulement de rappeler ces problèmes, tout en soulignant certaines incohérences des théories dominantes, et de suggérer l'utilisation des rapidités plutôt que des vitesses dans l'élaboration des modèles.

3 L'expansion de l'Univers et le Big Bang

Nous savons peu de choses sur la cosmologie ; il existe de nombreux modèles décrivant l'évolution supposée de l'Univers, et les problèmes posés dépassent de beaucoup le cadre de la présente étude. Cependant, certaines idées soulevées dans les documents précédents peuvent orienter la réflexion. Abordons donc (prudemment) ce sujet.

Après avoir publié l'équation de la relativité générale, en 1915, Einstein a tenté de l'utiliser pour décrire la structure globale de l'Univers, supposé homogène et isotrope. Comme il croyait que l'Univers était statique (l'expansion de l'Univers n'ayant pas encore été découverte), il avait cru bon d'introduire sa fameuse constante cosmologique pour garantir cette stabilité : à l'origine, la constante cosmologique est destinée à annuler l'effet de la gravitation à grande échelle, et à empêcher l'Univers de s'effondrer sur lui-même. En 1917, il propose un modèle hypersphérique statique. Dans ce modèle, c'est l'espace à 3 dimensions qui est décrit comme une hypersphère (plongée dans un espace euclidien fictif à 4 dimensions). La courbure est supposée induite par la gravité de la matière présente dans l'Univers, mais sans argumentation convaincante. Le temps n'est pas concerné par la courbure : c'est une préfiguration du "temps cosmique".

De Sitter présente un autre modèle d'Univers, mais dans lequel c'est l'espace-temps à 4 dimensions qui est hypersphérique (cette hypersphère à 4 dimensions

pouvant être plongée dans un espace fictif à 5 dimensions). Il pousse donc plus loin qu'Einstein la symétrie de son modèle : c'est l'espace-temps qui est courbe, et pas seulement l'espace. Le temps cosmique n'intervient plus. Pour De Sitter, si l'Univers est courbe, la densité de matière ne suffit pas à l'expliquer.

Dès 1922, le russe Friedmann tente de formaliser, mathématiquement, la dynamique de l'Univers, en se basant sur la relativité générale. Il jette les bases de ce qu'on appellera plus tard le modèle standard homogène, qui a longtemps fait référence en tant que modèle cosmologique. Contrairement à Einstein, il intègre la notion d'expansion/contraction dans ses équations, avant même que l'expansion de l'Univers ne soit découverte par Hubble. Il décrit d'abord un Univers cyclique, avec une alternance de phases d'expansion et de contraction, ponctuée par des "big bang" / "big crunch". Mais, à cette époque, ses travaux restent méconnus en Europe occidentale et aux Etats-Unis. De même que Dirac est considéré comme l'inventeur de l'antimatière (il l'a théorisée, à sa manière, avant sa découverte effective), Friedmann peut être considéré comme l'inventeur de l'expansion de l'Univers, qu'il a mise en équations, à sa façon, avant sa mise en évidence par Hubble.

Georges Lemaître propose sa théorie de l'atome primitif en 1927 : l'Univers actuel résulterait, selon lui, de l'explosion d'un objet très massif et très compact.

La découverte de la fuite des galaxies, par Hubble, intervient justement à la même époque (en 1929). Einstein comprend alors que l'invention de la constante cosmologique n'était pas utile : "C'est la plus grande erreur de ma vie", dira-t-il. Effectivement, il avait inventé cette constante dans le but d'obtenir un Univers statique ; mais cette "rustine" ne pouvait en aucun cas conduire à un Univers statique ! C'était d'ailleurs presque évident, mais c'est Eddington qui l'a prouvé de manière rigoureuse. Paradoxalement, cette constante cosmologique, qui semblait enterrée, va renaître de ses cendres...

Selon la loi de Hubble, la vitesse de fuite des galaxies est proportionnelle à leur distance (le coefficient de proportionnalité étant noté H). De là à admettre que, dans un passé lointain, l'Univers entier a été concentré dans un volume très petit, il n'y a qu'un pas !

Ceci conforte les idées de Georges Lemaître, et sa théorie de l'atome primitif. Nouvelle publication en 1931.

La synthèse entre les idées de De Sitter et celles d'Einstein (l'Univers d'Einstein-De Sitter) date de 1932. Dans ce modèle, seule la gravitation peut freiner, ou même inverser, l'expansion, dont le moteur est la constante cosmologique. Ce modèle s'insère naturellement dans le cadre fixé par Friedmann.

Les idées de Friedmann sont reprises par Robertson et Walker (1935). Ils forgent un cadre mathématique rigoureux à l'intérieur duquel vont pouvoir s'in-

sérer les modèles les plus variés.

Ce cadre mathématique ne suffit pas. Les modèles vont se baser, en outre, sur des postulats, qui ont été posés d'une part par Friedmann, d'autre part par Einstein.

Premier postulat : l'Univers doit être globalement identique, quel que soit l'observateur choisi, et ceci dans toutes les directions; il doit donc être homogène et isotrope.

Second postulat : il doit exister un "temps cosmique", qui est le temps propre commun à tous les observateurs "comobiles", autrement dit, en utilisant notre vocabulaire, à tous les observateurs "gravitationnellement immobiles".

Troisième postulat : l'expansion est définie par un facteur d'échelle $a(t)$, qui ne dépend que du temps (cosmique), et qui est identique en tout lieu, à un instant (cosmique) donné.

Si on note l la distance séparant deux points comobiles à l'instant t , et l_0 leur distance à l'instant t_0 (choisi arbitrairement), on a : $\frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{l}{l_0}$, et, par conséquent :

$$l = \frac{l_0}{a(t_0)} \cdot a(t).$$

La vitesse de récession (vitesse de fuite de l'un des mobiles, vu par l'autre) est :

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{l_0}{a(t_0)} \cdot \dot{a}(t).$$

Nous avons noté $\dot{a}(t)$ la dérivée du facteur d'échelle par rapport au temps.

Comme $\frac{l_0}{a(t_0)} = \frac{l}{a(t)}$, on peut écrire :

$$v = \frac{l}{a(t)} \cdot \dot{a}(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \cdot l.$$

En notant $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, on obtient la loi de Hubble :

$$v = H(t) \cdot l.$$

Le coefficient de Hubble peut donc varier avec le temps, mais ses variations sont identiques en tout lieu, d'après le troisième postulat.

Dans ce cadre, l'Univers admet la métrique suivante ("métrique de Friedmann-Robertson-Walker"), exprimée ici en coordonnées polaires :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - a^2(t) \cdot \left(\frac{dr^2}{1 - k \cdot r^2} + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot d\phi^2 \right).$$

Dans cette équation, t représente le temps cosmique ; k est le facteur de courbure, égal à -1 pour un espace hyperbolique, 0 pour un espace plat et $+1$ pour un espace sphérique. La fonction $a(t)$ est le facteur d'échelle. Si cette fonction est constante, l'Univers est statique ; si elle est croissante, il est en expansion ; si elle est décroissante, il est en contraction.

Un rapprochement a été opéré, par Friedmann et Lemaître, entre ce formalisme et la théorie de l'atome primitif. Ce rapprochement est très facile : il suffit de choisir une fonction $a(t)$ qui s'annule pour $t = 0$ (origine du temps, ou instant du Big Bang, selon l'expression inventée plus tard par Fred Hoyle).

Quels sont les facteurs qui règlent les variations du coefficient H (ou du facteur d'échelle $a(t)$) avec le temps ? Selon Friedmann (et Einstein), c'est l'attraction gravitationnelle entre les astres qui va freiner l'expansion. Connaissant le taux d'expansion (donc le coefficient H) et la densité de l'Univers (supposée identique en tout point, à un instant donné), ainsi que sa pression, la relativité générale permet de calculer l'évolution de l'Univers. Elle permet, en particulier, de déterminer une densité critique : si la densité effective de l'Univers est supérieure à cette limite, la fonction $a(t)$, d'abord croissante, va passer par un maximum, puis va décroître jusqu'au "Big Crunch". Mais, bien entendu, la relativité générale n'explique pas pourquoi il y a eu (ou pas) un Big Bang, ni pourquoi l'Univers est actuellement en expansion.

Dans la seconde moitié du vingtième siècle, l'un des objectifs prioritaires des astronomes a été de déterminer le plus précisément possible la densité moyenne de l'Univers, pour savoir si elle est supérieure, inférieure ou égale à la densité critique calculée.

Selon ce modèle standard, les galaxies sont immobiles (on pourrait dire : gravitationnellement immobiles - tiens, la relativité générale, elle aussi, admet cette notion...), et c'est l'espace qui se dilate ; l'expansion de l'Univers résulte soit d'un épisode cataclysmique (Big Bang), soit d'une dilatation continue de l'espace (on pourrait dire, en utilisant notre vocabulaire, une création continue d'espace). La vitesse de récession des galaxies n'est pas considérée comme une vraie vitesse : la vitesse locale de chaque galaxie est supposée nulle ; il en résulte que cette vitesse de récession peut très bien dépasser la vitesse de la lumière, sans qu'il y ait violation de la relativité restreinte. Cette expansion n'est pas expliquée (en tant que phénomène physique), mais son évolution est calculée, en fonction de la densité de matière (supposée identique en tout point) ; car la gravité doit en principe freiner l'expansion. Si on passe le film à l'envers, on voit l'Univers se contracter de plus en plus vite, car la densité est de plus en plus élevée, donc l'attraction entre les galaxies (ou les particules) est de plus en plus forte. Apparemment, aucune force connue ne peut arrêter cette chute : on va droit vers le Big Bang, ou en tout cas vers une phase hyperdense de l'Univers, avec un taux d'expansion maximal. En reprenant le film à l'endroit, on voit le taux d'expansion, très élevé à l'origine, diminuer de manière continue. Si la

densité de matière est suffisante, l'expansion finira par s'arrêter, et l'Univers commencera alors à se contracter, jusqu'au Big Crunch. Si elle est insuffisante, l'expansion sera infinie.

Cette théorie du Big Bang a remporté des succès retentissants. L'un des plus connus est la découverte du fond diffus cosmologique à $2,7\text{ K}$, ou rayonnement fossile (datant de l'époque où les particules se sont combinées en atomes, en 380 000 après le Big Bang, selon la théorie). L'existence de ce rayonnement avait été prédite en 1948 par Georges Gamow. Sa découverte fortuite par Penzias et Wilson, en 1964, a fortement marqué les esprits, à juste titre...

Le second grand succès de la théorie du Big Bang est l'explication de la nucléosynthèse primordiale : l'abondance actuelle des différents éléments chimiques (hydrogène, hélium, lithium, etc.) doit pouvoir s'expliquer d'une part par la synthèse de noyaux atomiques dans l'Univers primordial, peu après le Big Bang, d'autre part par la nucléosynthèse qui s'est déroulée (et se poursuit encore aujourd'hui) au cœur des étoiles. Ce sujet difficile est toujours débattu, mais les prédictions basées sur le Big Bang semblent globalement satisfaisantes.

En réalité, ces faits (indiscutables) ne prouvent pas que l'histoire de l'Univers ait débuté par une phase ponctuelle (Big Bang au sens strict), mais seulement qu'il a été, dans le passé, beaucoup plus dense qu'aujourd'hui.

Mais il faut rappeler quelques problèmes majeurs.

Ce modèle du Big Bang peut s'étudier de deux façons : la première consiste à observer l'Univers qui nous entoure, tel qu'il est, et à essayer de reconstituer son histoire, en remontant dans le passé, de proche en proche, en se basant sur les lois connues de la physique ; la seconde consiste à partir de l'instant zéro, et à imaginer le scénario qui a pu conduire à l'Univers que nous voyons aujourd'hui. Le problème essentiel, c'est que ces deux approches ne se rencontrent pas. Plus exactement, si on veut les obliger à se rencontrer, il faut imaginer une astuce ad hoc ; cette astuce s'appelle : l'inflation. L'inflation est une phase très courte de l'expansion de l'Univers, peu après le Big Bang, pendant laquelle son rayon aurait été multiplié brutalement par un facteur considérable : 10^{26} selon certains théoriciens, beaucoup plus pour d'autres... Cette inflation se serait même propagée à une vitesse supérieure à celle de la lumière ! La nécessité de faire appel à cette notion a considérablement affaibli la pertinence du modèle de Friedmann (avec Big Bang), qui avait été considéré un peu vite comme l'explication de tout...

Cette notion d'inflation est liée au problème de l'horizon, qui vient empoisonner les théories apparemment les plus simples et les plus robustes : dans le modèle standard du Big Bang, sous sa forme la plus simple, l'expansion aurait commencé avec une valeur de $a(t)$ nulle et une valeur de sa dérivée $\dot{a}(t)$ infinie, ce qui entraîne que chaque particule aurait été enfermée, à l'origine, dans un ho-

rizon sphérique de rayon nul ; aucun transfert d'information n'aurait été possible entre les différentes parties de l'Univers. Il est alors bien difficile de comprendre comment a pu s'élaborer l'homogénéité qui règne actuellement (homogénéité confirmée avec une grande précision par l'étude du rayonnement cosmologique fossile).

Un autre problème provient du fait que les mesures les plus récentes semblent bien indiquer que l'Univers visible est globalement euclidien (l'espace est plat ou à peu près plat), ce qui est inattendu et difficilement explicable dans le cadre théorique actuel : dans le modèle standard, la platitude de l'Univers est une situation non seulement très improbable, mais aussi très instable. Là encore, c'est l'inflation qui est appelée au secours par les théoriciens.

D'autre part, les mesures les plus précises de la densité de matière dans l'Univers semblent bien montrer qu'elle se situe largement au-dessous de la densité critique, ce qui suggère une expansion infinie. A moins de faire intervenir une quantité considérable de "matière noire", de nature inconnue. C'est la piste actuellement privilégiée par beaucoup de chercheurs.

Enfin, l'étude fine de l'expansion de l'Univers, à partir d'un large échantillon de galaxies, montre une accélération (ou du moins ce que certains ont appelé une accélération), ce qui va à l'encontre de certains modèles qui prévoient un ralentissement. Ceci sera discuté plus loin.

Nous allons examiner quelques modèles extrêmement simples pour mettre en lumière ces problèmes.

Reprenons la métrique due à Friedmann, Robertson et Walker :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - a^2(t) \cdot \left(\frac{dr^2}{1 - k \cdot r^2} + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot d\phi^2 \right).$$

Si l'espace est plat ($k = 0$), elle se simplifie ainsi :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - a^2(t) \cdot (dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot d\phi^2) ;$$

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - a^2(t) \cdot dl^2.$$

Nous avons noté dl un déplacement infinitésimal, de direction quelconque.

Si le déplacement est radial, nous le notons dr . La métrique (pour un espace plat) s'écrit alors :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - a^2(t) \cdot dr^2.$$

Pour un espace sphérique :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - a^2(t) \cdot \frac{dr^2}{1 - r^2}.$$

Pour un espace hyperbolique :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - a^2(t) \cdot \frac{dr^2}{1+r^2}.$$

Ce cadre théorique, développé par Robertson et Walker, est dégagé de toute théorie de la gravitation ; il n'a pas de lien privilégié avec la relativité générale. L'étude de Friedmann, au contraire, est axée sur les conséquences cosmologiques de la relativité générale. Quand on parle des "modèles FLRW" (modèles de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker), on doit se rappeler que certains aspects sont très généraux, tandis que d'autres sont des interprétations basées sur la relativité générale. En particulier, la courbure a un statut bien spécifique en relativité générale : la matière locale (ou le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$) crée de la courbure localement, au point où elle se trouve, de manière directe. Mais nous avons vu que, dans d'autres théories, la matière, dans un premier temps, crée un champ (que nous avons noté $U^{\mu\nu}$) qui, dans un second temps, produit une courbure. Pour ces théories, comme celle que nous avons ébauchée, basée sur la métrique de Ni, le premier postulat de Friedmann et Einstein : "l'Univers doit être globalement identique, quel que soit l'observateur choisi, et ceci dans toutes les directions ; il doit donc être homogène et isotrope", a des conséquences qui sont totalement différentes de celles qui ont été popularisées par ces deux physiciens. Effectivement, le champ $U^{\mu\nu}$ étant identique en tout point, le potentiel va être aussi identique en tout point, donc il n'y aura aucune courbure. Dans ces théories, on s'attend donc à un Univers plat (le problème de la platitude est résolu avant même d'être posé), à condition bien sûr que la matière soit uniformément répartie ; mais, évidemment, ceci n'explique pas l'expansion.

4 Modèle 1 (modèle explosif non relativiste)

Comme nous venons de le rappeler, la découverte de la fuite des galaxies est intervenue en 1929, alors que les tentatives pour appliquer les formules de la relativité générale à l'Univers dans son ensemble étaient déjà lancées depuis 1922. On peut donc dire qu'il n'y a jamais eu d'interprétation de l'expansion de l'Univers basée sur la gravitation de Newton. Pour bien mesurer l'apport de la relativité générale dans ce domaine, il nous semble intéressant d'imaginer ce que les physiciens des époques antérieures (avant la relativité) auraient pu penser de cette expansion, s'ils l'avaient connue.

Voici donc un modèle, simpliste mais instructif, inspiré d'un phénomène explosif, sur le modèle de l'explosion d'une étoile sous forme de supernova. Nous imaginons un Univers né de l'explosion d'un objet hypercompact (penser à l'"atome primitif" de Lemaître), cette explosion ayant projeté dans toutes les directions des particules animées de toutes les vitesses possibles. Toute l'impulsion est injectée dès le départ ($t=0$), instantanément ; ensuite chaque particule

conserve sa vitesse.

Nous allons donc traiter ce problème de manière purement classique (non relativiste).

Appelons O le point où se produit l'explosion, et r la distance parcourue par une particule donnée, de vitesse v fixée, à l'instant t . On a : $r = v.t$, donc $v = \frac{r}{t}$. Donc, pour un observateur situé au point O , à un instant t donné (évalué à partir de l'explosion), la vitesse de récession des particules est proportionnelle à leur distance. Il va écrire :

$$v = H.r = \frac{1}{t}.r.$$

Ce nombre H est le coefficient de Hubble; il est identique pour toutes les particules observées à un instant t donné; on peut dire qu'il est invariant dans l'espace (indépendant de r), mais il varie dans le temps, puisqu'il est égal à $\frac{1}{t}$. La fonction $H(t)$ est décroissante.

On peut considérer cet univers comme un gaz en expansion; mais le mouvement des particules qui le composent est parfaitement ordonné : il n'y a aucune place pour l'agitation thermique. Chaque particule est "comobile" : elle peut être considérée comme "gravitationnellement immobile" par rapport à l'ensemble de l'Univers.

Soient O , A , B sont trois particules comobiles alignées; notons $\vec{v}_1$ la vitesse de récession de A par rapport à O , et $\vec{v}_2$ la vitesse de récession de B par rapport à O (au même instant t). On a alors :

$$\vec{v}_1 = H.\vec{OA} \text{ et } \vec{v}_2 = H.\vec{OB}.$$

Appelons $\vec{v}_3$ la vitesse de récession de B par rapport à A ; selon la règle classique de composition des vitesses, on a :

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = H.\vec{OB} - H.\vec{OA} = H.\vec{AB}.$$

Ceci prouve que chacune des particules comobiles peut être choisie comme origine, et que les vitesses de récession des autres particules par rapport à elle vont respecter la loi de Hubble, avec le même coefficient H .

Si on observe les distances et les vitesses d'un ensemble de particules comobiles à l'instant t_1 , puis à l'instant t_2 , on constate que les distances ont été multipliées par $\frac{t_2}{t_1}$ (homothéties de rapport $\frac{t_2}{t_1}$), tandis que les vitesses relatives n'ont pas changé. Nous noterons : $a(t) = \frac{t}{t_1}$. C'est le facteur d'échelle. Le choix de t_1 est arbitraire.

On aura remarqué que nous raisonnons comme si nous n'avions jamais entendu parler de la relativité restreinte. Continuons dans cette voie.

Notons $\dot{a}(t)$ la dérivée du facteur d'échelle par rapport au temps. Dans le cas présent, on a : $a(t) = \frac{t}{t_1}$, donc $\dot{a}(t) = \frac{1}{t_1}$; par conséquent :

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\frac{1}{t_1}}{\frac{t}{t_1}} = \frac{1}{t} = H(t).$$

Pour un observateur gravitationnellement immobile, à l'instant t , les galaxies situées à la distance $r = c.t$ ont une vitesse de fuite égale à c . Celles qui se trouvent plus loin ont une vitesse de fuite supérieure à c . On peut donc penser que la sphère de rayon $c.t$ (rayon croissant, puisque t croît) constitue un horizon. Mais voyons ceci de plus près.

Supposons qu'un point comobile émette un rayon lumineux en direction de l'observateur (lui-même comobile) ; notons x la distance du photon par rapport à l'observateur. Nous allons calculer x en fonction de t .

Nous allons utiliser le facteur d'échelle : $a(t) = \frac{t}{t_1}$.

La métrique s'écrit :

$$ds^2 = c^2.dt^2 - a^2(t).dl^2 = c^2.dt^2 - \frac{t^2}{t_1^2}.dl^2.$$

Comme il s'agit d'étudier le parcours d'un photon se dirigeant vers l'observateur, on aura $ds^2 = 0$.

$$c^2.dt^2 - \frac{t^2}{t_1^2}.dx^2 = 0 ;$$

$$c.dt = -\frac{t}{t_1}.dx.$$

Le signe moins est justifié par le fait que le photon se dirige vers l'observateur, ce qui signifie que x décroît quand t croît.

$$\frac{dx}{c.t_1} = -\frac{dt}{t} = -d(\text{Log } t).$$

Intégrons de t_1 (distance : r_1) à t_2 (distance : $r_2 = 0$) :

$$\frac{r_2 - r_1}{c.t_1} = -(\text{Log } t_2 - \text{Log } t_1) = -\text{Log } \frac{t_2}{t_1} ;$$

$$\frac{r_1}{c.t_1} = \text{Log } \frac{t_2}{t_1} ;$$

$$\frac{t_2}{t_1} = e^{\frac{r_1}{c.t_1}} ;$$

$$\frac{t_2 - t_1}{t_1} = e^{\frac{r_1}{c.t_1}} - 1.$$

Le temps nécessaire pour que le photon parvienne à l'observateur est donc :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_1 \cdot \left(e^{\frac{r_1}{c \cdot t_1}} - 1 \right).$$

Que voit l'observateur à l'instant t_2 ? Pour répondre, raisonnons avec t_2 fixé, et faisons varier t_1 et r_1 . A l'instant t_2 , l'observateur reçoit tous les messages émis à un instant t_1 , à une distance r_1 , vérifiant $\frac{r_1}{c \cdot t_1} = \text{Log} \frac{t_2}{t_1}$; il existe une infinité de couples (r_1, t_1) vérifiant cette condition. Nous cherchons la valeur maximale de r_1 .

$$r_1 = c \cdot t_1 \cdot (\text{Log } t_2 - \text{Log } t_1) ;$$

$$dr_1 = c \cdot t_1 \cdot \left(-\frac{dt_1}{t_1} \right) + c \cdot dt_1 \cdot (\text{Log } t_2 - \text{Log } t_1) = c \cdot dt_1 \cdot \left(\text{Log} \frac{t_2}{t_1} - 1 \right).$$

Nous voulons que t_1 soit inférieur à t_2 (car le photon doit partir avant d'arriver) ; la fonction qui, à l'instant d'émission t_1 , associe la distance d'émission r_1 , doit être décroissante (plus le photon part de loin, plus il doit partir tôt pour arriver à l'instant t_2). On doit avoir $\frac{dr_1}{dt_1} \leq 0$, et par suite :

$$\text{Log} \frac{t_2}{t_1} - 1 \leq 0 ;$$

$$\text{Log} \frac{t_2}{t_1} \leq 1 ;$$

$$\frac{t_2}{t_1} \leq e ;$$

$$t_1 \geq \frac{t_2}{e} ;$$

$$\frac{t_2}{e} \leq t_1 \leq t_2.$$

La valeur minimale de t_1 est $t_{1min} = \frac{t_2}{e}$; la valeur maximale de t_1 est $t_{1max} = t_2$.

Pour la distance r_1 , on utilise la formule $r_1 = c \cdot t_1 \cdot (\text{Log } t_2 - \text{Log } t_1)$; en remplaçant t_1 par sa valeur maximale, on obtient la valeur minimale de r_1 , et en remplaçant t_1 par sa valeur minimale on obtient la valeur maximale de r_1 .

$$r_{1min} = c \cdot t_{1max} \cdot (\text{Log } t_2 - \text{Log } t_{1max}) = c \cdot t_2 \cdot (\text{Log } t_2 - \text{Log } t_2) = 0 ;$$

$$r_{1max} = c \cdot t_{1min} \cdot (\text{Log } t_2 - \text{Log } t_{1min}) = c \cdot \frac{t_2}{e} \cdot (\text{Log } t_2 - \text{Log } \frac{t_2}{e}) = \frac{c \cdot t_2}{e} \cdot \text{Log} \frac{t_2}{\frac{t_2}{e}} ;$$

$$r_{1max} = \frac{c \cdot t_2}{e} \cdot \text{Log } e = \frac{c \cdot t_2}{e}.$$

On a donc :

$$\frac{c \cdot t_2}{e} \geq x_1 \geq 0$$

Nous voyons que la région de l'Univers accessible à l'observation à l'instant t_2 est limitée par la sphère de rayon $\frac{c.t_2}{e}$. Les points comobiles situés sur cette sphère avaient une vitesse de récession égale à c au moment de l'émission du photon. Effectivement, les égalités $t_1 = \frac{t_2}{e}$ et $x_1 = \frac{c.t_2}{e}$ impliquent évidemment que $x_1 = c.t_1$. Les photons reçus à l'instant t_2 en sont partis à l'instant $t_1 = \frac{t_2}{e}$, et le rayon de la sphère était alors $x_1 = c.t_1 = \frac{c.t_2}{e}$. Lorsque t_2 augmente, la sphère-horizon se dilate à la vitesse de la lumière. Mais les galaxies visibles sont toujours les mêmes, puisque celles qui sont sur la sphère s'éloignent aussi à la vitesse de la lumière.

Pour un physicien du début du XX^{eme} siècle, l'idée que les vitesses de récession puissent dépasser la vitesse de la lumière est problématique, mais pas totalement impossible.

A cette époque, l'idée qui se serait probablement imposée, pour expliquer cette expansion, est celle de l'explosion d'un objet compact pré-existant. Aurait-on pensé à un Big Bang issu d'une singularité? A priori, cette hypothèse "exotique" semble peu probable. Aurait-on considéré cet "objet compact pré-existant" comme étant l'Univers dans sa totalité, ou comme un objet parmi d'autres? Ne répondons pas à la place des physiciens de l'époque...

Mais poussons l'analyse un peu plus loin.

5 De Newton à Friedmann

Nous allons rester encore un peu sur cette conception non relativiste de l'univers, où l'univers n'est pas l'Univers dans sa totalité (en supposant que ceci ait un sens); mais seulement une partie de celui-ci. Nous nous basons sur la gravitation de Newton.

Supposons que toutes les galaxies que nous observons fassent partie d'une même superstructure sphérique de centre O et de rayon R , de densité ρ uniforme, donc de masse totale $M = \frac{4}{3}.\pi.R^3.\rho$. Une galaxie de masse m , située à sa périphérie, aura alors une énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{G.M.m}{R} = -\frac{G.m}{R} \cdot \frac{4}{3}.\pi.R^3.\rho = -\frac{4.\pi.G.\rho}{3}.m.R^2.$$

Son énergie cinétique (selon Newton) est :

$$E_c = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m.\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}.m.\dot{R}^2.$$

La conservation de l'énergie s'écrit :

$$E = E_p + E_c = -\frac{4.\pi.G.\rho}{3}.m.R^2 + \frac{1}{2}.m.\dot{R}^2 = c^{te} ;$$

$$\frac{2.E}{m} = -\frac{8.\pi.G.\rho}{3}.R^2 + \dot{R}^2 = c^{te}.$$

Posons $k' = -\frac{2.E}{m}$.

$$k' = -\frac{2.E}{m} = \frac{8.\pi.G.\rho}{3}.R^2 - \dot{R}^2 = c^{te} ;$$

$$\frac{8.\pi.G.\rho}{3} = \frac{k'}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}.$$

Pour bien montrer la parenté avec le modèle de Friedmann, on peut faire intervenir ici le facteur d'échelle $a(t)$. Par définition, on doit avoir : $R(t) = R(t_0) \cdot \frac{a(t)}{a(t_0)}$, donc $\dot{R}(t) = R(t_0) \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t_0)}$, et $\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. L'égalité ci-dessus devient :

$$\frac{8.\pi.G.\rho(t)}{3} = \frac{k'}{R^2(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} ;$$

$$\frac{8.\pi.G.\rho(t)}{3} = \frac{k'.a^2(t_0)}{R^2(t_0).a^2(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}.$$

Posons : $k = \frac{k'.a(t_0)^2}{R(t_0)^2}$ (constante) ; on obtient :

$$\frac{8.\pi.G.\rho(t)}{3} = \frac{k}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}.$$

Cette équation correspond à la première formule de Friedmann (voir plus loin), sans constante cosmologique.

Nous pouvons l'écrire ainsi :

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8.\pi.G.\rho(t)}{3}.a^2(t) - k = \frac{8.\pi.G.\rho_0.a^3(t_0)}{3.a^3(t)}.a^2(t) - k ;$$

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8.\pi.G.\rho_0.a^3(t_0)}{3.a(t)} - k.$$

Dérivons par rapport au temps :

$$2.\dot{a}(t).\ddot{a}(t) = -\frac{8.\pi.G.\rho_0.a^3(t_0)}{3} \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)} = -\frac{8.\pi.G}{3} \cdot \frac{\rho_0.a^3(t_0)}{a^3(t)}.a(t).\dot{a}(t) ;$$

$$2.\dot{a}(t).\ddot{a}(t) = -\frac{8.\pi.G}{3}.\rho(t).a(t).\dot{a}(t) ;$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4.\pi.G.\rho(t)}{3}.$$

Il s'agit de la seconde équation de Friedmann (que nous reverrons plus loin), dans laquelle on a fait $\Lambda = 0$ (c'est la constante cosmologique d'Einstein) et $p = 0$ (c'est la pression).

Mais n'oublions pas que les formules de Friedmann sont basées sur l'hypothèse d'un Univers homogène (peuplé de galaxies de manière uniforme, dans toutes les directions et sans limite), alors que pour appliquer les formules de Newton, comme nous venons de le faire, nous sommes obligés de considérer, au contraire, que ce peuplement est limité dans l'espace, et s'arrête brutalement ou progressivement.

Remarquons que $k = \frac{k' \cdot a(t_0)^2}{R(t_0)^2} = -\frac{2 \cdot E}{m} \cdot \frac{a(t_0)^2}{R(t_0)^2}$. On a donc $k = 0$ si et seulement si $E = 0$. L'énergie totale de la galaxie en question est alors nulle, ce qui signifie qu'elle se trouve sur une orbite d'évasion : lorsqu'elle s'éloigne, son énergie potentielle augmente et son énergie cinétique diminue, ainsi que sa vitesse de fuite, qui va s'annuler à l'infini, comme sur une trajectoire parabolique. Et il en est de même pour les autres galaxies. Si $k < 0$, on a $E > 0$, donc la trajectoire est équivalente à une trajectoire hyperbolique. Si $k > 0$, on a $E < 0$, donc la trajectoire est équivalente à une trajectoire elliptique, ce qui signifie qu'à une certaine distance la vitesse de fuite de la galaxie va s'annuler, après quoi elle va "retomber vers le centre" : c'est un problème de balistique très classique ! La superstructure va donc se dilater, puis se stabiliser, et se contracter de nouveau.

Pour savoir lequel de ces trois scénarios va être le bon, il suffit de déterminer si la densité ρ est égale, inférieure ou supérieure à une densité critique ρ_c , qu'on calcule en faisant $k = 0$:

$$\frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_c}{3} = \frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = H(t)^2 ;$$

$$\rho_c = \frac{3 \cdot H^2}{8 \cdot \pi \cdot G}.$$

Pour $\rho \leq \rho_c$, l'expansion est infinie : les galaxies se dispersent dans l'espace, sans retour ; pour $\rho > \rho_c$, elle est finie : elle ralentit, s'arrête, puis s'inverse.

Nous allons maintenant utiliser la seconde équation, analogue à la seconde équation de Friedmann, pour étudier comment évolue le facteur d'échelle.

La densité est inversement proportionnelle au volume, donc au cube du rayon R , ou au cube du facteur d'échelle :

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 \cdot a^3(t_0)}{a^3(t)},$$

où $\rho_0 = \rho(t_0)$ est la densité évaluée à un instant t_0 choisi arbitrairement (qui n'est pas l'instant $t = 0$ du Big Bang éventuel). Faisons la substitution dans la seconde équation "de Friedmann" :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot G}{3} \cdot \frac{\rho_0 \cdot a^3(t_0)}{a^3(t)} ;$$

$$\ddot{a}(t).a^2(t) = -\frac{4.\pi.G.\rho_0.a^3(t_0)}{3}.$$

$$\text{Posons } K = -\frac{4.\pi.G.\rho_0.a^3(t_0)}{3}.$$

L'équation différentielle $\ddot{a}(t).a^2(t) = K$ admet une solution de la forme $a(t) = \lambda.t^n$; sa dérivée première est $\dot{a}(t) = \lambda.n.t^{n-1}$, et sa dérivée seconde est : $\ddot{a}(t) = \lambda.n.(n-1).t^{n-2}$; ce qui donne :

$$\ddot{a}(t).a^2(t) = \lambda.n.(n-1).t^{n-2}.\lambda^2.t^{2.n} = \lambda^3.n.(n-1).t^{3.n-2}.$$

Pour que cette quantité soit constante (égale à K) on doit avoir $n = \frac{2}{3}$, ce qui donne :

$$\ddot{a}(t).a^2(t) = \lambda^3.\frac{2}{3}.(-\frac{1}{3}) = K ;$$

$$\lambda^3 = -\frac{9}{2}.K = \frac{9}{2}.\frac{4.\pi.G.\rho_0.a^3(t_0)}{3} = 6.\pi.G.\rho_0.a^3(t_0) ;$$

$$\lambda = \sqrt[3]{6.\pi.G.\rho_0.a(t_0)} ;$$

$$a(t) = \lambda.t^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6.\pi.G.\rho_0.a(t_0)}.t^{\frac{2}{3}}.$$

On en déduit que :

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Sous cette forme, cette équation est appelée **équation d'Einstein-De Sitter**. Nous en reparlerons plus loin.

Quand t tend vers 0, $a(t)$ tend vers 0 ; tiens, l'Univers serait-il issu d'une singularité : le Big Bang ?

D'autre part :

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3}.\lambda.t^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.\lambda.\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}.$$

La dérivée du facteur d'échelle par rapport au temps tend vers l'infini au voisinage du Big Bang.

$$\text{On peut remarquer que } H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\frac{2}{3}.\lambda.t^{-\frac{1}{3}}}{\lambda.t^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3.t}.$$

Le coefficient de Hubble tend vers l'infini à l'instant initial (Big Bang).

Les calculs que nous venons de présenter ici ne sont pas relativistes ; ils auraient pu être faits à l'époque de Newton. De plus, ils ne sont pas "cosmologiques", en ce sens que rien n'impose de considérer la superstructure étudiée ici comme étant l'Univers dans sa totalité. Au contraire, le calcul de Newton nous interdit de raisonner sur une superstructure homogène jusqu'à l'infini.

Mais nous voyons que le calcul du "Friedmann de l'époque" fait apparaître une singularité originelle, correspondant au Big Bang.

Ceci ne peut pas laisser indifférents les collègues de ce "Monsieur Friedmann". Ils lui font observer que son calcul fait intervenir une seule force : la gravitation de Newton, donc une force centripète (qui tend à contracter le nuage de galaxies) ; mais dans l'étude des explosions d'étoiles (supernovae par exemple) on doit faire intervenir aussi une force centrifuge (qui tend vers la dilatation) : la pression de radiation (qui ne sera bien comprise qu'un peu plus tard, grâce à l'effet photoélectrique, éclairci par Einstein). La stabilité d'une étoile suppose l'équilibre entre la gravité et la pression de radiation ; son explosion suppose la rupture de cet équilibre.

Ne pensez-vous pas, Monsieur Friedmann, que vous avez oublié la pression de radiation ?

Ce à quoi le Friedmann de 1922 aurait répondu : "Pas du tout : j'ai suivi l'équation de la relativité générale d'Einstein. Et cette équation prévoit que la pression ne s'oppose pas à la contraction : au contraire, elle l'amplifie."

Ce serait donc l'équation d'Einstein qui imposerait l'existence d'une singularité dans ce scénario ? Oui, bien sûr ; et nous en reparlerons.

Mais en attendant, posons-nous cette question : supposons qu'après avoir proposé le schéma ci-dessus, nos physiciens du début du XX^{eme} siècle découvrent le travail d'Einstein sur la relativité restreinte. Comment vont-ils corriger leur modèle ?

Comme nous l'avons vu, dans le modèle 1 (section précédente), la vitesse de récession des galaxies peut atteindre (et, pourquoi pas, dépasser ?) celle de la lumière. La première chose à faire pour se mettre en conformité avec la relativité restreinte, c'est d'appliquer la règle de composition des vitesses qui résulte de la transformation de Lorentz. C'est ce que nous ferons dans le modèle 4 (modèle de De Sitter homogénéisé).

Une autre correction possible du modèle ébauché ci-dessus consisterait à introduire la "création d'espace", qui apparaît, en métrique de Ni, quand on veut concentrer une grande quantité de matière dans un petit volume. Ce phénomène, qui empêche la formation de véritables trous noirs, interdit aussi l'existence d'un vrai Big Bang dans ce modèle. Voir en particulier la section "équilibre gravitationnel en métrique de Ni" dans le document sur les trous noirs (ou gris).

6 Modèle 2 (modèle de De Sitter)

Il existe plusieurs modèles de De Sitter. Celui dont nous allons parler est un "Univers vide" (idée de De Sitter) traité selon le cadre fixé par Friedmann (avec un temps cosmique, mais à densité et pression nulles). Par rapport au modèle 1, dans lequel le coefficient de Hubble était variable dans le temps ($H = \frac{1}{t}$), on suppose ici que H est constant.

Les galaxies ne se déplacent pas, c'est l'espace qui se dilate, nous dit Friedmann. Dans ce cas, plutôt que de raisonner comme si chaque particule était un projectile ayant reçu une impulsion à l'instant du Big Bang et l'ayant conservée depuis, il serait peut-être plus correct de dire que c'est le vide qui crée du vide, de manière continue, par un mécanisme inconnu. Comme le vide quantique est envisagé comme un bouillon dans lequel des particules virtuelles sont continuellement créées et annihilées, certains imaginent une rupture de symétrie : il y aurait une infime différence entre le taux de création et le taux d'annihilation... D'autres décrivent cette "création d'espace" comme la manifestation d'une énergie d'origine et de nature inconnues : l'énergie noire.

Dans ce modèle, H ne varie ni dans l'espace, ni dans le temps. L'espace crée de l'espace, à un rythme constant, suivant une loi immuable liée aux propriétés supposées du vide quantique.

Pour un observateur "comobile" (ou gravitationnellement immobile), un autre point comobile, situé à la distance r , semblera s'éloigner à la vitesse v donnée par la loi de Hubble :

$$v = \frac{dr}{dt} = H.r.$$

Cette vitesse v n'est qu'une vitesse de récession apparente, puisque l'observateur et le point observé sont tous deux "immobiles" ; ce n'est qu'une conséquence de la dilatation de l'espace.

Puisque cette vitesse de récession est directement proportionnelle à la distance r , qui est croissante, il est clair que la vitesse d'un point comobile va nécessairement croître aussi. Par intégration, on peut reconstituer les variations de la distance d'un point comobile dans un repère lui-même comobile :

$$dr = v.dt = H.r.dt ;$$

$$H.dt = \frac{dr}{r} = d(\text{Log } r).$$

Intégrons de l'instant t_1 (distance : r_1) à l'instant t_2 (distance : r_2) :

$$H.(t_2 - t_1) = \text{Log } r_2 - \text{Log } r_1 = \text{Log } \frac{r_2}{r_1} ;$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{e^{H.t_2}}{e^{H.t_1}}.$$

Comme on pouvait s'y attendre, la distance r_2 du point comobile croît exponentiellement en fonction du temps (t_1 et r_1 étant fixés).

L'égalité ci-dessus montre que le facteur d'échelle est : $a(t) = \frac{e^{H.t}}{e^{H.t_1}}$, où t_1 peut être choisi arbitrairement.

On peut remarquer que $\dot{a}(t) = H \cdot \frac{e^{H.t}}{e^{H.t_1}} = H \cdot a(t)$; on a donc : $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = cte$.

Posons $v_2 = H \cdot r_2$ (c'est la vitesse de récession de ce même point comobile). Pour $t_2 = t_1$, on a $r_2 = r_1$; si on fait tendre t_2 vers $+\infty$, r_2 tend vers $+\infty$, et v_2 aussi ; si on fait tendre t_2 vers $-\infty$, r_2 tend vers 0, et v_2 aussi. Plus on recule dans le passé, plus l'Univers est condensé, mais il ne se réduit jamais à un point. Il n'y a pas de véritable Big Bang.

Supposons maintenant que le point observé émette un rayon lumineux (ou un photon) en direction de l'observateur ; notons x la distance du photon par rapport à l'observateur.

Nous allons utiliser le facteur d'échelle :

$$a(t) = \frac{e^{H.t}}{e^{H.t_1}}.$$

La métrique s'écrit donc :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - \frac{e^{2.H.t}}{e^{2.H.t_1}} \cdot dr^2.$$

Pour un rayon lumineux, on a toujours $ds^2 = 0$, donc :

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - \frac{e^{2.H.t}}{e^{2.H.t_1}} \cdot dx^2 = 0,$$

ce qui entraîne :

$$c \cdot dt = - \frac{e^{H.t}}{e^{H.t_1}} \cdot dx.$$

Le signe négatif est justifié par le sens de déplacement du photon, qui se dirige vers l'observateur (donc x décroît).

$$\frac{dx}{c} \cdot e^{-H.t_1} = -e^{-H.t} \cdot dt = \frac{1}{H} \cdot d(e^{-H.t}).$$

On intègre de t_1 (distance du photon : r_1) à t_2 (distance du photon : $r_2 = 0$) :

$$\frac{r_2 - r_1}{c} \cdot e^{-H.t_1} = \frac{1}{H} \cdot (e^{-H.t_2} - e^{-H.t_1}) ;$$

$$\begin{aligned}
-\frac{r_1}{c} \cdot e^{-H \cdot t_1} &= \frac{1}{H} \cdot (e^{-H \cdot t_2} - e^{-H \cdot t_1}) ; \\
\frac{H \cdot r_1}{c} \cdot e^{-H \cdot t_1} &= e^{-H \cdot t_1} - e^{-H \cdot t_2} ; \\
\frac{H \cdot r_1}{c} &= (e^{-H \cdot t_1} - e^{-H \cdot t_2}) \cdot e^{H \cdot t_1} = 1 - e^{-H \cdot (t_2 - t_1)} ; \\
e^{-H \cdot (t_2 - t_1)} &= 1 - \frac{H \cdot r_1}{c} ; \\
e^{H \cdot \Delta t} &= \frac{1}{1 - \frac{H \cdot r_1}{c}} .
\end{aligned}$$

Si nous faisons tendre r_1 vers $\frac{c}{H}$, le temps Δt nécessaire pour que le rayon lumineux parvienne à l'observateur tend vers $+\infty$. Ceci est facile à comprendre, puisqu'à la distance $r = \frac{c}{H}$, la vitesse de récession est : $v = H \cdot \frac{c}{H} = c$. La vitesse du photon est annulée par la vitesse de récession ; par rapport à l'observateur, il fait du surplace. La sphère de rayon $\frac{c}{H}$, centrée sur l'observateur, constitue, pour lui, un horizon ; il ne voit pas ce qui se trouve au-delà. Ceci est vrai pour tous les observateurs, à tout instant : chacun est au centre d'une sphère fixe de même rayon qui constitue son horizon.

L'observateur observe le point comobile situé à la distance r_1 , à l'instant t_1 . Cette distance croît, selon la formule : $\frac{r_2}{r_1} = \frac{e^{H \cdot t_2}}{e^{H \cdot t_1}}$. Comme nous l'avons dit, la distance tend vers l'infini quand t tend vers l'infini. Mais que voit l'observateur ? Il voit le point comobile s'éloigner, mais à l'approche de l'horizon il semble ralentir, et ne le franchit jamais. Du point de vue de l'observateur, cet horizon est doublement une limite : d'une part rien ne peut pénétrer en provenance de l'extérieur, même à la vitesse de la lumière ; d'autre part les points comobiles situés à l'intérieur n'en sortent, apparemment, jamais.

Ceci soulève le problème de la communication entre les différentes parties de l'Univers. Dans ce cas, le problème peut être résolu en supposant l'Univers fini (par exemple une hypersphère).

Calculons maintenant le décalage spectral correspondant. Selon Friedmann, la longueur d'onde d'un rayon lumineux est modifiée par la dilatation de l'espace pendant le parcours. On doit donc avoir :

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)},$$

où λ_e est sa longueur d'onde à l'émission et λ_r sa longueur d'onde à la réception, et t_e et t_r le temps cosmique à l'émission et à la réception.

Dans la cas du modèle de De Sitter, on a $a(t) = e^{H \cdot t}$ (à une constante multiplicative près), donc :

$$1 + z = \frac{e^{H \cdot t_r}}{e^{H \cdot t_e}} = e^{H \cdot (t_r - t_e)} = e^{H \cdot \Delta t}.$$

Nous venons de voir que le temps nécessaire pour qu'un rayon lumineux, parti d'une galaxie située à la distance r , parvienne à l'observateur, vérifie : $e^{H.\Delta t} = \frac{1}{1 - \frac{H.r}{c}}$. On a donc :

$$1 + z = e^{H.\Delta t} = \frac{1}{1 - \frac{H.r}{c}}.$$

$$z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{1}{1 - \frac{H.r}{c}} - 1 = \frac{\frac{H.r}{c}}{1 - \frac{H.r}{c}}.$$

7 Modèle 3 (modèle de Friedmann)

Le modèle de Friedmann est basé sur un petit nombre d'idées : à l'origine, il considère, comme Einstein, un Univers hypersphérique (mais nous considérons ici la version euclidienne) ; il fait intervenir la matière qu'il contient, qui va freiner l'expansion par l'effet de l'attraction gravitationnelle, et la constante cosmologique Λ , qui alimente l'expansion. Il est l'une des bases des modèles FLRW (qui résultent, en plus des travaux de Friedmann, de ceux de Lemaître, Robertson et Walker).

Nous n'allons pas aborder de manière générale les nombreuses études qui ont été faites sur ce sujet très riche, mais seulement en présenter quelques aspects.

Le but de Friedmann était d'étudier les conséquences de la relativité générale sur la cosmologie.

On trouvera facilement sur le web des articles donnant de nombreuses formules avec des démonstrations rigoureuses. Nous avons proposé une approche simple, non relativiste, dans la section "De Newton à Friedmann". Parmi les formules importantes, citons :

$$1) \quad \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8.\pi.G.\rho}{3} - \frac{k}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} ;$$

$$2) \quad \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4.\pi.G}{3} . (\rho + 3.p) + \frac{\Lambda}{3}.$$

Dans la version non relativiste que nous avons proposée, la constante cosmologique d'Einstein Λ n'était pas prise en compte, pas plus que la pression p . Pour comprendre le rôle de cette pression dans la seconde équation de Friedmann, rappelons-nous que la courbure de l'espace-temps se calcule à l'aide du tenseur énergie-impulsion, qui s'écrit, dans un repère comobile :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Attention : dans notre document sur l'entraînement, nous avons appelé ρ la densité de matière (ou de masse), et $\rho.c^2$ la densité d'énergie. Pour respecter les notations usuelles du modèle de Friedmann, nous appellerons ρ la densité d'énergie.

Nous nous contenterons ici d'examiner les conséquences de la seconde équation.

Dans ces formules, Λ est la constante cosmologique d'Einstein; G est la constante de la gravitation de Newton; ρ est la densité d'énergie de l'Univers, à l'instant t (temps cosmique); p est la pression due à l'agitation de la matière, relativiste ou non, et aux rayonnements; $a(t)$ est le facteur d'échelle à l'instant (cosmologique) t , $\dot{a}(t)$ et $\ddot{a}(t)$ sont ses dérivées première et seconde par rapport au temps cosmique.

Rappelons que le coefficient de Hubble est :

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

D'autre part, le décalage spectral z est relié au facteur d'échelle par la formule :

$$1 + z = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}$$

où t_e est l'instant de l'émission et t_r l'instant de la réception.

On considère donc que le décalage spectral n'est pas dû à l'effet Doppler, mais à la dilatation de l'espace.

Les formules 1 et 2 permettent de comprendre très clairement pourquoi Einstein a inventé la constante cosmologique Λ : si on lui attribue une valeur égale à $4.\pi.G.(\rho + 3.p)$, le membre de droite de la seconde égalité s'annule; on a alors $\ddot{a}(t) = 0$; cette condition est nécessaire si on désire avoir $a(t) = cte$, ce qui est le but recherché. Dans l'esprit d'Einstein, l'Univers devait nécessairement être stable, donc sa constante Λ était indispensable, et sa valeur ne pouvait être que $4.\pi.G.(\rho + 3.p)$. Mais quand il a su, en 1929, que l'Univers était en expansion, il s'est rendu compte que sa "rustine" était non seulement inutile, mais en plus inefficace (comme l'a prouvé Eddington) : si $a(t)$ varie, alors ρ et p varient aussi, donc la valeur fixée pour la constante Λ n'est plus adaptée, et elle ne peut plus jouer son rôle. Quelle erreur d'avoir inventé cette constante ! A moins que...

Dans ce modèle, il y a deux "moteurs" : d'une part la constante cosmologique Λ , d'autre part la matière/énergie, qui agit par sa densité ρ et sa pression p .

Voyons d'abord un premier cas particulier : celui d'un Univers vide, ou plutôt d'un Univers dans lequel la matière n'intervient pas pour freiner l'expansion. On

pose donc : $\rho = 0$ et $p = 0$. La seconde équation devient :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\Lambda}{3}.$$

Posons : $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$.

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = H^2.$$

Cette équation différentielle a pour solution :

$$a(t) = e^{H.t}.$$

On a alors : $\dot{a}(t) = H.e^{H.t}$ et $\ddot{a}(t) = H^2.e^{H.t}$. Nous retrouvons le modèle 2, c'est-à-dire l'Univers de De Sitter. C'est un Univers dont l'expansion possède un seul moteur : la constante cosmologique. Cette constante définit à quel taux (ou à quelle vitesse) l'espace crée de l'espace.

Nous voyons donc que l'Univers de de Sitter correspond à un Univers dans lequel la matière ne freine pas l'expansion, mais où la constante cosmologique non nulle alimente en continu cette expansion. On peut dire que l'expansion est exponentielle, puisque $a(t) = e^{H.t}$, mais H et Λ sont deux constantes reliées entre elles : $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = c^{te}$. Et ces constantes sont vraiment constantes, aussi bien dans l'espace que dans le temps.

Voyons maintenant un second cas particulier : celui où seule la matière/énergie agit sur l'expansion. Nous posons donc $\Lambda = 0$. Il est d'usage de distinguer l'"Univers de radiations", dans lequel le rôle de la pression n'est pas négligeable ($p = \frac{1}{3}.\rho$), de l'"Univers de poussières", dans lequel il est négligeable. Nous choisissons d'examiner la seconde configuration, et nous posons : $p = 0$. L'équation devient :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4.\pi.G.\rho(t)}{3}.$$

Nous avons déjà étudié cette situation dans la section "De Newton à Friedmann".

Rappelons rapidement quelques résultats.

Nous avons posé :

$$\rho(t) = \frac{\rho_0.a^3(t_0)}{a^3(t)},$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4.\pi.G}{3} \cdot \frac{\rho_0.a^3(t_0)}{a^3(t)} ;$$

$$\ddot{a}(t).a^2(t) = -\frac{4.\pi.G.\rho_0.a^3(t_0)}{3} = K.$$

La résolution de l'équation différentielle $\ddot{a}(t).a^2(t) = K$ donne :

$$a(t) = \lambda.t^{\frac{2}{3}} ;$$

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3}.\lambda.t^{-\frac{1}{3}} ;$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\frac{2}{3}.\lambda.t^{-\frac{1}{3}}}{\lambda.t^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3.t} ;$$

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{formule d'Einstein-De Sitter}).$$

Nous avons remarqué que, quand t tend vers 0, $a(t)$ tend vers 0 ; il s'agit donc d'un Univers issu d'un Big Bang.

La dérivée du facteur d'échelle, ainsi que le coefficient de Hubble, tendent vers l'infini au voisinage du Big Bang.

Ceci est à la source du problème de l'horizon de rayon nul et de la déconnexion totale de tous les points comobiles à l'instant initial, comme nous allons le voir.

Sous sa version euclidienne (espace plan), la métrique s'écrit :

$$ds^2 = c^2.dt^2 - \lambda^2.\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{4}{3}}.dr^2.$$

Le choix de t_1 est arbitraire.

Pour étudier le phénomène d'horizon, considérons encore une fois un photon se dirigeant vers l'observateur ; sa distance à l'instant t est x ; il est parti à l'instant t_1 de la distance r_1 , et atteint l'observateur à l'instant t_2 (distance : $r_2 = 0$). Pour un photon, on a $ds^2 = 0$, donc :

$$c^2.dt^2 = \lambda^2.\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{4}{3}}.dx^2 ;$$

$$c.dt = -\lambda.\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{2}{3}}.dx ;$$

$$c.t^{-\frac{2}{3}}.dt = -\lambda.t_1^{-\frac{2}{3}}.dx ;$$

$$c.d\left(3.t^{\frac{1}{3}}\right) = -\lambda.t_1^{-\frac{2}{3}}.dx.$$

Nous intégrons de t_1 (distance : r_1) à t_2 (distance : $r_2 = 0$) :

$$3.c. \left(t_2^{\frac{1}{3}} - t_1^{\frac{1}{3}} \right) = -\lambda.t_1^{-\frac{2}{3}}.(r_2 - r_1) = \lambda.t_1^{-\frac{2}{3}}.r_1 ;$$

ce qui peut s'écrire :

$$r_1 = \frac{3.c}{\lambda} \cdot \left(t_2^{\frac{1}{3}}.t_1^{\frac{2}{3}} - t_1 \right).$$

Nous voulons savoir ce que voit l'observateur à l'instant t_2 . Nous considérons donc pour le moment t_2 comme fixé, et nous faisons varier t_1 , donc aussi r_1 (qui varie en fonction de t_1). On a, bien entendu, $t_1 \leq t_2$ (le photon est parti avant d'arriver) ; la fonction qui, à t_1 , associe r_1 , est décroissante : plus le point d'émission du photon est éloigné, plus celui-ci doit partir tôt pour arriver au but au même instant t_2 . Dérivons l'équation ci-dessus :

$$\frac{dr_1}{dt_1} = \frac{3.c}{\lambda} \cdot \left(t_2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot t_1^{-\frac{1}{3}} - 1 \right).$$

Pour que cette dérivée soit négative, on doit avoir :

$$t_2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot t_1^{-\frac{1}{3}} \leq 1 ;$$

$$\frac{2}{3} \cdot t_2^{\frac{1}{3}} \leq t_1^{\frac{1}{3}} ;$$

$$\frac{8}{27} \cdot t_2 \leq t_1.$$

Par conséquent :

$$\frac{8}{27} \cdot t_2 \leq t_1 \leq t_2.$$

Voyons maintenant l'intervalle de variation de r_1 .

$$\text{Si } t_1 = t_2, \text{ on a : } r_1 = \frac{3.c}{\lambda} \cdot \left(t_2^{\frac{1}{3}} \cdot t_2^{\frac{2}{3}} - t_2 \right) = 0.$$

$$\text{Si } t_1 = \frac{8}{27} \cdot t_2, \text{ on a :}$$

$$r_1 = \frac{3.c}{\lambda} \cdot \left[t_2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{8}{27} \cdot t_2 \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{8}{27} \cdot t_2 \right] = \frac{3.c}{\lambda} \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot t_2 - \frac{8}{27} \cdot t_2 \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{c \cdot t_2}{\lambda}.$$

Par conséquent :

$$0 \leq r_1 \leq \frac{4}{9} \cdot \frac{c \cdot t_2}{\lambda}.$$

En résumé, à l'instant t_2 , l'observateur a accès une sphère de rayon $\frac{4}{9} \cdot \frac{c \cdot t_2}{\lambda}$, dont il occupe le centre. Cette sphère se dilate, puisque son rayon est proportionnel à t_2 . Les messages émis par les points comobiles situés à l'extérieur de cette sphère ne sont pas encore arrivés, mais ils finiront par arriver : pour t_1

fixé, l'observateur recevra le photon lorsque t_2 sera égal à $\frac{27}{8}.t_1$.

Nous avons présenté ici une version simple du modèle de Friedmann ; mais on pourrait envisager un Univers sphérique ou hyperbolique ; on pourrait faire intervenir, en plus de la densité ρ , la pression p ; on pourrait combiner les contributions de ces deux variables avec celle de la constante cosmologique Λ . Certains théoriciens pensent qu'il faut éliminer la constante cosmologique ; d'autres pensent qu'elle est à l'origine de l'expansion, ou l'imaginent variable, peut-être même responsable du phénomène d'inflation, dans une phase violente ; d'autres encore imaginent une pression p négative (difficile à justifier) qui jouerait un rôle opposé à celui qui lui est dévolu dans les modèles dominants. La version privilégiée par Friedmann correspond à un Univers à courbure positive (hypersphère) issu d'un Big Bang. Selon sa densité, il pourra se dilater indéfiniment, ou bien passer par un volume maximal avant de se contracter jusqu'au Big Crunch. Mais nous avons déjà assez d'éléments pour commencer une discussion.

8 Discussion du modèle de Friedmann

Le modèle de Friedmann (y compris ses prolongements, dus à Lemaître, Robertson et Walker) admet un temps universel : le temps cosmique, qui est le temps propre commun à tous les repères "comobiles", autrement dit "gravitationnellement immobiles". Cette notion pourrait sembler contraire aux postulats de la relativité générale ; Einstein, réticent au début, a pourtant validé cette façon de voir : on n'a pas trouvé d'astuce pour s'en passer.

Dans le modèle de Friedmann, la vitesse de récession d'une galaxie peut très bien dépasser la vitesse de la lumière, ce qui est en principe interdit par la relativité restreinte. Mais il est d'usage d'admettre que cette vitesse de récession n'est pas une "vraie vitesse", car elle résulte uniquement de la dilatation du vide. Supposons que G_0 , G_1 et G_2 soient trois galaxies comobiles alignées ; notons v_1 la vitesse de récession de G_1 par rapport à G_0 (mesurée par G_0) et v_2 celle de G_2 par rapport à G_1 (mesurée par G_1). Quelle sera la vitesse de récession V de G_2 par rapport à G_0 (mesurée par G_0) ? D'après la relativité restreinte, on s'attend à : $V = v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}$; mais le modèle de Friedmann nous dit que $V = v_1 + v_2$. On considère qu'on n'a pas à utiliser la loi relativiste de composition des vitesses, basée sur la transformation de Lorentz, parce-que ces galaxies comobiles utilisent le même temps (c'est le temps cosmique) et appréhendent les distances de la même façon, à une translation près. Cette façon de s'exonérer des lois de la relativité restreinte est bien étrange ! Comme si, à l'échelle des galaxies, on pouvait changer les règles... Ceci ouvre, évidemment, la possibilité de dépassement de la vitesse de la lumière. Mais le fait que la vitesse de récession puisse dépasser celle de la lumière va faire apparaître des phénomènes d'"horizon" : certaines régions de l'Univers sont déconnectées entre elles, donc dans l'impossibilité de communiquer. Ceci est difficilement compa-

tible avec la mécanique quantique, qui admet la possibilité d'intrication entre particules, quels que soient le lieu et le temps.

Examinons les "moteurs" du modèle de Friedmann.

Le premier moteur est la constante cosmologique d'Einstein, qui a pour effet de dilater l'espace de manière continue, comme le montre bien le modèle de De Sitter (modèle 2). Cette constante cosmologique peut s'interpréter comme une tendance de l'espace à fabriquer de l'espace. Dans le modèle du vide quantique actuellement en vigueur, les créations et annihilations de particules virtuelles s'équilibrent de manière parfaite. Certains envisagent une "brisure de symétrie" pour expliquer la constante cosmologique et l'expansion de l'Univers. Remarquons que le modèle de De Sitter ne comporte pas de Big Bang, mais une sorte de création continue d'espace, qui se produit partout, à chaque instant.

Si on rejette la constante cosmologique, la relativité générale (ou si on préfère le modèle de Friedmann) conduit à admettre un vrai Big Bang, c'est-à-dire une origine ponctuelle de l'Univers : toute l'énergie nécessaire à son expansion est injectée dès l'origine, instantanément. Là encore, on attribue une flèche au temps.

Mais on peut aussi considérer que le modèle mathématique possède une limite de validité dans le passé, et que l'expansion a débuté par l'explosion d'un "objet" hypothétique, correspondant à l'"atome primitif" de Lemaître. Cependant, les équations de la relativité générale sont formelles : si on passe le film à l'envers, toute la matière de l'Univers va se trouver concentrée en un point, au bout d'un temps fini, et rien ne va lui permettre de se stabiliser sous forme d'un "atome primitif" ; dans un modèle sans constante cosmologique, on n'échappe pas au Big Bang strictement ponctuel (singularité). La situation est comparable à celle des trous noirs, dont l'effondrement (en temps propre, c'est-à-dire dans un repère qui participe à l'effondrement) dure un temps fini : les lignes de temps s'arrêtent net en atteignant la singularité. Ceci est une particularité de la métrique de Schwarzschild, donc de la relativité générale, et des modèles qui s'en inspirent, comme celui de Friedmann.

Le second moteur est la matière, qui agit par sa gravité. Cette matière va freiner l'expansion, et éventuellement l'inverser. Pourquoi ? Voici la première réponse : c'est l'équation d'Einstein qui le dit. Selon la relativité générale, la présence de matière/énergie dans un très petit volume (une "cellule" infinitésimale) modifie la courbure (tenseur de Ricci) de l'espace-temps dans cette cellule. Mais nous aimerions comprendre un peu mieux ce phénomène, de manière plus concrète. Pour cela, comparons les prédictions de la relativité générale avec celles de Newton.

Newton nous dit que la matière attire la matière, par l'intermédiaire de forces de liaison gravitationnelles. Cette question lui a été posée : si tous les corps s'at-

tirent, pourquoi l'Univers ne s'effondre-t-il pas sur lui-même ? Voici en substance sa réponse, reformulée pour le lecteur d'aujourd'hui. Si l'expansion de l'espace oblige deux galaxies à s'éloigner l'une de l'autre, on peut se dire que le travail des forces de liaison va produire une augmentation de l'énergie potentielle. Mais ces galaxies étant "gravitationnellement immobiles" (ou "comobiles"), ces forces travaillent-elles vraiment ? De toute façon, l'Univers étant supposé homogène et isotrope, à l'infini, chaque galaxie doit subir des forces équivalentes dans toutes les directions, et la somme vectorielle de ces forces sera donc nulle. Le travail d'une force nulle est nul, donc il n'y aura pas de variation de l'énergie potentielle. La conclusion est la même, que l'espace soit à courbure positive (Univers fini), nulle ou négative (Univers infini). Raisonnons avec le potentiel gravitationnel : si deux corps sont isolés, chacun subit une force proportionnelle au gradient du potentiel créé par l'autre. Mais dans un Univers homogène, le potentiel est identique en tout lieu, donc son gradient s'annule. A la rigueur, on pourrait imaginer que, lorsque l'Univers se dilate, le potentiel augmente partout de la même façon. Mais ce sont les différences de potentiel qui créent des forces, pas le potentiel lui-même, qui est relatif. Rappelons que, dans notre document "Gravitation et vide quantique", nous avons admis comme postulat la relativité du potentiel, ce qui est en accord avec Newton. D'ailleurs, dans le présent travail, nous avons toujours admis les idées de Newton concernant le potentiel, donc nous faisons nôtre le raisonnement de Newton. Mais Einstein a suivi une toute autre voie. Ce qui fait la particularité de la relativité générale, c'est que le potentiel (ou plutôt la courbure spatio-temporelle, définie par le scalaire de Ricci, puisqu'Einstein a décidé que la courbure pouvait se calculer sans passer par le potentiel), qui était une grandeur relative chez Newton, devient une grandeur absolue.

En réalité, ce raisonnement inspiré de Newton se base, bien sûr, sur l'idée d'un Univers homogène, c'est-à-dire ayant la même densité moyenne dans toutes les directions jusqu'à l'infini (s'il est infini) ou la même densité partout, s'il est fini (par exemple hypersphérique). Mais ce postulat a été posé par Einstein et par Friedmann ; il est permis de supposer, au contraire, que l'ensemble des galaxies actuellement visibles n'est qu'une petite partie d'une superstructure limitée et isolée dans l'espace, et qu'il peut éventuellement exister d'autres superstructures dans l'Univers. Dans ce cas, la théorie de Newton admet évidemment des interactions entre ces superstructures, modélisables en termes de forces, gravitationnelles ou non. Voir à ce sujet la section "de Newton à Friedmann".

9 Réflexion sur les repères comobiles

L'expansion de l'Univers, découverte par Hubble, a été très discutée au début, mais aujourd'hui elle est admise par tous. Les désaccords portent sur sa cause, et sur son origine (avec ou sans Big Bang). Nous savons que les galaxies sont animées de mouvements propres, bien mesurés pour les membres du groupe local ; mais à grande distance ces mouvements propres deviennent négligeables

par rapport à la vitesse de récession, qui croît de manière systématique avec la distance. La modélisation de ce phénomène, dans le cadre de la relativité générale, a conduit Friedmann (entre autres) à définir les repères comobiles, obtenus en gommant les mouvements propres des galaxies pour lisser la courbe de l'expansion, dans le but de la rendre plus facile à étudier et à mettre en équations. Ceci est particulièrement facile, puisqu'à une distance suffisante il n'y a pratiquement plus rien à gommer. Ces repères comobiles sont des repères dans lesquels l'équation décrivant l'expansion de l'Univers prend la forme la plus simple : ce sont des repères privilégiés. On peut être embarrassé par cette notion, étant donné que l'un des postulats sur lesquels est bâtie la relativité générale est qu'il n'existe pas de repère privilégié.

On pourrait penser que ces repères comobiles sont seulement des repères commodes pour étudier l'expansion de l'Univers (comme un repère lié au centre de gravité peut être commode pour étudier un système double, en gravitation newtonienne ; ou comme un repère lié au centre d'une étoile en fin de vie peut être commode pour modéliser son explosion finale) ; à priori, ceci n'implique pas nécessairement qu'ils aient un statut fondamentalement différent des autres repères. Mais le fait que la vitesse de récession, selon les équations de Friedmann, basées sur la relativité générale, puisse dépasser celle de la lumière, oblige les théoriciens, pour respecter la relativité restreinte, à admettre que la vitesse de récession ne révèle pas un mouvement des galaxies dans l'espace, mais une dilatation de l'espace entre les galaxies. La lumière qui se déplace dans l'espace a parfois été comparée à une fourmi se déplaçant sur un fil élastique qu'on tend. On ne peut plus faire abstraction du support. Ceci conduit à admettre que le vide possède une nature physique (le vide est plein) ; mais surtout que l'"immobilité" possède un sens, et que les repères comobiles ont un statut réellement différent des autres. D'autre part, cette "immobilité" doit être définie : on admet généralement que c'est l'immobilité par rapport à la répartition des masses dans l'Univers, ce qui nous ramène au principe de Mach, qu'Einstein avait pourtant abandonné. Dans ce cas, il faut admettre qu'en chaque point, y compris dans le vide, parviennent des "informations gravitationnelles" provenant du reste de l'Univers, qui permettent de définir une "immobilité gravitationnelle par rapport au reste de l'Univers".

Mais la relativité générale est une théorie dans laquelle la gravité ne se propage pas : selon l'équation d'Einstein, un grain de matière/énergie modifie le tenseur de Ricci au point où il se trouve, et nulle part ailleurs. Il n'existe aucun messenger permettant à la matière de courber l'espace-temps (plus exactement, de modifier son tenseur de Ricci) à distance. Il faut préciser quand même que la structure du vide, entre les corps matériels, s'équilibre selon le principe du tenseur de Ricci nul. C'est ce rééquilibrage, purement géométrique, qui peut, éventuellement, se propager sous forme d'ondes gravitationnelles. Mais dans le cas des galaxies lointaines l'équilibre est stable, et aucun rééquilibrage n'intervient. Dans le vide intergalactique, l'immobilité gravitationnelle ne peut pas être codée par le tenseur de Ricci, qui est identiquement nul presque partout. Mais

alors par quoi ?

La solution que nous avons proposée est la suivante : le tenseur de Ricci ne s'annule pas dans le vide ; il est déterminé, non pas, directement, par le tenseur $T^{\mu\nu}$, qui est nul presque partout, mais par le tenseur d'énergie impulsion virtuelle $U^{\mu\nu}$, qui ne s'annule nulle part, et qui est un résumé des informations provenant, sous forme d'un flux continu, de toute la matière/énergie réelle de l'Univers. Il permet de définir, en chaque point, un champ quadrivectoriel (l'"entraînement"), qui, lui-même, définit un repère privilégié, dit "gravitationnellement immobile". C'est également ce flux, dont nous avons longuement parlé, qui justifie le principe de Mach. Nous plaçons pour la réhabilitation de la notion de champ dans le domaine de la gravitation (un champ conçu selon les idées issues de la physique quantique), et également pour la prise en compte du principe de Mach ; les deux choses étant étroitement liées..

Parlons maintenant de la notion de pression : c'est un sujet sensible, car il est une source de malentendus.

10 La pression dans le modèle de Friedmann

Prenons un ballon de baudruche et soufflons dedans : la pression de l'air, à l'intérieur, augmente, et le ballon se dilate. Essayez de faire la même chose avec l'Univers de Friedmann. La pression va augmenter, et l'Univers va... se contracter !

Ceci provient de l'équation 2) de Friedmann :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \cdot (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}.$$

On voit que la pression p s'ajoute à la densité ρ et augmente son effet, c'est-à-dire augmente la courbure, et accentue la tendance à la contraction.

En physique classique, les problèmes de pression sont des problèmes d'équilibre de forces. Dans le cas d'un ballon, c'est l'équilibre entre, d'une part, la pression intérieure, et, d'autre part, la pression atmosphérique extérieure et la tension de la paroi en caoutchouc. Cette tension est due aux forces électriques entre les molécules de la paroi, qui n'ont rien à voir avec la gravitation. Il est possible de faire un bilan de ces forces : d'une part les forces dues à la pression, d'autre part des forces d'origine électrique, qu'on place sur un même plan, à égalité. On les combine vectoriellement, sans chercher à savoir quelle est leur origine. Une force est une force.

Dans le cas des étoiles, on étudie, classiquement, l'équilibre entre les forces gravitationnelles, qui, si elles étaient seules en action, produiraient une contrac-

tion, et la pression de radiation, qui entraînerait une dilatation. La pression et la gravitation son placées sur un même plan, à égalité. Une force est une force.

Pour la relativité générale, ceci n'a aucun sens, puisque la gravitation n'est pas une vraie force : elle agit sur la courbure de l'espace-temps, mais ne peut pas se combiner, vectoriellement, avec de vraies forces. La notion d'équilibre entre gravité et pression de radiation n'existe pas en relativité générale. A moins que la pression soit capable d'annuler la courbure due à la gravité? Mais non, c'est impossible, pour une raison simple : alors que la notion de "densité de matière" correspond à la partie scalaire de l'impulsion-énergie de toutes les particules présentes à un instant donné dans un volume élémentaire, la pression est une modélisation de la composante vectorielle (impulsion) de l'énergie-impulsion de ces mêmes particules. Or le quadrivecteur énergie-impulsion est lorentzien : il se transforme grâce à la transformation de Lorentz, et l'énergie se transforme en impulsion, ou l'inverse, au gré des changements de référentiels. Si on sait selon quelle loi mathématique la "masse au repos" (ou l'énergie scalaire) courbe l'espace-temps, on peut en déduire, par simple changement de référentiel, comment l'impulsion (vectorielle) courbe ce même espace-temps. C'est la même loi. Pour cette raison, la pression ne peut en aucun cas annuler la courbure produite par la densité de matière. Si la "masse au repos" agit sur la courbure, alors l'impulsion agit aussi sur cette courbure, de la même façon ; il suffit de changer de repère pour s'en rendre compte.

11 Pression de radiation et expansion de l'Univers

On pourrait considérer que notre comparaison entre l'Univers et un ballon n'est pas pertinente, parce-qu'il est possible de calculer l'équilibre entre les forces qui s'exercent à l'intérieur et à l'extérieur du ballon, alors que l'Univers, par définition, n'a pas d'extérieur... Evident, mon cher Watson! Mais qu'est-ce qui nous autorise à raisonner comme si la partie de l'Univers actuellement accessible à l'observation était une partie significative de l'ensemble?

Un astronome situé dans la nébuleuse du Crabe serait-il autorisé, à partir de l'observation de la dilatation d'une infime partie de cette nébuleuse dans son voisinage immédiat, d'en tirer des conclusions sur l'Univers entier? On sait que l'expansion de cette nébuleuse a débuté par l'explosion d'une supernova, qui a eu lieu en 1054, et qu'elle se poursuit encore aujourd'hui ; c'est la pression de radiation, dirigée du centre vers l'extérieur, qui a transmis l'énergie de l'explosion, de manière centrifuge ; cette force ayant , temporairement, dépassé de beaucoup la force gravitationnelle. Si l'astronome habitant dans cette nébuleuse s'imaginerait que celle-ci représente la totalité de l'Univers, alors il va estimer qu'elle n'a pas de centre, donc il va rejeter l'idée d'une pression de radiation centrifuge : dans

sa logique, la pression de radiation "doit" s'exercer de la même façon en tout point et dans toutes les directions, parce-que l'Univers "doit" être homogène et isotrope. Il pourrait d'ailleurs dire la même chose de la force gravitationnelle, et conclure (comme Newton) que ces forces gravitationnelles, dirigées dans toutes les directions, "doivent" s'annuler globalement. A moins qu'il choisisse de raisonner comme Einstein : la gravité courbe l'espace-temps, ce que la pression de radiation ne sait pas faire. Mais ceci n'explique pas pourquoi la nébuleuse est en expansion.

Nous voyons que la réflexion de cet astronome sur l'expansion de la nébuleuse va être doublement biaisée : par l'idée que la gravité n'est pas une force, et par le postulat d'homogénéité et d'isotropie, qui semble découler de manière "logique" (?) de l'idée que la partie de l'Univers que nous observons, c'est l'Univers entier.

Pensez-vous que la partie de l'Univers actuellement accessible à nos télescope représente à peu près l'Univers entier ? La moitié ? Un dixième ? Un millième ? Un milliardième ? Essayez de faire un petit calcul probabiliste, sans tricher (c'est-à-dire sans faire intervenir telle ou telle théorie hypothétique). Que l'Univers soit fini ou infini, vous allez trouver : 0%.

Si on considère la gravité comme une vraie force, alors le calcul de l'expansion et/ou de la contraction de l'Univers (ou plutôt de la région de l'Univers qui est à la portée de nos télescopes) doit faire intervenir tous les types de forces, et en particulier la pression de radiation, qui s'oppose naturellement à la gravité, et qui a vraisemblablement joué, dans un passé lointain, un rôle prépondérant dans l'équilibre (ou le déséquilibre) de la superstructure dans laquelle nous vivons. On peut imaginer qu'une rupture d'équilibre a entraîné un phénomène explosif, qu'on peut se représenter sur le modèle des supernovae. Equilibre, déséquilibre : deux mots simples qui mériteraient d'être réintégrés dans l'étude du cosmos, car la relativité générale les en a fait disparaître...

L'expansion de l'Univers (ou de la partie de l'Univers dans laquelle nous trouvons) évoque un phénomène explosif : serions-nous dans une superstructure (dont les frontières nous échappent encore), issue d'un cataclysme, à l'image de la nébuleuse du Crabe, mais à une échelle de distances et de temps considérablement supérieure ?

Dans ce type d'explosion, c'est l'équilibre entre la gravitation et la pression de radiation qui est brutalement rompu. La pression de radiation serait-elle le moteur de l'expansion dite "de l'Univers", donc la cause de la fuite des galaxies ?

Cette explication de la fuite des galaxies est si simple et si évidente qu'on doit se demander pourquoi elle ne s'est pas imposée dès l'origine, quand Hubble a établi empiriquement la loi de proportionnalité entre leur distance et leur vitesse de récession. La réponse, nous venons de l'entrevoir : c'est l'équation de la relativité générale qui a fermé la porte à cette direction de recherche. Et

pourtant, tout serait tellement plus simple et plus cohérent si on oubliait cette équation pour revenir aux principes fondamentaux de la physique, parmi lesquels les équilibres de forces...

Si nous considérons les galaxies comme des mobiles "normaux", respectant la relativité restreinte, alors tous les photons qui voyagent entre elles doivent naturellement accroître leurs rapidités relatives.

De manière infinitésimale, certes... Mais dans le passé la matière a certainement été beaucoup plus condensée et beaucoup plus chaude, et l'idée qu'il y ait eu autrefois une "ère du rayonnement" est admise par la majorité des cosmologistes. Et ce rayonnement n'aurait pas été à l'origine d'une pression de radiation très classique? Bizarre...

Dans l'univers tel que nous le voyons actuellement (ou dans la superstructure que nous nommons ainsi), la rapidité de récession des galaxies w est positive. La pression de radiation est très faible, et aurait pour effet une augmentation infinitésimale de w , à condition de l'emporter sur la gravitation. Dans le film passé à l'envers, l'univers (la superstructure) se contracte, et la rapidité de récession w est donc négative; la pression de radiation tend à produire une augmentation de w , donc une diminution de sa valeur absolue $|w|$. Dans ce film passé à l'envers, la gravitation joue le rôle d'accélérateur de la contraction, et la pression de radiation celui de frein. On doit donc se demander comment évolue cet équilibre (ou déséquilibre) entre les deux forces. On peut penser que l'effet de la gravitation augmente rapidement avec la densité, lui permettant de l'emporter définitivement... Mais on peut penser aussi qu'à partir d'une certaine densité l'état de la matière change et entraîne une augmentation considérable de la température et de la pression de radiation, capable soit d'arrêter la contraction, soit même de l'inverser. Dans le premier cas, on peut se représenter l'instant initial de l'expansion comme un phénomène explosif (une sorte de supernova). Dans le second, on pensera à la théorie du grand rebond, mise à l'honneur par les tenants de la gravitation quantique à boucles. Mais l'idée que, dans ce film passé à l'envers, toute la matière de l'univers converge de plus en plus vite vers un point mathématique, sans rencontrer de résistance, et y disparaisse instantanément et en totalité, sans laisser de trace, est une idée assez étrange, issue de l'équation de la relativité générale. Et dans le film passé à l'endroit, ce scénario correspond à ce qu'on appelle le big bang, au sens strict.

12 Conservation de l'énergie dans modèle de Friedmann

Passons maintenant à un autre problème bien connu, et souvent évoqué : lorsqu'un photon nous parvient d'une galaxie lointaine, il a subi un décalage

vers le rouge, en raison de l'expansion de l'Univers, donc il a perdu de l'énergie en chemin. Où est donc passée l'énergie perdue ? Certains physiciens disent : "elle a servi à pousser les murs", autrement dit à alimenter l'expansion de l'Univers. Ceci suggère que la pression de radiation pourrait contribuer à l'expansion de l'Univers. Cette explication peut être creusée en utilisant la mécanique newtonienne combinée à la relativité restreinte. Mais, pour la relativité générale, c'est un non-sens. La seule réponse cohérente à cette disparition d'énergie est celle-ci : "On n'a jamais dit que la relativité générale prévoyait la conservation de l'énergie !"

Dans le document sur les vitesses en relativité restreinte, section sur l'échange de photon entre deux particules en mouvement, nous avons vu pourquoi le bilan énergétique (quadrivectoriel) respecte la conservation telle qu'elle est formalisée par la relativité restreinte. La clé du calcul est la transformation de Lorentz. Dans le cas d'un photon voyageant entre deux galaxies très éloignées, affectées par une vitesse de récession liée à l'expansion de l'Univers, pourquoi ne pourrait-on pas faire un raisonnement identique, prouvant la conservation de l'énergie-impulsion ? En réalité, on peut très bien le faire, sauf si on a posé des postulats qui l'interdisent. En l'occurrence, les postulats problématiques sont ceux de Friedmann. Selon son interprétation, si deux galaxies sont comobiles, on ne peut pas dire qu'elles sont en mouvement l'une par rapport à l'autre, au sens habituel : c'est l'espace qui se dilate entre elles ; on ne passe pas du repère de l'une au repère de l'autre par la transformation de Lorentz, mais par une simple translation spatiale, puisqu'elles utilisent le même temps cosmique ; la longueur d'onde du rayonnement voyageant entre ces deux galaxies dépend uniquement de la dilatation de l'espace, et non de la vitesse des galaxies : elle augmente de manière objective, et son énergie diminue de manière tout aussi objective. Friedmann attribue au vide une sorte de réalité physique, celle d'un "éther". C'est là que se situe la contradiction avec la relativité restreinte, mais aussi avec la physique quantique, qui nous suggèrent que le vide n'est rien de plus que le support du champ, qui est de nature virtuelle. Pour la relativité restreinte, comme pour la physique quantique, le photon "ne sait pas" quelle est sa longueur d'onde, c'est la relation entre l'émetteur et le récepteur qui lui en attribue une, ou plutôt deux, puisque l'émetteur et le récepteur ont deux points de vue différents : si l'un d'eux attribue une fréquence ν au photon, l'autre lui attribue une fréquence ν' différente de ν (voir l'exemple de l'échange de photon entre deux particules), mais le vide ne lui en attribue aucune. Nous savons qu'en relativité restreinte la fréquence d'une onde dépend de l'observateur ; le cadre cosmologique choisi par Friedmann, Robertson et Walker, au contraire, attribue une fréquence absolue à chaque onde (fréquence par rapport aux repères comobiles locaux).

La conception du temps cosmique et de l'espace dans le modèle de Friedmann marque le retour de l'éther, qu'on croyait abandonné...

Mais au fait, notre concept de repères gravitationnellement immobiles ne

valide-t-il pas, lui aussi, le retour de l'éther, comme les repères comobiles de Friedmann ? Dans les deux cas, il y a des repères privilégiés, élus par le reste de l'Univers, mais dans le premier cas ils sont du domaine du virtuel, dans le second ils sont conçus comme un tissu élastique, matériel bien que vide. Dans notre conception, les vitesses relatives entre les galaxies sont de vraies vitesses, et leur composition se fait selon la relativité restreinte. Il n'y a pas de vraies et de fausses vitesses. Si on considère qu'à grande échelle le potentiel gravitationnel est identique partout dans l'Univers observable (ce qui annule la courbure), alors les échanges de photons entre galaxies doivent se faire exactement comme nous l'avons décrit dans le document sur les vitesses en relativité restreinte (section sur l'échange de photon entre particules en mouvement), et nous avons vu que ce processus respecte parfaitement la conservation de l'énergie, selon les règles de la relativité restreinte. Alors que l'espace au sens de Friedmann, qui nie la relativité restreinte, a le pouvoir d'engloutir sans retour l'énergie des photons qui le parcourent...

13 L'horizon dans le modèle de Friedmann

Un autre problème soulevé par le modèle 3 (modèle de Friedmann sans constante cosmologique) est celui de l'horizon. Nous avons vu qu'à l'instant t (compté à partir du Big Bang) le regard de l'observateur a accès à une sphère de rayon : $\frac{4}{9} \cdot \frac{c \cdot t}{\lambda}$, où $\lambda = \sqrt[3]{6 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho_0 \cdot a(t_0)}$. On dira que deux points comobiles sont déconnectés à l'instant t si leur distance est supérieure à $\frac{4}{9} \cdot \frac{c \cdot t}{\lambda}$. Si c'est le cas, alors ils n'ont jamais pu communiquer depuis l'origine de l'Univers : aucun photon émis par l'un n'a encore été reçu par l'autre, et réciproquement. Ils ne se connaissent pas. Si on remonte le temps vers le Big Bang, on s'aperçoit que tous les points étaient déconnectés à l'origine. Ils n'ont même pas eu le temps de s'entendre pour déclencher le Big Bang tous en même temps ! Les débuts de l'Univers ont dû être très chaotiques ! Pourtant, nous observons aujourd'hui une belle uniformité sur de très grandes distances. Comment expliquer, par exemple, que le rayonnement cosmologique fossile soit si uniforme, avec un degré de précision extraordinaire ? Dans le cadre fixé par la relativité générale, et par le modèle de Friedmann qui s'en inspire, on n'a pas trouvé d'autre explication que l'inflation : une expansion accélérée à une vitesse vertigineuse dans une phase précoce et très violente de l'histoire de l'Univers, qui lui aurait permis de s'uniformiser de manière presque instantanée. N'est-il pas plus simple d'admettre que le Big Bang, tel qu'il apparaît dans le modèle de Friedmann sans constante cosmologique, n'a jamais existé, et que l'Univers, dans un passé lointain, est passé par une phase très concentrée mais non ponctuelle, pendant laquelle ses différentes parties ont été étroitement connectées, non seulement par les lois de la physique classique, mais aussi par l'intrication quantique ? D'ailleurs l'existence d'un temps cosmique universel va aussi dans ce sens. Comme nous l'avons vu, c'est probablement par des échanges et interactions internes que les systèmes élaborent leur temps propre (le "temps de l'interaction"). S'il est vrai

que l'Univers dans son ensemble (ou la superstructure dans laquelle nous nous trouvons?) possède un temps propre, alors on peut en déduire qu'il se comporte comme un système, c'est-à-dire un ensemble interconnecté par un réseau d'interactions. Ces interactions sont sans doute affaiblies par l'expansion, mais dans le passé elles ont dû être suffisamment intenses et généralisées pour que l'ensemble puisse se comporter, aujourd'hui encore, comme un tout.

Enfin, on ne peut pas passer sous silence les problèmes posés par la notion même de Big Bang au sens strict (conçu comme le commencement du temps). En physique classique (macroscopique), le principe de causalité est orienté dans le temps. Il y a un sens de lecture de l'enchaînement des événements : c'est la flèche du temps. Le Big Bang n'entre pas dans ce cadre : on ne peut pas chercher les causes du Big Bang avant le Big Bang, parce-qu'il n'y avait rien avant. On est donc amené à étudier le Big Bang en l'approchant en sens inverse : du présent vers le passé. Autrement dit, on ne peut chercher que des justifications à posteriori. D'un point de vue logique, ce n'est pas un problème : la logique (au sens mathématique) établit des liens entre des faits (des "propositions") sans chercher à savoir comment ils se situent dans le temps ; on peut calculer aussi bien la probabilité des effets, connaissant les causes, que la probabilité des causes connaissant les effets. Mais en physique (macroscopique) c'est différent : en raison du principe de déterminisme, les causes précèdent les effets...

Il y a quelques années, on s'imaginait que la relativité générale décrivait bien l'évolution de l'Univers, mais butait sur des contradictions et des problèmes insolubles lorsqu'on cherchait à décrire le Big Bang ; on admettait généralement que seule la mécanique quantique pourrait un jour décrire cet instant précis. On distribuait les rôles ainsi : le macroscopique à la relativité générale, le microscopique à la mécanique quantique. Aujourd'hui, on a bien compris que la relativité générale ne peut pas expliquer la fuite des galaxies (à moins de l'expliquer par la constante cosmologique, qui est elle-même inexpliquée), et que le recours à la mécanique quantique est indispensable à tous les niveaux : du microscopique au macroscopique.

14 Modèle 4 (modèle de De Sitter homogénéisé)

Dans les modèles qui précèdent, la vitesse de récession v peut dépasser la vitesse de la lumière. Ceci est justifié par le fait que ce n'est pas une "vraie" vitesse, mais seulement un effet de la dilatation de l'espace. Dans notre approche de la métrique de Ni, nous avons admis aussi la notion de dilatation de l'espace, basée sur la nature quantique du vide ; mais ceci n'a jamais autorisé les vitesses à s'exonérer des lois de la relativité restreinte ! Toutes les vitesses sont en relation avec des phénomènes de dilatation de l'espace ou du temps, ou avec l'entraînement, et ceci à toutes les échelles, aussi bien dans notre monde terrestre que dans celui des galaxies lointaines ; pourquoi inventer une autre forme

de vitesse pour traiter de l'expansion de l'Univers ?

Pour bien intégrer les règles de la relativité restreinte dans les calculs, il est très pédagogique d'utiliser les rapidités plutôt que les vitesses, car elles ont le gros avantage d'être additives.

Considérons des galaxies G_0, G_1, G_2, G_3, G_4 , etc., alignées, telles que : $G_0G_1 = r_1$ (distance mesurée par G_0), $G_1G_2 = r_2$ (distance mesurée par G_1), $G_2G_3 = r_3$ (distance mesurée par G_2), $G_3G_4 = r_4$ (distance mesurée par G_3), etc. Nous admettrons que $G_0G_4 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$.

La vitesse de récession de G_1 par rapport à G_0 , mesurée par G_0 , est égale à v_1 ; la vitesse de récession de G_2 par rapport à G_1 , mesurée par G_1 , est égale à v_2 ; la vitesse de récession de G_3 par rapport à G_2 , mesurée par G_2 , est égale à v_3 ; la vitesse de récession de G_4 par rapport à G_3 , mesurée par G_3 , est égale à v_4 ; etc. Peut-on en déduire que la vitesse de récession de G_4 par rapport à G_0 , mesurée par G_0 , est égale à $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$? D'après la relativité restreinte, non : les vitesses ne se composent pas de cette façon ! Et, dans une telle situation (avec changement d'observateur de référence à chaque étape), il s'agit bien d'une composition des vitesses, et non d'une addition. Mais si on parle de la rapidité $w = c \cdot \text{Arctg} \frac{v}{c}$, alors la rapidité de G_4 par rapport à G_0 sera bien égale à $w_1 + w_2 + w_3 + w_4$. Donc il n'est pas du tout logique de parler d'une vitesse de fuite proportionnelle à la distance : selon la relativité restreinte, c'est la rapidité qui doit être proportionnelle à la distance ! Ceci est nécessaire, si on veut que l'Univers soit homogène (c'est-à-dire que le changement de repère faisant passer d'une galaxie comobile à une autre, par la transformation de Lorentz, donne une image de l'Univers globalement invariante).

Au lieu d'écrire : $\vec{v} = H \cdot \vec{r}$, écrivons :

$$\vec{w} = H \cdot \vec{r}.$$

C'est ce que nous appellerons la loi de Hubble homogénéisée. C'est cette loi que nous allons tester maintenant, en examinant ses conséquences.

Il est important de bien comprendre la signification de la variable r . C'est une distance obtenue par sommation de distances locales infinitésimales, évaluées par des observateurs locaux comobiles. Sa définition est adaptée au sujet traité : l'Univers en expansion ; elle est choisie de manière à éliminer toute distorsion qui serait due au choix d'un repère particulier, de même que le "temps cosmique" est défini de manière à coller au mieux avec la réalité observée de l'expansion. Par analogie, on pourrait parler de "distance cosmologique" ; nous préférons parler de "distance naturelle".

Dans ce modèle 4, c'est donc la rapidité de fuite, et non la vitesse de fuite, qui sera proportionnelle à la distance radiale r ("distance naturelle"). Nous

supposons que H est une constante, indépendante du lieu et du temps.

$$\frac{v}{c} = th \frac{w}{c} = th \frac{H.r}{c} ;$$

$$\frac{v}{c} = \frac{dr}{c.dt} = \frac{sh \frac{H.r}{c}}{ch \frac{H.r}{c}} ;$$

$$\frac{ch \frac{H.r}{c}}{sh \frac{H.r}{c}} \cdot \frac{dr}{c} = dt ;$$

$$\frac{ch \frac{H.r}{c} \cdot \frac{H.dr}{c}}{sh \frac{H.r}{c}} = H.dt ;$$

$$\frac{d \left(sh \frac{H.r}{c} \right)}{sh \frac{H.r}{c}} = H.dt ;$$

$$d \left[\text{Log} \left(sh \frac{H.r}{c} \right) \right] = H.dt ;$$

$$\text{Log} \left(sh \frac{H.r}{c} \right) - \text{Log} \left(sh \frac{H.r_0}{c} \right) = H.(t - t_0).$$

Nous avons noté r_0 la distance à un instant t_0 choisi arbitrairement.

$$\frac{sh \frac{H.r}{c}}{sh \frac{H.r_0}{c}} = e^{H.(t-t_0)}.$$

On peut écrire aussi :

$$\frac{sh \frac{H.r}{c}}{e^{H.t}} = \frac{sh \frac{H.r_0}{c}}{e^{H.t_0}}.$$

En posant $\frac{sh \frac{H.r_0}{c}}{e^{H.t_0}} = K$:

$$sh \frac{H.r}{c} = K.e^{H.t} ;$$

$$\frac{H.r}{c} = \text{Argsh} (K.e^{H.t}).$$

Cette formule a des points communs avec celle du modèle 2 (modèle de De Sitter usuel) ; par exemple, quand t tend vers $-\infty$, r tend toujours vers 0, et quand t tend vers $+\infty$, r tend toujours vers $+\infty$.

Mais il y a une différence importante : quand r tend vers l'infini, v ne tend pas vers l'infini, mais vers c . Il en résulte qu'il n'y a plus d'horizon : tout l'Univers est, en principe, accessible à l'observation. Tous les problèmes liés à l'horizon disparaissent !

D'autre part, puisque $\frac{v}{c} = th \frac{H.r}{c}$, on déduit que $\frac{dv}{c} = d\left(th \frac{H.r}{c}\right) = \frac{H.dr}{ch^2 \frac{H.r}{c}}$, donc : $\frac{dv}{dr} = \frac{H}{ch^2 \frac{H.r}{c}}$. Posons $H' = \frac{dv}{dr}$; ce coefficient diminue à très grande distance (donc dans un passé lointain) : il n'est plus égal à la constante H , mais à $\frac{H}{ch^2 \frac{H.r}{c}}$; on peut avoir l'illusion qu'il est plus élevé aujourd'hui qu'il ne l'était autrefois. Attention : dans ce modèle 4, le coefficient que nous appelons "constante de Hubble" est $H = \frac{dv}{dr}$; il est constant aussi bien dans le temps que dans l'espace. Nous notons $H' = \frac{dv}{dr}$ le coefficient qui est usuellement appelé "coefficient de Hubble" ; mais, dans ce modèle, il n'est constant ni dans le temps, ni dans l'espace.

Ce modèle 4 n'entre pas dans le cadre défini par Friedmann : la définition que nous avons donnée de la constante H n'est pas la même, donc son utilisation est différente. De plus, le facteur d'échelle $a(t)$, qui est fondamental dans le travail de Friedmann, n'a plus de sens ici.

Il y a une autre chose qu'il faut préciser. Considérons, par exemple, trois galaxies éloignées, formant un triangle (A , B , C). La rapidité de récession de B par rapport à A est $\vec{w}_{AB} = H.\vec{AB}$, celle de C par rapport à B est $\vec{w}_{BC} = H.\vec{BC}$, et celle de A par rapport à C est $\vec{w}_{CA} = H.\vec{CA}$. Ces trois rapidités forment un triangle dans l'"espace des rapidités" (voir à ce sujet le document sur les vitesses en relativité restreinte). Nous savons que cet espace est hyperbolique, donc les relations entre les côtés et les angles du triangle en question suivent les règles de la géométrie hyperbolique. Plus généralement, les propriétés des rapidités se transfèrent automatiquement aux distances, puisqu'il y a proportionnalité entre les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{CA}$ (qui sont situés dans l'espace usuel des vecteurs purement spatiaux) et les rapidités $\vec{w}_{AB}$, $\vec{w}_{BC}$ et $\vec{w}_{CA}$, qui appartiennent à l'"espace des rapidités". Cette proportionnalité, par le biais du coefficient H , établit une correspondance structurelle entre ces deux espaces. Il s'ensuit que ce modèle 4 n'a de sens que dans un espace hyperbolique. La formule $\vec{w} = H.\vec{r}$ n'est pas adaptée à un espace euclidien !

Ceci semble réduire l'intérêt du calcul que nous venons de proposer... On est en droit de se demander pourquoi l'espace devrait adopter une géométrie semblable à celle de l'espace des rapidités. Mais c'est peut-être l'expansion qui doit s'adapter à la structure de l'espace ? Nous allons détailler la réponse, en faisant des changements de variables, qui permettent de projeter ce modèle dans un espace euclidien.

Et surtout n'oublions pas que nous raisonnons ici sur un modèle mathématique abstrait, et que la nature n'est pas tenue de se conformer scrupuleusement à nos modèles : elle peut s'en rapprocher plus ou moins, selon les contraintes auxquelles elle est soumise.

15 Projection dans un espace euclidien

Nous savons que dans l'espace des rapidités le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{w}{c}$ est égal à $2\pi \cdot sh \frac{w}{c}$, donc supérieur à $2\pi \cdot \frac{w}{c}$, ce qui est la signature d'un espace hyperbolique. Ce sujet est développé dans le document "Les vitesses en relativité restreinte". Choisissons un point O comme origine. A tout point M de cet espace est associée une rapidité $\vec{w}$ telle que $OM = \frac{w}{c}$. Le point M est défini par sa distance par rapport à O (c'est $OM = \frac{w}{c}$) et par la direction de la rapidité $\vec{w}$ (qu'on peut exprimer par un angle polaire, ou azimuth, si on raisonne en deux dimensions, ou par deux angles, azimuth et ascension droite, si on raisonne en trois dimensions). Nous pouvons alors établir une bijection entre cet espace hyperbolique et un espace euclidien (à deux ou trois dimensions) de la façon suivante : à tout point M tel que $OM = \frac{w}{c}$ on associe M' tel que $O'M' = \frac{w'}{c} = sh \frac{w}{c}$; on conserve l'azimut et l'ascension droite. Le périmètre des cercles de centre O sera conservé, ce qui signifie qu'un cercle de rayon $\frac{w'}{c} = sh \frac{w}{c}$ aura pour périmètre $2\pi \cdot sh \frac{w}{c} = 2\pi \cdot \frac{w'}{c}$, c'est-à-dire le rayon multiplié par 2π . C'est la signature d'un espace euclidien. Remarquons que la transformation décrite ici ressemble un peu à une homothétie; mais ce n'en est pas une : les distances radiales par rapport à O sont modifiées, mais pas les périmètres des cercles de centre O . Ceci annule la courbure, ce qui nous impose de changer d'espace. De plus, on peut démontrer que le choix de l'origine O est sans importance. Retenons que le fait de remplacer $\frac{w}{c}$ par $\frac{w'}{c} = sh \frac{w}{c}$ suffit à nous faire passer d'un espace des rapidités hyperbolique à un espace euclidien. Nous dirons que $\vec{w}$ est une rapidité usuelle, et que $\vec{w}'$ est sa forme rectifiée, adaptée à un espace euclidien.

Nous allons donc poser :

$$\frac{w'}{c} = sh \frac{w}{c} = sh \frac{H \cdot r}{c}.$$

De plus, nous définissons une distance radiale r' par :

$$r' = \frac{w'}{H},$$

ce qui entraîne :

$$\frac{H \cdot r'}{c} = \frac{w'}{c} = sh \frac{w}{c} = sh \frac{H \cdot r}{c}.$$

Nous dirons que w' et r' sont les conjugués euclidiens de w et r , qui, eux, n'ont de sens que dans un espace hyperbolique.

En différenciant ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dw'}{c} &= d \left(sh \frac{w}{c} \right) = ch \frac{w}{c} \cdot \frac{dw}{c} ; \\ \frac{H \cdot dr'}{c} &= d \left(sh \frac{H \cdot r}{c} \right) = ch \frac{H \cdot r}{c} \cdot \frac{H \cdot dr}{c} ; \end{aligned}$$

$$dr' = ch \frac{H.r}{c} . dr = ch \frac{w}{c} . dr.$$

La vitesse de fuite d'une galaxie est donnée par :

$$\frac{v}{c} = \frac{dr}{c.dt} = th \frac{w}{c} = th \frac{H.r}{c} = \frac{sh \frac{H.r}{c}}{ch \frac{H.r}{c}}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{c.dt} &= \frac{sh \frac{H.r}{c}}{ch \frac{H.r}{c}} ; \\ c.dt &= \frac{ch \frac{H.r}{c} . dr}{sh \frac{H.r}{c}} = \frac{\frac{c}{H} . d \left(sh \frac{H.r}{c} \right)}{sh \frac{H.r}{c}} ; \\ H.dt &= d \left[\text{Log} \left(sh \frac{H.r}{c} \right) \right] ; \\ H.(t - t_0) &= \text{Log} \left(sh \frac{H.r}{c} \right) - \text{Log} \left(sh \frac{H.r_0}{c} \right) = \text{Log} \left(\frac{sh \frac{H.r}{c}}{sh \frac{H.r_0}{c}} \right) ; \\ \frac{sh \frac{H.r}{c}}{sh \frac{H.r_0}{c}} &= e^{H.(t-t_0)} = \frac{e^{H.t}}{e^{H.t_0}}. \end{aligned}$$

On reconnaît un calcul qui a déjà été fait. Mais ici apparaît le lien avec les conjugués euclidiens. Puisque $sh \frac{H.r}{c} = \frac{H.r'}{c}$ et $sh \frac{H.r_0}{c} = \frac{H.r'_0}{c}$, on obtient :

$$\frac{sh \frac{H.r}{c}}{sh \frac{H.r_0}{c}} = \frac{\frac{H.r'}{c}}{\frac{H.r'_0}{c}} = \frac{r'}{r'_0} = \frac{e^{H.t}}{e^{H.t_0}}.$$

La formule $\frac{r'}{r'_0} = \frac{e^{H.t}}{e^{H.t_0}}$ correspond exactement au modèle de De Sitter sous sa forme standard (modèle 2), transposée dans l'espace euclidien conjugué.

Appelons v' la vitesse de récession dans l'espace euclidien conjugué : $v' = \frac{dr'}{dt}$.

Puisque $\frac{r'}{r'_0} = \frac{e^{H.t}}{e^{H.t_0}}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} r' &= \frac{r'_0}{e^{H.t_0}} . e^{H.t} ; \\ v' &= \frac{dr'}{dt} = \frac{r'_0}{e^{H.t_0}} . H . e^{H.t} = H . r'. \end{aligned}$$

Cette égalité : $v' = H . r'$, est précisément la loi de Hubble sous sa forme la plus simple, qui est à l'origine du modèle de De Sitter standard.

On voit donc qu'on peut passer du modèle de De Sitter homogénéisé (valable seulement dans un Univers hyperbolique) au modèle de De Sitter standard

(valable dans un Univers euclidien) en remplaçant r par r' et w par w' .

Comme nous avons vu que $w' = H.r'$ et que $v' = H.r'$, nous pouvons conclure que w' et v' s'identifient. Donc w' n'est par une rapidité, mais une vitesse radiale dans l'espace euclidien conjugué.

Cet espace euclidien conjugué est finalement d'un grand intérêt, car il permet de reformuler les rapports entre les modèles de De Sitter standard et homogénéisé. Dans cet espace conjugué, on retrouve presque le modèle de De Sitter standard, mais avec des vitesses radiales (y compris celle de la lumière) multipliées par le facteur $ch\frac{w}{c} = ch\frac{H.r}{c}$. Ce recalibrage des vitesses radiales, à grande distance, équivaut à un recalibrage des distances radiales, dans un passé lointain. Or ce recalibrage des distances radiales peut être considéré comme une évidence, puisque, dans un Univers en expansion, ces distances étaient nécessairement plus petites dans le passé. Cette correction (mathématiquement facile) fait disparaître le problème de l'horizon rencontré dans le modèle 2.

Pour résumer les idées qui sont à la base de la réflexion qui a été développée ici, disons que le modèle de De Sitter homogénéisé est un modèle dans lequel la rapidité de récession w d'une galaxie est proportionnelle à sa distance r (distance "naturelle", ou "réelle") : $\frac{w}{c} = \frac{H.r}{c}$. On se rend compte que le fait que l'espace des rapidités soit hyperbolique entraîne que l'espace usuel (fondé sur les distances) doit l'être aussi. En posant $\frac{w'}{c} = sh\frac{w}{c}$ et $\frac{H.r'}{c} = sh\frac{H.r}{c}$, nous transposons la réalité (courbe) dans un espace fictif euclidien, dans lequel nous retrouvons le modèle de De Sitter usuel. On pourrait considérer cette transformation comme une "projection" : penser par exemple à la projection de Mercator, qui projette la surface de la Terre, qui est courbe, sur une surface plane. Mais, alors qu'on peut faire différentes projections de Mercator selon la région géographique qu'on veut mettre en évidence, la projection dans l'espace euclidien fictif est indépendante du choix de la galaxie de référence. Ceci ne doit pas nous faire oublier que l'un de ces espaces est réel, tandis que l'autre est fictif.

Rapprochons ceci de la formule donnant la métrique d'un Univers de Friedmann hyperbolique :

$$ds^2 = c^2.dt^2 - a^2(t). \left(\frac{dR^2}{1+R^2} + R^2.d\theta^2 + R^2.\sin^2\theta.d\phi^2 \right).$$

Nous avons désigné la distance radiale, au sens de Friedmann, par la lettre R , pour éviter des confusions.

Posons : $R = shR'$. On aura alors :

$$dR = chR'.dR' ;$$

$$\frac{dR^2}{1+R^2} = \frac{ch^2R'.dR'^2}{1+sh^2R'} = \frac{ch^2R'.dR'^2}{ch^2R'} = dR'^2.$$

La formule devient :

$$ds^2 = c^2 . dt^2 - a^2(t) . (dR'^2 + sh^2 R' . d\theta^2 + sh^2 R' . \sin^2 \theta . d\phi^2) .$$

Dans l'espace hyperbolique des rapidités, nous avons vu que le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{w}{c}$ est égal à $2.\pi.sh\frac{w}{c}$; les rapidités sont calibrées par rapport à une rapidité de référence (ici : c). De même, dans un espace hyperbolique quelconque, le périmètre d'un cercle de rayon R' sera égal à $2.\pi.shR'$, à condition que R' soit préalablement calibré, c'est-à-dire rapporté à une longueur de référence, caractéristique de la courbure de cet espace. Supposons que R' soit une distance radiale préalablement calibrée, dans un espace hyperbolique. Une longueur élémentaire dl sera alors donnée par :

$$dl^2 = dR'^2 + sh^2 R' . d\theta^2 + sh^2 R' . \sin^2 \theta . d\phi^2 .$$

Dans le modèle de De Sitter homogénéisé, la distance radiale calibrée est : $\frac{H.r}{c}$; ce qui conduit à :

$$dl^2 = \frac{H^2 . dr^2}{c^2} + sh^2 \frac{H.r}{c} . d\theta^2 + sh^2 \frac{H.r}{c} . \sin^2 \theta . d\phi^2 .$$

On aura compris que, dans cet espace hyperbolique, les longueurs élémentaires transverses (perpendiculaires à la ligne de visée) sont plus grandes que ce qu'on attendrait dans un espace euclidien, tout simplement parce-que le périmètre des cercles est plus grand, le coefficient étant $\frac{shR'}{R'} = \frac{sh\frac{H.r}{c}}{\frac{H.r}{c}}$.

Si nous voulons rapprocher notre raisonnement de la formule de Friedmann hyperbolique, il faut procéder à l'identification suivante :

$$R' = \frac{H.r}{c} .$$

Ceci signifie que la distance radiale R de l'espace hyperbolique de Friedmann, une fois projetée sur l'espace euclidien fictif, donne R' , qui s'identifie avec la distance radiale calibrée $\frac{H.r}{c}$ du modèle de De Sitter homogénéisé.

Il y a donc une inversion : dans le modèle de Friedmann, la distance radiale que nous avons notée R est supposée réelle, alors que dans le modèle proposé ici c'est une distance calibrée, mesurée dans l'espace euclidien fictif.

Quant à la modélisation de l'expansion grâce au facteur d'échelle $a(t)$, nous voyons qu'elle s'applique, selon la formule de Friedmann, à ce que nous considérons comme une distance réelle, alors que dans le modèle de De Sitter homogénéisé elle ne peut s'appliquer que dans l'espace euclidien fictif projeté.

On doit bien comprendre que l'emploi du facteur d'échelle repose sur la notion d'homothétie, qui suppose une forme de linéarité : quand on multiplie les distances par un même facteur, les vitesses sont aussi multipliées par ce même

facteur. Dans le modèle de De Sitter homogénéisé, cette linéarité n'existe pas, parce-que l'addition des rapidités n'est pas linéaire. Mais on retrouve la linéarité par projection sur l'espace euclidien fictif. Le facteur d'échelle ne peut s'utiliser que dans cet espace fictif.

Il y a donc un désaccord fondamental entre le modèle de De Sitter homogénéisé et les équations de Friedmann : c'est la définition qui est faite du facteur d'échelle, et le rôle qui lui est attribué par Friedmann, qui introduisent nécessairement une linéarité qui conduit à des vitesses de récession supérieures à celle de la lumière, et ceci dans l'espace supposé réel ; dans le modèle de De Sitter homogénéisé, ceci n'a de sens que dans l'espace euclidien fictif conjugué.

Il serait possible de construire d'autres modèles à partir de ces idées : il suffirait de choisir une fonction $a(t)$ et d'en déduire les vitesses de récession dans l'espace euclidien fictif, puis de transposer les résultats dans l'espace réel (hyperbolique), en se rappelant que $\frac{H.r}{c} = sh\left(\frac{H.r'}{c}\right)$, ou $\frac{H.r'}{c} = Argsh\left(\frac{H.r}{c}\right)$. Si le coefficient de Hubble $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ varie dans le temps, la courbure de l'espace varie aussi.

Mais retenons l'essentiel : il est possible, mathématiquement, de construire des modèles d'Univers en expansion cohérents, respectant d'une certaine façon les postulats d'Einstein, mais n'entrant pas dans le formalisme de Friedmann.

16 L'horizon dans le modèle de De Sitter homogénéisé

Nous allons maintenant étudier un problème de l'horizon ; mais nous éviterons de le faire en passant par le modèle conjugué euclidien, car le remplacement de r par r' modifie la vitesse de la lumière : si elle est constante et égale à c dans le modèle hyperbolique, elle ne l'est pas dans son conjugué euclidien.

Nous allons donc étudier (dans le modèle hyperbolique) le temps de parcours d'un photon parti à l'instant t_1 (distance r_1) et se dirigeant vers l'observateur. On note x la distance du photon par rapport à l'observateur à l'instant t .

Nous ne pouvons pas utiliser le facteur d'échelle $a(t)$ (il n'y en a pas dans ce modèle) ; nous allons combiner la vitesse de récession v avec la vitesse $-c$ du photon. C'est une simple addition de vitesses (de sens contraires) et non une composition, car il n'y a pas de changement de repère. La rapidité de récession d'un point comobile situé à la distance x est notée w .

$$dx = (v - c).dt = \left(th\frac{w}{c} - 1\right).c.dt.$$

Comme $w = H.x$, on peut écrire :

$$dw = H.dx = H. \left(th \frac{w}{c} - 1 \right) .c.dt ;$$

$$H.dt = \frac{\frac{dw}{c}}{th \frac{w}{c} - 1} = \frac{ch \frac{w}{c}}{sh \frac{w}{c} - ch \frac{w}{c}} \cdot \frac{dw}{c} = \frac{\frac{e^{\frac{w}{c}} + e^{-\frac{w}{c}}}{2}}{\frac{e^{\frac{w}{c}} - e^{-\frac{w}{c}}}{2} - \frac{e^{\frac{w}{c}} + e^{-\frac{w}{c}}}{2}} \cdot \frac{dw}{c} ;$$

$$H.dt = \frac{\frac{e^{\frac{w}{c}} + e^{-\frac{w}{c}}}{2}}{-e^{-\frac{w}{c}}} \cdot \frac{dw}{c} = -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{2.w}{c}} + 1 \right) \cdot \frac{dw}{c} = -\frac{1}{4} \cdot d \left(e^{\frac{2.w}{c}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{dw}{c}.$$

Intégrons de t_1 (distance : r_1 , rapidité de récession : w_1) à t_2 (distance : $r_2 = 0$, rapidité de récession : $w_2 = 0$) :

$$H.(t_2 - t_1) = -\frac{1}{4} \cdot \left(1 - e^{\frac{2.w_1}{c}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{0 - w_1}{c} ;$$

$$H.\Delta t = \frac{1}{4} \cdot \left(e^{\frac{2.w_1}{c}} - 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{w_1}{c}.$$

On aura compris que w_1 est la rapidité de récession au point d'émission du photon ; Δt est le temps de parcours du photon de l'émission à la réception par l'observateur.

Pour exprimer Δt en fonction de r_1 , nous remplaçons w_1 par $H.r_1$:

$$\Delta t = \frac{e^{\frac{2.H.r_1}{c}} - 1}{4.H} + \frac{r_1}{2.c}.$$

Quelle que soit la distance d'émission du photon, celui-ci pourra toujours parvenir à l'observateur en un temps fini ; il n'y a pas d'horizon.

Par rapport au modèle de De Sitter standard, le modèle homogénéisé a le grand avantage de résoudre l'épineux problème de l'horizon.

On peut aussi exprimer Δt en fonction de r'_1 ; on sait que $r' = \frac{c}{H} . sh \frac{H.r}{c}$, donc $\frac{w}{c} = \frac{H.r}{c} = Argsh \left(\frac{H.r'}{c} \right)$; nous avons vu aussi que $sh \frac{w}{c} = \frac{H.r'}{c}$ et que $ch \frac{w}{c} = \sqrt{1 + \left(\frac{H.r'}{c} \right)^2}$, ce qui entraîne : $e^{\frac{w}{c}} = sh \frac{w}{c} + ch \frac{w}{c} = \frac{H.r'}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{H.r'}{c} \right)^2}$. Reprenons la formule donnant Δt en fonction de w_1 et faisons les substitutions ; il vient :

$$H.\Delta t = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{H.r'_1}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{H.r'_1}{c} \right)^2} \right]^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot Argsh \left(\frac{H.r'_1}{c} \right).$$

Il est particulièrement instructif de reprendre ce calcul dans l'espace conjugué. Partons de la même égalité :

$$dx = (v - c).dt = \left(th \frac{w}{c} - 1 \right) .c.dt = \frac{sh \frac{w}{c} - ch \frac{w}{c}}{ch \frac{w}{c}} .c.dt.$$

Comme $r' = \frac{c}{H}.sh\frac{H.r}{c}$, on a :

$$dr' = d\left(\frac{c}{H}.sh\frac{H.r}{c}\right) = \frac{c}{H}.ch\frac{H.r}{c}.\frac{H.dr}{c} = ch\frac{H.r}{c}.dr = ch\frac{w}{c}.dr.$$

Nous appliquons cette formule à x ; nous obtenons : $dx = \frac{dx'}{ch\frac{w}{c}}$; donc :

$$\frac{dx'}{ch\frac{w}{c}} = dx = (v - c).dt = \left(th\frac{w}{c} - 1\right).c.dt = \frac{sh\frac{w}{c} - ch\frac{w}{c}}{ch\frac{w}{c}}.c.dt ;$$

$$dx' = \left(c.sh\frac{w}{c} - c.ch\frac{w}{c}\right).dt.$$

Rappelons-nous que $sh\frac{w}{c} = \frac{v'}{c}$. Posons : $c' = c.ch\frac{w}{c}$. L'égalité ci-dessus devient :

$$dx' = (v' - c').dt.$$

Cette égalité est l'analogue, dans l'espace euclidien conjugué, de l'égalité $dx = (v - c).dt$ que nous avons utilisée dans l'espace hyperbolique. Mais la vitesse de la lumière c est devenue : $c' = c.ch\frac{w}{c}$.

On voit donc que, dans l'espace euclidien conjugué, le déplacement du photon peut être interprété comme résultant de la vitesse de récession v' due à l'expansion de l'Univers (au point considéré) et de sa vitesse propre : $-c' = -c.ch\frac{w}{c}$. La vitesse de la lumière, selon la direction radiale, va donc dépendre de la distance. Ceci n'est pas étonnant, puisque le changement de variable : $r \rightarrow r' = \frac{c}{H}.sh\frac{H.r}{c}$ a pour conséquence immédiate que $dr' = \frac{c}{H}.ch\frac{H.r}{c}.\frac{H.dr}{c} = ch\frac{w}{c}.dr$. Notre changement de variable a pour résultat de multiplier les distances radiales infinitésimales par le coefficient $ch\frac{w}{c}$, ce qui se répercute sur toutes les vitesses radiales apparentes, y compris la vitesse de la lumière. On remarque que, pour l'observateur, la vitesse de la lumière (selon la direction radiale) semble plus importante à grande distance; ce qui pourrait s'interpréter en disant que la lumière se déplaçait plus vite autrefois. Mais ceci ne concerne que les vitesses radiales. Il est plus juste de dire que les distances radiales (infinitésimales) étaient plus petites autrefois.

On peut terminer ce calcul : on va retrouver le résultat démontré précédemment.

Cette remarque permet de mieux interpréter l'égalité : $\frac{v'}{c'} = sh\frac{w}{c}$. Il est clair que lorsque w tend vers l'infini, v' tend aussi vers l'infini, alors que v tend vers c . On pourrait s'étonner que le comportement de la vitesse de récession v' (dans l'espace euclidien conjugué) soit aussi différent de celui de v (dans l'espace hyperbolique). Mais il faut remarquer que :

$$\frac{v'}{c'} = \frac{v'}{c.ch\frac{w}{c}} = \frac{sh\frac{w}{c}}{ch\frac{w}{c}} = th\frac{w}{c} = \frac{v}{c} ;$$

$$\frac{v'}{c'} = \frac{v}{c} = th \frac{w}{c}.$$

Les vitesses $v' = c.sh \frac{w}{c} = c.sh \frac{H.r}{c}$ et $c' = c.ch \frac{w}{c} = c.ch \frac{H.r}{c}$ semblent tendre vers l'infini quand r tend vers l'infini, mais c'est une pure illusion due au changement de variable qui a été effectué. Leur quotient reste inchangé.

Remarquons encore que :

$$\frac{v}{c} = th \frac{w}{c} = \frac{sh \frac{w}{c}}{ch \frac{w}{c}} = \frac{sh \frac{w}{c}}{\sqrt{1 + sh^2 \frac{w}{c}}} = \frac{\frac{v'}{c}}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}.$$

On vérifie une nouvelle fois que $v \rightarrow c$ quand $v' \rightarrow \infty$. On peut considérer v' comme une vitesse fictive.

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{v'}{c}}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v'}{c \sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{v'}{c.ch \frac{w}{c}} = \frac{v'}{c'}.$$

17 Redshift usuel, redshift homogénéisé et redshift de Friedmann

D'une manière générale, le redshift (décalage vers le rouge) dû à l'effet Doppler est donné par la formule suivante (dans laquelle λ_e est la longueur d'onde d'un rayonnement à l'émission, et λ_r sa longueur d'onde à la réception) :

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} - 1 ; \\ z + 1 &= \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = \sqrt{\frac{1 + th \frac{w}{c}}{1 - th \frac{w}{c}}} = \sqrt{\frac{ch \frac{w}{c} + sh \frac{w}{c}}{ch \frac{w}{c} - sh \frac{w}{c}}} ; \\ z + 1 &= \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{\frac{e^{\frac{w}{c}} + e^{-\frac{w}{c}}}{2} + \frac{e^{\frac{w}{c}} - e^{-\frac{w}{c}}}{2}}{\frac{e^{\frac{w}{c}} + e^{-\frac{w}{c}}}{2} - \frac{e^{\frac{w}{c}} - e^{-\frac{w}{c}}}{2}}} = \sqrt{\frac{e^{\frac{w}{c}}}{e^{-\frac{w}{c}}}} = \sqrt{e^{\frac{2w}{c}}} = e^{\frac{w}{c}}. \end{aligned}$$

On trouvera la démonstration dans le document sur les vitesses en relativité restreinte (section sur l'effet Doppler relativiste).

Si on travaille avec la loi de Hubble usuelle : $v = H.r$, en supposant que le redshift soit dû à l'effet Doppler, alors on utilisera les formules suivantes :

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{H.r}{c}}{1 - \frac{H.r}{c}}} ;$$

$$(1+z)^2 \cdot \left(1 - \frac{H.r}{c}\right) = 1 + \frac{H.r}{c} ;$$

$$\frac{H.r}{c} \cdot [(1+z)^2 + 1] = (1+z)^2 - 1 ;$$

$$1) \quad \frac{H.r}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}.$$

Cette première formule relie le redshift z , supposé dû à l'effet Doppler, à la distance r des galaxies, en admettant la loi de Hubble sous sa forme la plus simple : $v = H.r$, avec H constante.

Si on adopte maintenant la loi de Hubble homogénéisée : $w = H.r$, alors on utilisera le redshift homogénéisé :

$$1+z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = e^{\frac{w}{c}} = e^{\frac{H.r}{c}} ;$$

$$2) \quad \frac{H.r}{c} = \text{Log}(1+z).$$

Cette deuxième formule, bien différente de la première, la remplace dès lors qu'on opte pour le redshift homogénéisé.

Enfin, il existe une autre conception du redshift des galaxies : c'est celle de Friedmann, pour qui la modification de la longueur d'onde est un effet de la dilatation de l'espace pendant le trajet du rayon lumineux. Nous avons fait le calcul dans la section sur le modèle de De Sitter (c'est-à-dire le modèle qui respecte la loi de Hubble $v = H.r$, avec H constante aussi bien dans le temps que dans l'espace). Nous avons obtenu :

$$1+z = \frac{1}{1 - \frac{H.r}{c}} ;$$

$$1 - \frac{H.r}{c} = \frac{1}{1+z} ;$$

$$\frac{H.r}{c} = 1 - \frac{1}{1+z} = \frac{1+z-1}{1+z} ;$$

$$3) \quad \frac{H.r}{c} = \frac{z}{1+z}.$$

Cette troisième formule est l'adaptation des idées de Friedmann au modèle de De Sitter.

18 L'énergie sombre existe-t-elle ?

Rappelons l'origine de l'idée d'une "énergie sombre" : les supernovæ de type Ia sont considérées comme des chandelles standards, car leur luminosité absolue (au pic de sa courbe) est à peu près constante ; la mesure de leur luminosité apparente permet donc d'évaluer leur distance, et par suite, celle des galaxies dans lesquelles elles apparaissent. Par ailleurs, la distance de ces galaxies peut être évaluée par leur décalage vers le rouge (redshift), en s'appuyant sur la loi de Hubble (modèle de Friedmann sans constante cosmologique), qui dit que la vitesse de récession des galaxies est proportionnelle à leur distance. Mais lorsqu'on compare les distances galactiques évaluées par ces deux méthodes, on constate une différence, petite mais systématique.

Pour résoudre ce problème, les théoriciens ont pensé qu'il fallait corriger la loi de Hubble : la vitesse de récession des galaxies ne semble pas proportionnelle à leur distance, donc la constante de Hubble H a été remise en question.

Pour être plus précis, disons qu'à cette époque la théorie dominante était celle de Friedmann sans constante cosmologique. Cette théorie prévoyait un ralentissement de l'expansion, dû aux forces gravitationnelles (ou plutôt à la courbure produite par la matière). Les observations des supernovæ de type Ia ont montré que ce modèle devait être corrigé. Mais comment ?

La première idée a été que le ralentissement dû à la gravité était masqué par une accélération d'origine inconnue ; ce phénomène a été vulgarisé comme une "accélération de l'expansion de l'Univers". Mais cette "accélération" ne signifie pas nécessairement que H varie, puisque le modèle de de Sitter, ou le modèle de Friedmann avec constante cosmologique, prévoient une évolution exponentielle du facteur d'échelle, à H constant.

Pour interpréter correctement les observations, les équations de Friedmann ont été réécrites de manière standardisée, de la façon suivante :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8.\pi.G.\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}.$$

On pose $\rho_c = \frac{3.H^2}{8.\pi.G}$. Il vient :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_c} - \frac{k}{a^2.H^2} + \frac{\Lambda}{3.H^2}\right).$$

On pose :

$$\Omega_m = \frac{\rho}{\rho_c},$$

$$\Omega_k = \frac{k}{a^2.H^2},$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3.H^2}.$$

On a alors :

$$H^2 = H^2 \cdot (\Omega_m - \Omega_k + \Omega_\Lambda),$$

$$\Omega_m - \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1.$$

Si l'espace est plat, on a $k = 0$, donc $\Omega_k = 0$, et $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

L'intérêt de ce formalisme est de séparer le plus clairement possible les rôles de la matière, y compris la matière noire (Ω_m), de la courbure (Ω_k) et de la constante cosmologique (Ω_Λ) dans l'évolution de l'expansion de l'Univers au cours du temps.

Il est utilisé par les modèles Λ CDM (qui s'appuient sur la constante cosmologique Λ et sur l'hypothèse de la matière noire froide : Cold Dark Matter), très en vogue aujourd'hui.

On pourrait ajouter encore Ω_p , qui modélise le rôle des rayonnements dans l'expansion de l'Univers ; considéré comme négligeable par rapport à Ω_m dans la phase actuelle de l'évolution de l'Univers, il aurait joué un rôle peu après le Big Bang supposé.

Les astronomes mesurent le plus précisément possible la vitesse de récession des galaxies (évaluée d'après leur décalage spectral) en fonction de leur distance (évaluée au moyen de plusieurs techniques différentes, dont celle dont nous avons parlé, qui utilise les supernovæ Ia), ce qui leur permet de tracer la courbe $v = f(r)$, ou $z = f(r)$.

D'autre part, les théoriciens, en jouant sur les valeurs possibles de Ω_m , Ω_k et Ω_Λ , cherchent à obtenir par le calcul une courbe théorique aussi proche que possible de la courbe observée.

Actuellement (2024), on estime qu'un bon accord est obtenu en prenant $\Omega_m \approx 0,3$, $\Omega_k = 0$ (espace plat) et $\Omega_\Lambda = 0,7$.

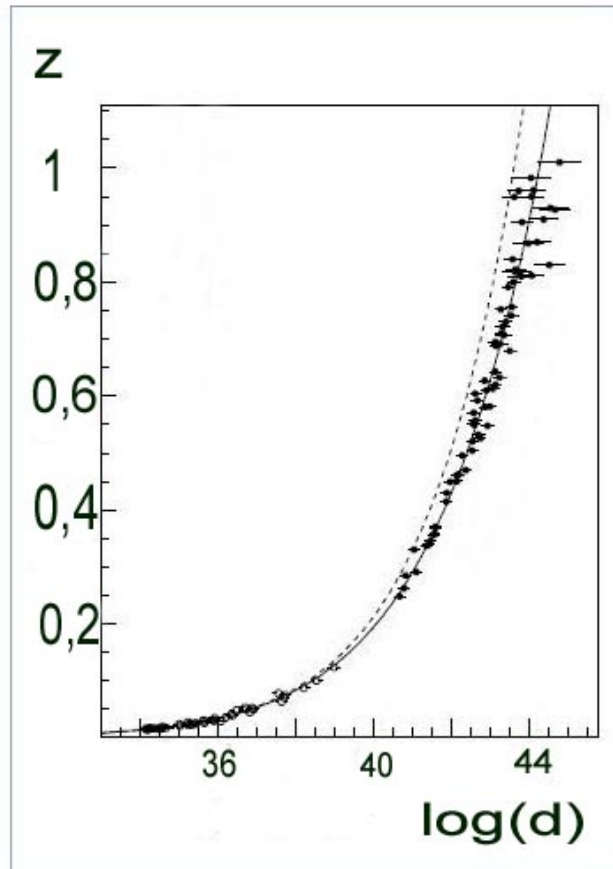
Mais cette conclusion est encore très fragile, car, pour une raison inconnue, la mesure de H_0 donne des résultats différents selon la méthode utilisée : c'est ce qu'on appelle la "tension de Hubble"... peut-être en voie d'être résolue ?

D'autre part, des études récentes, non encore confirmées, laissent penser qu'il pourrait y avoir une très légère décroissance de H avec le temps. À suivre...

Beaucoup de théoriciens considèrent actuellement que la constante cosmologique est indispensable à la compréhension de l'expansion de l'Univers.

Un grand problème est de comprendre sa signification. Certains y voient une manifestation de la gravitation, prévue (mais sous-estimée) par Einstein dans le cadre de la relativité générale; d'autres l'interprètent comme une "énergie sombre", à pouvoir répulsif, qui représenterait 74% de l'énergie présente dans l'Univers... ce qui signifie que les trois-quarts de l'énergie de l'Univers seraient de nature complètement inconnue! D'autres encore font appel à des concepts nouveaux, comme la quintessence...

Le graphique qui suit est à l'origine des questions sur l'énergie sombre (ou, si on préfère, sur la constante cosmologique). Il concerne les supernovæ Ia; le logarithme de la "distance de luminosité", établie d'après la luminosité des supernovæ mesurée par les astronomes, figure en abscisse, et le redshift (également mesuré) en ordonnée.



La courbe en pointillé est celle qui a été calculée à partir du modèle 3 de Friedmann sans constante cosmologique. Le but de l'étude était de mettre en évidence

une déviation éventuelle par rapport à cette loi ; en particulier, une décroissance de la vitesse d'expansion avec le temps, due à la gravité, pouvait être attendue, conformément au modèle. La courbe en trait plein, qui se base sur les observations, ne coïncide pas avec la courbe en pointillé. Cet écart systématique semble indiquer, à première vue, que le coefficient H augmente avec le temps, et que la vitesse d'expansion augmente, alors qu'on s'attendait à un ralentissement... En réalité, cette accélération apparente n'en est pas vraiment une : la courbe en trait plein se rapproche beaucoup des prévisions du modèle de de Sitter, et l'illusion d'une accélération provient essentiellement de la nature exponentielle de l'expansion dans ce modèle. Mais nous avons dit que cette expansion exponentielle supposait un moteur travaillant en chaque point de l'espace et à chaque instant, modélisable mathématiquement par la constante cosmologique Λ , et physiquement, peut-être, par un effet quantique inconnu (brisure de symétrie?), ou par une hypothétique énergie sombre. Par conséquent, cette accélération ne suppose pas une augmentation de H avec le temps : dans le modèle de de Sitter, H est constant aussi bien dans l'espace que dans le temps.

On peut donc dire que la figure ci-dessus montre que les observations tendent à confirmer, au moins de manière approximative, le modèle de de Sitter (ou le rôle de Λ) par rapport aux modèles 1 ou 3 (modèle de Friedmann sans constante cosmologique).

Dans cette figure la courbe en pointillé a été calculée en interprétant le redshift selon les idées de Friedmann ; mais quelle courbe aurait-on obtenu si on l'avait interprété comme un redshift homogénéisé ?

Le redshift z_1 de Friedmann vérifie :

$$\frac{H.r}{c} = \frac{z_1}{1 + z_1}.$$

Le redshift homogénéisé z_2 vérifie :

$$1 + z_2 = e^{\frac{H.r}{c}}.$$

Ces formules ont été calculées dans la section sur le redshift ; elles supposent que H est une constante. Si on suppose que la distance r des galaxies a été correctement évaluée, alors le rapprochement de ces deux formules permet d'écrire :

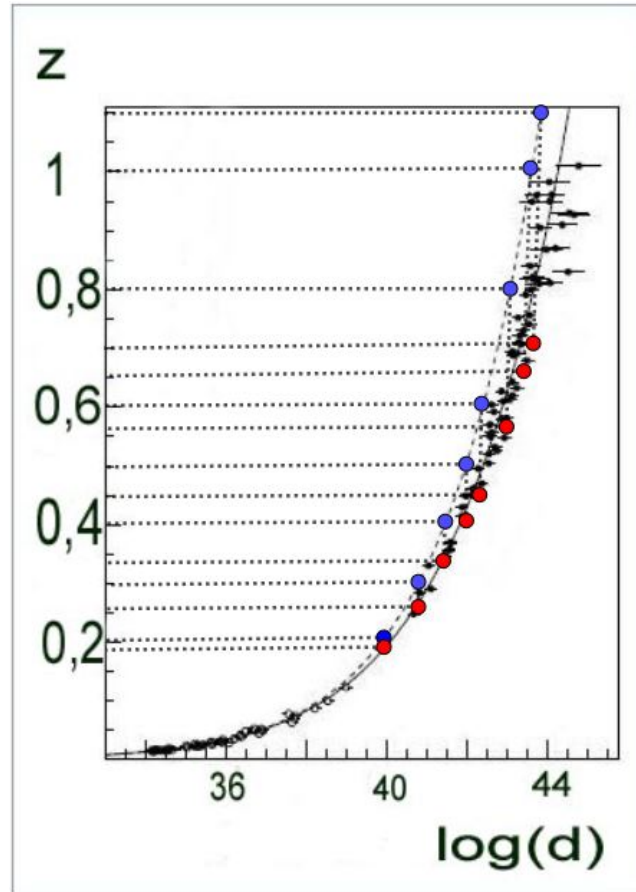
$$1 + z_2 = e^{\frac{z_1}{1+z_1}}.$$

Ceci va nous permettre de "corriger" la figure précédente, en remplaçant le redshift de De Sitter par le redshift homogénéisé.

Nous avons choisi huit points correspondant aux redshifts (de Friedmann) suivants : $z_1 = 0,2$, $z_1 = 0,3$, $z_1 = 0,4$, $z_1 = 0,5$, $z_1 = 0,6$, $z_1 = 0,8$, $z_1 = 1$, $z_1 = 1,1$ (points bleus) ; puis nous avons utilisé la relation ci-dessus pour calculer les redshifts homogénéisés correspondants ; nous avons obtenu : $z_2 \approx 0,18$,

$z_2 \approx 0,26$, $z_2 \approx 0,33$, $z_2 \approx 0,40$, $z_2 \approx 0,45$, $z_2 \approx 0,56$, $z_2 \approx 0,65$, $z_2 \approx 0,69$; ensuite nous avons placé les points "corrigés" (en rouge) en conservant la valeur de r (ou de $\log(d)$), supposée correcte.

Rappelons que cette correction se base sur l'idée que la rapidité de récession est proportionnelle à la distance, et que le redshift des galaxies est un banal redshift décrit par l'effet Doppler relativiste. Une correction bien naturelle... mais qui nous fait sortir du cadre des modèles de Friedmann, ou Λ CDM ! Car ces modèles s'appuient sur l'idée d'un redshift cosmologique totalement différent du redshift usuel, classique ou relativiste, ce dernier étant basé sur l'effet Doppler, tandis que celui de Friedmann est basé sur le facteur d'échelle et sur le temps cosmique - des idées qui ont des conséquences bien étonnantes dont nous avons déjà parlé, et dont nous allons reparler...



Curieusement, les points corrigés tombent très près de la courbe réellement observée !

Ceci semble bien indiquer qu'une modélisation de l'expansion de l'Univers basée sur les rapidités, ne faisant intervenir ni décélération due à la gravité, ni accélération due à la constante cosmologique ou à une quelconque brisure de symétrie quantique, se rapproche des observations d'une manière assez remarquable...

19 Et si on sortait du cadre ?

On voit que les modèles les plus sophistiqués utilisés actuellement, les modèles Λ CDM, se basent sur la métrique de Friedmann, améliorée par Robertson et Walker, dans laquelle est insérée une dynamique compatible avec la relativité générale, conformément aux calculs d'Einstein et surtout de Friedmann.

On peut regretter que ce cadre conceptuel soit entaché de certains partis-pris.

Le premier parti-pris est de considérer que la partie observable de l'Univers est une partie significative de l'ensemble. On peut remarquer qu'Einstein et Friedmann, l'un comme l'autre et indépendamment, ont étudié en priorité la possibilité d'un Univers hypersphérique, spatialement fini et à courbure positive. On a même cru longtemps que la mesure de la densité de matière allait permettre de calculer le rayon de cette hypersphère. Aujourd'hui ce mirage s'est dissipé, mais l'idée que la partie de l'Univers accessible à l'observation, grâce à nos instruments actuels, ne soit qu'une infime partie d'un ensemble beaucoup plus vaste, a du mal à s'imposer. C'est évidemment la relativité générale qui a, dès le début, fait prospérer une conception du monde issu d'un Big Bang et spatialement fini, qui, à notre époque, doit être considérée comme une idée reçue.

Le deuxième parti-pris consiste à dire que, puisque la matière attire la matière, il doit exister tout naturellement une force tendant à la contraction de l'Univers. On présente souvent ce raisonnement comme une évidence, et on oublie de dire que c'est la relativité générale, avec sa courbure absolue et cumulative, qui a ancré cette idée dans les esprits. Dans cette théorie, l'idée que l'Univers soit homogène (peuplé de galaxies avec une densité uniforme, sans limite) et l'idée qu'il possède une courbure régulière sont complémentaires. Au contraire, dans une théorie basée sur un potentiel relatif (comme la gravitation newtonienne, ou la gravitation relativiste basée sur la métrique de Ni), un Univers peuplé de matière répartie uniformément, sans limite, possède tout naturellement un potentiel identique en tout point, à gradient nul, donc incapable de générer la moindre force. Les forces résultent des inhomogénéités. Dans ces théories, l'Univers dans son ensemble ne peut pas être à la fois globalement homogène et globalement courbé. Mais une partie de l'Univers (une "superstructure") peut bien sûr être homogène et/ou courbée.

Le troisième parti-pris est de considérer que, sous l'action de la gravité, l'Univers aurait dû s'effondrer sur lui-même depuis longtemps ; et s'il ne l'a pas fait, c'est qu'il existe "quelque chose" qui l'en empêche, "quelque chose" qu'Einstein a modélisé sous la forme de la constante cosmologique Λ , et que d'autres appellent l'"énergie sombre" ou l'"énergie du vide", ou encore la "quintessence".

En résumé, il nous semble que l'idée de baser la cosmologie sur la relativité générale et sur les équations de Friedmann est un pari bien hasardeux !

20 L'âge de l'Univers

Selon le modèle standard, l'âge de l'Univers serait de l'ordre de 13,8 milliards d'années.

Mais, depuis longtemps déjà, les astronomes observent des astres problématiques, ou des structures, dont la formation, selon les théories actuelles, devrait nécessiter plus de 13,8 milliards d'années. Il faut dire que ces théories sont encore peu précises, et peuvent être aménagées en introduisant, par exemple, une grande quantité de "matière noire", qui aurait pu accélérer considérablement leur formation. Voir à ce sujet ce que nous avons dit de cette hypothétique matière noire, dans le document dédié.

Depuis la mise en service du télescope spatial James Webb (lancé fin 2021), les cas problématiques se multiplient, de sorte qu'on songe à modifier le modèle standard. Le principal problème est qu'on trouve de plus en plus de galaxies très éloignées (donc très jeunes, si on prend pour référence l'âge supposé de l'Univers) ayant une structure semblable à celle des galaxies adultes (celles de notre "proche banlieue"), ce qui n'était pas du tout attendu. Ce sont surtout les "trous noirs géants" (noirs ou gris...) qui semblent s'être formés en un temps déraisonnablement court.

Nous avons proposé une solution dans le document sur la matière noire.

21 Le paradoxe d'Olbers dans le modèle 4

Amusons-nous à examiner l'éclairage apporté par la formule $w = H.l$ (formule de Hubble homogénéisée) au paradoxe d'Olbers : pourquoi le ciel est-il noir la nuit ? Imaginons un Univers hyperbolique (infini), peuplé de galaxies réparties uniformément, de manière homogène. Nous avons vu que la lumière émise par une galaxie située à la distance r , ayant pour redshift z_2 , est affectée,

à la réception, d'un "coefficient de dilution" δ :

$$\delta = 4.\pi.\frac{c^2}{H^2}.sh^2\left(\frac{H.r}{c}\right).(1+z)^2.$$

De plus, nous savons que $1+z = e^{\frac{w}{c}} = e^{\frac{H.r}{c}}$; donc :

$$\delta = 4.\pi.\frac{c^2}{H^2}.sh^2\left(\frac{H.r}{c}\right).e^{\frac{2.H.r}{c}}.$$

Si l'Univers est homogène, la puissance (quantité d'énergie lumineuse émise par unité de temps), pour un volume dV , peut s'écrire : $K.dV$. Compte-tenu de la nature hyperbolique de l'espace, le volume compris entre deux sphères de rayons r et $r + dr$ est :

$$dV = 4.\pi.\frac{c^2}{H^2}.sh^2\left(\frac{H.r}{c}\right).dr,$$

et l'énergie émise par les galaxies qui s'y trouvent, par unité de temps, est :

$$dE_e = K.4.\pi.\frac{c^2}{H^2}.sh^2\left(\frac{H.r}{c}\right).dr.$$

L'énergie que nous en recevons, par unité de temps et par unité d'aire, s'obtient en divisant par δ :

$$dE_r = \frac{K.4.\pi.\frac{c^2}{H^2}.sh^2\left(\frac{H.r}{c}\right).dr}{4.\pi.\frac{c^2}{H^2}.sh^2\left(\frac{H.r}{c}\right).e^{\frac{2.H.r}{c}}} = K.e^{-\frac{2.H.r}{c}}.dr = -K.\frac{c}{H}.d\left(e^{-\frac{2.H.r}{c}}\right).$$

L'énergie reçue des galaxies situées à une distance comprise entre r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$), par unité de temps, est donc :

$$E(r_1, r_2) = -K.\frac{c}{H}. \left(e^{-\frac{2.H.r_2}{c}} - e^{-\frac{2.H.r_1}{c}}\right) = K.\frac{c}{H}. \left(e^{-\frac{2.H.r_1}{c}} - e^{-\frac{2.H.r_2}{c}}\right).$$

Faisons tendre r_1 vers 0 :

$$E(0, r_2) = K.\frac{c}{H}. \left(1 - e^{-\frac{2.H.r_2}{c}}\right).$$

Faisons tendre r_2 vers l'infini :

$$E(0, +\infty) = K.\frac{c}{H}.$$

La luminosité du ciel est donc bornée, et ceci en raison de l'expansion de l'Univers. Cette luminosité est directement proportionnelle à la quantité d'énergie lumineuse émise par unité de volume et par unité de temps, et inversement proportionnelle à la constante de Hubble.