Gravitation et critère de Schild

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, mars 2008)

Table des matières

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

01) Gravitation relativiste : introduction

2 Introduction

Après la publication de la théorie de la relativité restreinte par Albert Einstein, il est apparu de manière évidente que l'électromagnétisme de Maxwell était parfaitement compatible avec cette nouvelle théorie ; mais la gravitation de Newton ne l'était pas.

Einstein s'est alors fixé un objectif très ambitieux : modifier la théorie de Newton pour la rendre compatible avec la relativité restreinte, tout en introduisant une vitesse limite des interactions.

La solution qu'il a proposée, en 1916, après une dizaine d'années de travail, est la relativité générale.

Il a atteint ses objectifs : toutes les prédictions de la nouvelle théorie, dans le système solaire, ont été confirmées, et l'étude des pulsars binaires a permis de pousser la précision encore beaucoup plus loin : la déflexion de la lumière par le Soleil (le double de celle prévue par la théorie de Newton) est bien établie, la précession du périhélie (de Mercure d'abord, puis des autres planètes, et des pulsars binaires) est maintenant bien comprise, l'effet Shapiro a été mesuré avec une très grande précision (lors d'une occultation de Mercure par le Soleil, puis par l'étude des pulsars binaires) ; le retard des horloges dans un champ gravitationnel (effet Einstein) est pris en compte dans la technologie du GPS. Hors du système solaire, les mirages gravitationnels sont fréquemment observés, les trous noirs sont traqués et des "candidats" de plus en plus nombreux ont été repérés (même si leur nature exacte soulève des questions), et sont activement étudiés ; les ondes gravitationnelles n'avaient pas encore été détectées directement lorsque j'ai commencé à écrire ces lignes (en 2008), mais la première observation a été publiée en février 2016.

Cependant, beaucoup de physiciens estiment que la relativité générale n'est pas une théorie définitive. Ils font observer, bien sûr, que la célèbre équation d'Einstein (ou équation des champs) n'a jamais été démontrée ; d'autre part, quatre reproches principaux sont régulièrement formulés :
- les idées développées par Einstein sont incompatibles avec celles de la mécanique quantique : on estime souvent qu'à l'échelle des atomes et des particules élémentaires, des modifications seront nécessaires pour permettre à la relativité générale de s'intégrer dans le contexte quantique ;
- l'apparition dans les équations de singularités et d'infinis apparemment irréductibles est souvent considérée comme un défaut à corriger d'urgence ;
- l'étude de la rotation des galaxies fait apparaître des phénomènes inattendus, qu'on n'arrive pas à expliquer dans le cadre de cette théorie, à moins d'imaginer la présence d'une grande quantité de matière noire ; présence qui n'est pas en accord avec certaines observations (en particulier avec la loi empirique de Tully-Fischer) ;
- enfin, la nécessité de faire appel à des phénomènes tels que l'"inflation" et l'"énergie sombre" pour modéliser l'expansion de l'univers a marginalisé le rôle de la relativité générale en cosmologie.

Pour ces raisons, entre autres, de nombreuses théories concurrentes ont été développées. Beaucoup d'entre elles ont été éliminées, parce-que leurs prédictions s'écartent des observations ; d'autres sont encore en course.

Le but du présent travail était, à l'origine, d'élaborer une présentation simplifiée et pédagogique de la relativité générale, basée sur des notions physiques simples et concrètes (issues du "critère de Schild") et accessibles à tous.

Cependant, j'ai constaté très vite que les équations qui sortent spontanément de cette approche ne sont pas nécessairement équivalentes à celles de la relativité générale ! Elles sont pourtant en parfait accord avec les observations, dans le domaine des champs faibles : en effet, les applications au système solaire conduisent aux mêmes conclusions ; elles expliquent bien, comme nous le verrons, le comportement des pulsars binaires. Mais dès qu'on est en présence de champs forts (au voisinage des trous noirs par exemple), ces équations ne confirment plus du tout celles de la relativité générale. Elles convergent davantage vers la seconde théorie de Ni (1972), que vers celle d'Einstein.

J'ai donc été conduit, par la force des choses, à redéfinir mon projet : plutôt que de présenter la relativité générale d'Einstein comme la seule théorie possible, j'ai préféré adopter une position beaucoup plus ouverte : c'est une possibilité parmi d'autres...

Actuellement, les physiciens estiment, en majorité, que les grands succès de la relativité générale prouvent que c'est une théorie valide, mais tous sont conscients qu'elle devra être modifiée, au moins "à la marge" (dans le domaine des particules élémentaires ?) pour être rendue compatible avec la physique quantique. Nombreux sont ceux qui estiment que la gravitation devra être unifiée aux autres forces fondamentales (électromagnétisme, interaction faible, interaction forte), en faisant intervenir, peut-être, une particule-vecteur : le graviton. Ont-ils raison ? En tout cas, cette direction de recherche n'est pas vraiment compatible avec les idées d'Einstein...

Mon opinion personnelle est que la relativité générale est une remarquable construction mathématique, mais qu'elle n'est pas suffisamment ancrée dans la réalité matérielle. En particulier, les "expériences de pensée" d'Einstein ne constituent pas un socle assez solide pour servir de base à une théorie de la gravitation. Heureusement les observations astronomiques se sont accumulées et permettent aujourd'hui une discussion plus argumentée. Mais l'espace-temps courbe d'Einstein, issu des travaux mathématiques de Gauss ou de Riemann, reste difficile à connecter avec le vide quantique de Casimir ou la théorie quantique des champs (la théorie la plus performante jamais conçue par des scientifiques)...

Comme on va le voir, des équations élémentaires basées sur un raisonnement simpliste permettent de retrouver sans difficulté la plupart des résultats qu'on attribue souvent à la relativité générale, concernant aussi bien le système solaire que les systèmes doubles, car les pulsars binaires permettent d'aller beaucoup plus loin dans les tests gravitationnels. C'est en particulier sur les trous noirs que des interprétations divergentes vont apparaître, un sujet sur lequel les astronomes apportent régulièrement des éléments nouveaux.

3 Approche préliminaire

Attention : cette approche préliminaire est à la fois essentielle (elle contient les équations qui sont à la base de ce travail) et pleine de pièges : elle devra être réinterprétée et corrigée à la lumière du critère de Schild, sans quoi elle nous conduirait à des absurdités. On s'en rendra compte en lisant la section "Mise au point".

A partir d'ici, on pourra imaginer un mobile ponctuel (une "planète") de masse m, tournant autour d'un corps central immobile (le "Soleil"), également ponctuel, de masse M ; on supposera m négligeable par rapport à M ; le mouvement se faisant dans un plan, on se limitera à deux dimensions spatiales (auxquelles il faut ajouter, bien sûr, une dimension temporelle) : on travaillera donc dans un espace-temps à trois dimensions. Le fait que le Soleil soit immobile nous permettra de raisonner sur un champ gravitationnel statique, ce qui nous dispensera, au moins dans un premier temps, de faire intervenir sa vitesse de propagation.

Dans la théorie de Newton, trois formules jouent un rôle central : la première (appelée loi de la gravitation universelle) permet d'exprimer la force qui s'exerce entre deux corps massifs, la seconde exprime la conservation de l'énergie, la troisième la conservation du moment cinétique. Ces trois formules ne sont pas indépendantes : historiquement, la seconde et la troisième ont été démontrées à l'aide de la première, qui joue le rôle de pilier de la gravitation newtonienne. Nous examinerons ses conséquences, pour voir si elles sont compatibles avec la relativité restreinte.

Selon la loi de la gravitation universelle, la planète subit une force attractive dirigée vers le Soleil, proportionnelle à m et à M, et inversement proportionnelle au carré de la distance (ou du rayon vecteur) r :

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u},$$

où G est la constante de la gravitation, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé du Soleil vers la planète.

Nous noterons $\vec{v}$ la vitesse, et $\vec{w}$ la rapidité du mobile considéré (la planète). Comme l'accélération $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$ s'obtient en divisant $\vec{F}$ par m, on peut écrire :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}.$$

Il s'agit bien, ici, de $\vec{\Gamma}$ ($\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$) et non de $\vec{\gamma}$ ($\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$) !

Si vous désirez plus d'informations sur la différence entre vitesse et rapidité, et sur l'origine de la formule $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$, vous pouvez vous reporter au document : Les vitesses en Relativité restreinte, et plus particulièrement à la fin de la section intitulée "Quelques mots sur la mécanique relativiste".

Ce point est de la plus haute importance : il faut comprendre pourquoi nous utilisons la rapidité et non la vitesse, sans quoi on passerait à côté de l'une des raisons d'être de ce travail.

Pour éviter toute confusion, on pourra dire que $\vec{\Gamma}$ est une pseudo-accélération et $\vec{F}$ est une pseudo-force.

Remarquons bien que l'introduction de la notion de rapidité n'est pas nécessaire à notre raisonnement : tous les calculs peuvent se faire avec des vitesses. Mais les rapidités permettent de simplifier ces calculs de manière appréciable, à condition de ne pas être rebuté par les fonctions hyperboliques. Si on préfère les vitesses, on se rappellera que $ch\frac{w}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, que $sh\frac{w}{c} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, et que $\frac{v}{c} = \frac{sh\frac{w}{c}}{ch\frac{w}{c}} = th\frac{w}{c}$.

Rappelons brièvement quelques formules essentielles (en nous limitant à une dimention spatiale) ; en relativité restreinte, on a (en notant m la masse maupertuisienne d'un mobile, m_0 sa masse au repos, v sa vitesse dans un référentiel donné, w sa rapidité, p son impulsion, E son énergie) :

$$\begin{cases} m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0\ ch\frac{w}{c}\ ; \\ \\ p = m\ v = m_0\ c\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0\ c\ sh\frac{w}{c}\ ; \\ \\ E = m\ c^2 = \frac{m_0\ c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0\ c^2\ ch\frac{w}{c}. \end{cases}$$

La force étant définie, comme en mécanique classique, par : $F = \frac{dp}{dt}$, on a :

$F = \frac{dp}{dt} = m_0\ c\ \frac{d}{dt}\left(sh\frac{w}{c}\right) = m_0\ c\ ch\frac{w}{c}\ \frac{dw}{c\ dt} = m_0\ ch\frac{w}{c}\ \frac{dw}{dt} = m\ \ \frac{dw}{dt}$.

Plus généralement :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m.\frac{d\vec{w}}{dt}.$$

Si le vecteur $\vec{w}$ fait un angle α avec $\vec{u}$ (vecteur unitaire dirigé du Soleil vers la planète), on peut écrire (en notant w le module de $\vec{w}$) :

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{GM}{r^2}.cos\alpha.$$

Toutes ces formules sont valables en relativité restreinte ; nous verrons un peu plus loin comment elles s'adaptent au contexte gravitationnel.

Le problème qui va se poser, c'est que l'égalité $\frac{d\vec{p}}{dt} = m.\frac{d\vec{w}}{dt}$ ne sera pas nécessairement assurée dans un contexte gravitationnel ; on est donc dans l'obligation de choisir une définition de la force : soit $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (c'est la définition "officielle", qui est adoptée unanimement), soit $\vec{F} = m.\frac{d\vec{w}}{dt}$: dans ce cas, nous parlons de pseudo-force. C'est cette entité qui nous intéresse plus particulièrement, à cause de son rôle central en relativité restreinte.

Voici donc notre choix initial sur lequel s'appuie tout le travail qui va suivre : nous resterons le plus près possible de la gravitation newtonienne, tant que la nécessité de prendre des distances ne se fera pas sentir, et nous conserverons sa pierre angulaire (la loi de la gravitation universelle), à savoir une (pseudo-)force d'attraction proportionnelle à la masse de chacun des deux corps, et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Mais toutes les conséquences de cette loi (à commencer par la conservation de l'énergie) seront reformulées dans un cadre relativiste.

Dans la théorie de Newton, l'énergie potentielle (gravitationnelle) d'un mobile est liée au travail de la force gravitationnelle : $dE_p = -\vec{F}.\vec{dl}$ (où E_p désigne l'énergie potentielle, et $\vec{dl}$ un déplacement élémentaire). Le potentiel gravitationnel s'obtient en divisant l'énergie gravitationnelle par la masse du mobile, et l'accélération s'obtient en divisant la force par cette même masse ; donc, en divisant les deux membres de l'égalité précédente par m, nous obtenons :

$$d\Phi = -\vec{\Gamma}.\vec{dl}.$$

On pourrait donc dire que le potentiel est lié au "travail" du vecteur $\vec{\Gamma}$. Comme $\vec{\Gamma} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$, on a :

$$d\Phi = -\vec{\Gamma}.\vec{dl} = \frac{GM}{r^2}\vec{u}.\vec{dl} = \frac{GM}{r^2}.dr = -GM.d\left(\frac{1}{r}\right).$$

En intégrant, nous obtenons les formules classiques :

$$\Phi = -\frac{GM}{r}, \text{ et } E_p = m\Phi = -\frac{GMm}{r}.$$

Remarquons bien le double rôle du vecteur $\vec{\Gamma} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$:
- d'une part, il modifie la rapidité du mobile : $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$;

- d'autre part il modifie le potentiel gravitationnel : $d\Phi = -\vec{\Gamma}.\vec{dl}$.
Pour Newton, ces deux rôles n'en font qu'un : ce sont deux aspects d'un même phénomène, lié à la notion de force, qui a une place centrale dans sa théorie. Mais nous serons amenés (disons-le tout de suite) à dissocier ces deux rôles. Nous en reparlerons.

La conservation de l'énergie, toujours dans la théorie de Newton, s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + m\Phi$$

où $\frac{1}{2}mv^2$ représente l'énergie cinétique de la planète, $-\frac{GmM}{r}$ son énergie potentielle, et $\Phi = -\frac{GM}{r}$ le potentiel gravitationnel.

Cette formule doit être profondément remaniée pour être cohérente avec la relativité restreinte. Nous allons reprendre sa démonstration au point de départ, c'est-à-dire à partir de la loi de la gravitation universelle.

Nous allons dériver $ch\frac{w}{c}$ par rapport à t. Nous notons α l'angle formé par le vecteur vitesse $\vec{v}$ avec le rayon vecteur $\vec{u}$; l'égalité $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$ devient donc (sous forme scalaire) : $\frac{dw}{dt} = \Gamma.cos\alpha = -\frac{GM}{r^2}.cos\alpha$.

$$\frac{d}{dt}\left(ch\frac{w}{c}\right) = sh\frac{w}{c}.\frac{dw}{cdt} = \frac{v}{c}.ch\frac{w}{c}.\frac{\Gamma}{c}.cos\alpha = \frac{v}{c}.ch\frac{w}{c}.\frac{-GM}{cr^2}.cos\alpha \ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(ch\frac{w}{c}\right) = ch\frac{w}{c}.\frac{-GM}{c^2r^2}.v.cos\alpha = ch\frac{w}{c}.\frac{-GM}{c^2r^2}.\frac{dr}{dt}.$$

Posons : $k = \frac{GM}{c^2}$. On a donc : $\frac{k}{r} = \frac{GM}{rc^2} = -\frac{\Phi}{c^2}$. Ce nombre k dépend de G et c (constantes), ainsi que de M, que nous supposerons (provisoirement) fixé. On a alors :

$$\frac{d}{dt}\left(ch\frac{w}{c}\right) = ch\frac{w}{c}.\frac{-k}{r^2}.\frac{dr}{dt} \ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(ch\frac{w}{c}\right) = ch\frac{w}{c}.\frac{d\left(\frac{k}{r}\right)}{dt} \ ;$$

$$\frac{d\left(ch\frac{w}{c}\right)}{ch\frac{w}{c}} - d\left(\frac{k}{r}\right) = 0 \ ;$$

$$d\left(Log\ ch\frac{w}{c}\right) + d\left(Log\ e^{-\frac{k}{r}}\right) = 0 \ ;$$

$$Log\left(ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{k}{r}}\right) = constante \ ;$$

$$ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{k}{r}} = constante, \text{ ou, si on préfère :}$$

$$ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} = constante.$$

En l'absence de champ gravitationnel, l'énergie du mobile est donnée par la formule : $E = m_0 c^2 ch\frac{w}{c}$; dans le champ gravitationnel, la formule devient :

$$E = m_0.c^2.ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{k}{r}} = m_0.c^2.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.$$

Cette formule va jouer un rôle fondamental ; pour cette raison, nous conseillons à nos lecteurs de relire et d'analyser sa démonstration. Elle peut être discutée ; d'ailleurs, nous la discuterons plus loin, lorsque nous aurons tous les éléments pour le faire.

Il est clair que cette formule est équivalente à la précédente (qui exprime l'énergie en relativité restreinte) quand r tend vers l'infini ; mais, à la différence de cette dernière, elle inclut l'énergie potentielle (négative) de la planète ; elle est adaptée au contexte gravitationnel.

Dans la suite, nous utiliserons souvent l'"énergie réduite" $\overline{E}$, définie par :

$$\overline{E} = \frac{E}{m_0.c^2} = ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{k}{r}} = ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.$$

Lorsqu'une planète se déplace sur son orbite, son énergie réduite se conserve. Si un autre planète, de masse différente, se déplaçait sur la même orbite, elle n'aurait pas la même énergie E, mais elle aurait la même énergie réduite $\overline{E}$. On peut donc dire qu'à toute trajectoire orbitale (géodésique) est associée une valeur unique de $\overline{E}$.

Notre but va être de déterminer jusqu'où ces formules peuvent nous mener. Nous allons voir qu'elle nous permettent de retrouver un grand nombre de résultats bien connus, et confirmés par les observations, concernant plus particulièrement le système solaire. Mais il n'est pas question de leur attribuer un pouvoir illimité : si on désire les appliquer à des conditions "exotiques" (qu'on ne rencontre pas dans le système solaire), il faudra les analyser, les interpréter, et éventuellement les corriger, pour les rendre extrapolables à ces situations extrêmes. Mais en attendant, conservons-les telles qu'elles sont, et voyons ce qu'elles contiennent.

Posons : $E_{loc} = m_0.c^2.ch\frac{w}{c}$; c'est l'énergie locale, qui ne prend pas en compte l'énergie potentielle. Elle est liée à l'énergie réelle E (qui est constante) par l'égalité : $E_{loc} = E.e^{\frac{k}{r}}$. On a donc : $E_{loc}.e^{-\frac{k}{r}} = constante$. En l'absence de champ gravitationnel (ou lorsque r tend vers l'infini), l'énergie locale se confond avec l'énergie réelle ; mais quand r tend vers 0, E_{loc} tend vers l'infini (donc la rapidité w aussi), alors que E reste constante.

Une question qu'on peut légitimement se poser est la suivante : la relativité restreinte fait la distinction entre la masse au repos m_0 et la masse maupertuisienne $m = m_0.ch\frac{w}{c} = \frac{E_{loc}}{c^2}$. Dans tout ce qui précède, c'est la masse maupertuisienne m que nous avons utilisée : nous avons écrit la loi de Newton sous la forme $\vec{F} = -\frac{G.m.M}{r^2}.\vec{u}$, et non $\vec{F} = -\frac{G.m_0.M_0}{r^2}.\vec{u}$. Est-ce justifié ? En fait, il n'est pas urgent de répondre à cette question : nous allons étudier le système solaire dans un repère lié au Soleil ; on aura donc $M = M_0$; d'autre part, la masse des planètes n'interviendra pas, puisque le Soleil produit un champ d'accélération (plutôt qu'un champ de forces) : c'est la quantité $\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{G.M}{r^2}.\vec{u}$ (et non $\vec{F}$) qui est indépendante de la particule-test, ou de la planète considérée. Cependant, la distinction entre masse au repos et masse maupertuisienne est fondamentale, et nous en reparlerons longuement.

Pour la lumière, l'équivalent de l'énergie locale est $E_{loc} = h.\nu_{loc}$ (où ν_{loc} désigne la fréquence du rayonnement, mesurée par l'observateur local) ; donc $E_{loc}.e^{-\frac{k}{r}} = h.\nu_{loc}.e^{-\frac{k}{r}} = constante$. Comme la période est $T_{loc} = \frac{2.\pi}{\nu_{loc}}$, on a, bien sûr : $T_{loc}.e^{\frac{k}{r}} = constante$. Quand r tend vers 0, la fréquence ν_{loc} tend vers l'infini, la période T_{loc} et la longueur d'onde $\lambda = c.T_{loc}$ tendent vers 0. On peut écrire aussi : $\nu_{loc} = \nu_\infty.e^{\frac{k}{r}}$, $T_{loc} = T_\infty.e^{-\frac{k}{r}}$ et $\lambda_{loc} = \lambda_\infty.e^{-\frac{k}{r}}$ (où ν_∞, T_∞ et λ_∞ sont la fréquence, la période et la longueur d'onde limites quand r tend vers l'infini, autrement dit quand le rayonnement s'échappe du champ de gravitation).

Le choix de conserver la loi de la gravitation universelle telle qu'elle a été formulée par Newton (à partir de la notion de force) n'est pas anodin : il implique que l'accélération à prendre en compte dans l'attraction gravitationnelle est $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$ et non $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Entre autres conséquences, ceci va entraîner que la vitesse de libération à la surface d'un corps pesant sera toujours inférieure à c ; nous en reparlerons au sujet des trous noirs. Une autre conséquence importante est qu'il sera plus facile, par la suite, d'établir des ponts entre la gravitation et les autres forces de la nature (même si la gravitation n'est pas une force comme les autres) ; en effet, si on choisit de "jeter" la notion de force pour lui substituer d'emblée l'accélération et la géométrie de l'espace-temps, on risque de casser le dialogue nécessaire avec la mécanique quantique.

4 Le paradoxe de Schild

Jusqu'ici, le rapprochement de la gravitation newtonienne et de la relativité restreinte a semblé se passer de manière simple, facile et naturelle ; mais nous allons voir surgir un paradoxe qui va nous conduire à envisager la possibilité d'un espace-temps courbe : c'est le "critère" (ou paradoxe) de Schild.

De même que le paradoxe de Michelson est la porte d'entrée de la relativité restreinte, je considère le paradoxe de Schild comme la voie royale pour aborder la relativité générale.

Historiquement, ce n'est pas cette porte qu'Einstein a empruntée lorsqu'il s'est attaqué à la gravitation ; en effet, le travail de Schild (A. Schild, Evidence for gravitational theories, Academic Press, 1961) est bien postérieur.

De quoi s'agit-il ?

Le paradoxe de Schild s'appuie sur l'analyse de l'expérience de Pound et Rebka. Ces deux physiciens, par un procédé très astucieux, ont réussi à mesurer la perte d'énergie d'un rayon lumineux se déplaçant de bas en haut, du pied d'une tour jusqu'à son sommet. Cette perte d'énergie est due à l'action de la gravité terrestre : la lumière doit lutter contre elle pour atteindre le sommet de la tour.

Pour notre part, nous imaginerons un observateur envoyant un rayon lumineux en direction du Soleil. Cet observateur est supposé immobile par rapport au Soleil, et suffisamment éloigné de celui-ci pour qu'il soit possible de négliger l'action de la gravité solaire à cette distance. Nous l'appellerons l'observateur distant. D'autre part, nous imaginerons, sur le parcours de la lumière, entre l'émetteur (l'observateur distant) et le Soleil, plusieurs autres observateurs, tous immobiles par rapport au Soleil, mais subissant une action non négligeable de la gravité solaire. Nous les appellerons observateurs locaux. La distance par rapport au Soleil sera noté r ; bien entendu, elle n'est pas identique pour tous les observateurs.

Les observateurs locaux sont habilités à faire des observations seulement dans leur voisinage immédiat. Au passage de l'onde lumineuse, ils vont relever sa période T_{loc}, sa longueur d'onde λ_{loc}, et sa vitesse c_{loc}. L'observateur distant se charge de faire la synthèse : il va essayer de reconstituer le déroulement des événements, en les replaçant dans un cadre euclidien (peut-être artificiel, mais qui est destiné à refléter au mieux sa vision des choses). Les mesures établies par cet observateur distant seront notées T_{dist}, λ_{dist} et c_{dist}. Toutes ces mesures sont des fonctions de r.

Conformément au résultat de l'expérience de Pound et Rebka, nous nous attendons à un accroissement de l'énergie apparente de cette onde, au fur et à mesure qu'elle se rapproche du Soleil. Comment cet accroissement de l'énergie va-t-il se manifester ?

Les formules $E = h\nu$, $\nu = \frac{E}{h}$, $T = \frac{1}{\nu} = \frac{h}{E}$, $\lambda = cT = \frac{hc}{E}$ permettent de prévoir qu'un accroissement de l'énergie apparente va se traduire par une diminution de la période et de la longueur d'onde. Dans le cadre de la physique classique, nous nous attendons donc aux résultats suivants :
- résultats des observateurs locaux : on peut penser que la vitesse de la lumière c_{loc} est constante, et que la période T_{loc} et la longueur d'onde λ_{loc} diminuent quand le rayonnement se rapproche du Soleil (c'est-à-dire quand r décroît) ;
- synthèse de l'observateur distant : on s'attend aux mêmes résultats, autrement dit : c_{dist} est constante, T_{dist} et λ_{dist} diminuent quand r décroît.

D'après ce que nous avons vu dans notre approche préliminaire, on peut même préciser que T_{loc}, λ_{loc}, T_{dist} et λ_{dist} vont décroître proportionnellement à $e^{-\frac{k}{r}}$.

Mais ces conclusions naïves vont s'écrouler comme un château de cartes. Elles vont se heurter à trois problèmes qui vont en avoir raison. Nous serons obligés de faire de profonds réajustements, et ceci en trois temps.

Le premier problème, le plus fondamental, constitue le noyau du paradoxe de Schild : la période T_{dist} ne peut pas être décroissante.

Imaginez des voitures roulant à 120 km/h sur une autoroute, régulièrement espacées (de 100 m par exemple) ; si, pour cause de travaux, elles doivent réduire leur vitesse à 60 km/h, la distance entre deux voitures successives passera de 100 m à 50 m, tandis que l'intervalle de temps (chronométré par un observateur immobile au bord de la route) ne changera pas. Si on devait représenter graphiquement le parcours de chaque voiture (distance parcourue en fonction du temps), toutes les courbes seraient identiques (même vitesse, mêmes accélérations, mêmes ralentissements au mêmes endroits) mais avec un décalage constant dans le temps. De la même façon, l'intervalle de temps entre deux maxima successifs de l'onde (donc la période T) ne peut pas varier le long de la trajectoire ! Il est essentiel de bien comprendre ce problème, car toute la suite en découle... On peut imaginer une vitesse de la lumière variable le long du parcours (comme pour les voitures de notre exemple), mais ceci ne change rien au problème. Celui-ci serait résolu si les différents chronométreurs étaient en mouvement les uns par rapport aux autres, mais dans notre expérience imaginaire, comme dans celle (bien réelle) de Pound et Rebka, ils sont immobiles...

5 Ralentissement des horloges dans un champ gravitationnel

Comment sortir de cette impasse ? C'est en fait assez simple. Rappelons-nous l'idée proposée par Einstein pour résoudre le paradoxe de Michelson : deux observateurs en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre travaillent avec des règles et des horloges différentes. Pour résoudre le paradoxe de Schild, il suffit d'admettre que l'observateur distant et les observateurs locaux travaillent, eux aussi, avec des règles et des horloges différentes. Dans l'univers tel qu'il est reconstitué par l'observateur distant, le rayon lumineux ne change pas de période lorsqu'il se propage vers un observateur local ; mais celui-ci croit mesurer une période plus courte parce-que son horloge de référence est plus lente que celle de l'observateur distant. Et c'est, bien entendu, le champ gravitationnel qui est responsable de cette distorsion.

S'engager dans cette voie, c'est admettre, d'une certaine manière, la courbure de l'espace-temps. Cette innovation majeure de la relativité générale a été fortement critiquée à l'époque où la théorie a été proposée par Einstein ; mais ensuite, divers physiciens (et plus particulièrement Schild, pour qui la courbure était une "évidence") ont réuni une argumentation forte à l'appui de cette conception de l'espace-temps. Mais, comme on le verra, les arguments de Schild peuvent être interprétés de plusieurs manières...

Revenons à l'expérience de Pound et Rebka, qui nous a conduits à la formule : $T_{loc} = T_{\infty}.e^{-\frac{k}{r}}$. On doit comprendre que T_{loc} représente la période de l'onde lumineuse mesurée par un observateur local immobile situé sur son passage. Si cet observateur local est situé "très loin" (r très grand, donc $e^{-\frac{k}{r}} \approx 1$), la période T_{loc} tend vers T_{∞}, ce qui signifie que $T_{\infty} = T_{dist} = dt_{dist}$. L'observateur distant n'est qu'un observateur local situé à l'infini. Quand le rayonnement se déplace radialement en direction du Soleil (pour suivre notre exemple), sa période T_{dist}, du point de vue de l'observateur distant, ne peut pas varier ; c'est nécessairement une constante. L'égalité $T_{loc} = T_{\infty}.e^{-\frac{k}{r}}$ pourra s'écrire : $dt_{loc} = dt_{dist}.e^{-\frac{k}{r}}$.

$$dt_{loc} = e^{-\frac{k}{r}}.dt_{dist} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}.dt_{dist}.$$

La période de l'onde ne change pas, mais les observateurs locaux (et entre autres l'observateur distant) ne l'évaluent pas de la même manière ; cette évaluation dépend du potentiel dans lequel ils se trouvent. Autrement dit, les horloges situées dans des potentiels différents ne tournent pas à la même vitesse.

6 Contraction des règles dans un champ gravitationnel

Il est certain que la gravité modifie la vitesse des horloges, donc l'évaluation locale des durées. Mais modifie-t-elle aussi les règles, donc l'évaluation locale des distances ?

Voici une première idée qui vient à l'esprit.

Nous avons écrit plus haut : $T_{loc} = T_{\infty}.e^{-\frac{k}{r}}$ et $\lambda_{loc} = \lambda_{\infty}.e^{-\frac{k}{r}}$. Ceci signifie qu'un rayonnement parti "de l'infini" avec une période T_{∞} et une longueur d'onde λ_{∞}, et se dirigeant vers le Soleil, aura pour période T_{loc} et pour longueur d'onde λ_{loc} quand il se trouvera à la distance r du Soleil (cette période et cette longueur d'onde étant mesurées par l'observateur local). Nous venons d'expliquer que, du point de vue de l'observateur distant, la période ne peut pas changer en cours de route, ce qui entraîne que, sur tout le parcours, on a nécessairement $T_{dist} = T_{\infty} = c^{te}$, donc $T_{loc} = T_{dist}.e^{-\frac{k}{r}}$. La tentation est grande de compléter ce raisonnement ainsi : puisque la période T_{dist}, mesurée par l'observateur distant, est constante, alors, d'après la formule $\lambda = c.T$, on déduit que $\lambda_{dist} = c.T_{dist}$, ce qui prouve que $\lambda_{dist} = c^{te}$ (plus précisément :

$\lambda_{dist} = \lambda_\infty = c^{te}$) ; donc $\lambda_{loc} = \lambda_{dist}.e^{-\frac{k}{r}}$. Ce qui signifie que $dl_{loc} = e^{-\frac{k}{r}}.dl_{dist}$. Les longueurs et les durées sont multipliées par le même coefficient $e^{-\frac{k}{r}}$ quand on change de potentiel.

Mais ce raisonnement est certainement faux : le fait que ces deux coefficients soient égaux nous conduit à une métrique homogène (voir le document sur les métriques) et une telle métrique est totalement incapable de rendre compte des phénomènes gravitationnels observés, comme nous l'expliquerons plus loin.

Où se situe l'erreur ? Il est certain que, dans le repère de l'observateur distant, la période T_{dist} du rayonnement est nécessairement constante ; mais sa longueur d'onde λ_{dist} ne peut pas l'être. Il en résulte que la vitesse apparente du rayonnement, que nous noterons c_{dist}, va nécessairement varier. Il ne faudra plus écrire : $\lambda_{dist} = c.T_{dist}$, mais : $\lambda_{dist} = c_{dist}.T_{dist}$. A première vue, ceci pourrait sembler contraire à la relativité restreinte. Mais dans un contexte gravitationnel la relativité restreinte sera respectée localement, et non globalement ; on aura toujours, bien sûr : $\lambda_{loc} = c.T_{loc}$.

Cette première idée étant éliminée, passons à la deuxième.

Considérons un observateur mobile se déplaçant selon une géodésique (nous dirons un "observateur inertiel") ; il se déplace à la rapidité w par rapport à l'observateur local, immobile par rapport au Soleil.

Pour décrire la trajectoire du mobile inertiel, nous utilisons la formule : $E = m_0.c^2.ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{k}{r}} = c^{te}$, ou plus simplement :

$$\overline{E} = \frac{E}{m_0.c^2} = ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{k}{r}} = ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} = c^{te} \ ;$$

$$ch\frac{w}{c} = \overline{E}.e^{\frac{k}{r}}.$$

Deux événements très proches (disons un tic et un tac) se produisent en deux points très proches, en deux instants très proches, dans un potentiel Φ. L'intervalle entre ces deux événements sera noté (dt_{loc}, dl_{loc}) dans le repère de l'observateur local immobile, (dt_{mob}, dl_{mob}) dans le repère de l'observateur mobile.

Nous admettons que la relativité restreinte est valable localement ; nous appliquons la transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} c.dt_{mob} \\ dl_{mob} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & sh\frac{w}{c} \\ sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c.dt_{loc} \\ dl_{loc} \end{pmatrix} \ ;$$

$$\begin{pmatrix} c.dt_{loc} \\ dl_{loc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c.dt_{mob} \\ dl_{mob} \end{pmatrix}.$$

Dans ces formules, nous n'avons conservé qu'une dimension spatiale, qui est définie par la vitesse $\vec{v}$. Il est donc admis tacitement que $\vec{dl}_{loc}$ et $\vec{dl}_{mob}$ sont parallèles à $\vec{v}$.

Considérons une règle de longueur dl_{mob} liée à l'observateur mobile. C'est l'observateur mobile qui détermine cette longueur, ce qui signifie qu'il observe ses deux extrémités au même instant ; donc $dt_{mob} = 0$. Remplaçons donc dt_{mob} par 0 :

$$\begin{pmatrix} c.dt_{loc} \\ dl_{loc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dl_{mob} \end{pmatrix} ;$$

$$dl_{loc} = ch\frac{w}{c}.dl_{mob} = \overline{E}.e^{\frac{k}{r}}.dl_{mob}.$$

Si on fait tendre r vers l'infini, $e^{\frac{k}{r}}$ tend vers 1, $ch\frac{w}{c}$ tend vers $\overline{E}$, et dl_{loc} se confond avec dl_{dist} et avec $\overline{E}.dl_{mob}$.

C'est ici qu'intervient une question de fond : celle de la construction de l'espace-temps par l'observateur distant. Comme il n'est pas présent en tout lieu et à chaque instant pour faire ses observations, selon quels critères complète-t-il les bribes d'observations dont il dispose ? Il pourrait souhaiter faire une synthèse des observations de tous les observateurs locaux, mais est-il en mesure de communiquer avec eux ? Il doit nécessairement y avoir une circulation de l'information, qui ne peut être assurée que par les mobiles inertiels. Ces mobiles inertiels sont les vecteurs qui assurent la transmission de l'information sur l'espace-temps local et sa courbure ; c'est sur cette base que se construit, de proche en proche, la structure même de l'espace-temps. Dans ce processus, dl_{mob} va jouer un rôle clé : pour l'observateur distant, c'est la règle de longueur dl_{mob} qui, en se déplaçant sur sa géodésique, va servir de référence, et va permettre, pour ainsi dire, de la graduer. Ceci signifie que l'égalité $dl_{dist} = \overline{E}.dl_{mob}$, qui est vraie à l'infini, pourra être supposée vraie sur toute la géodésique. On pourrait même considérer que c'est la définition de dl_{dist}.

Si on admet cette hypothèse, alors l'égalité $dl_{loc} = \overline{E}.e^{\frac{k}{r}}.dl_{mob}$ devient :

$$dl_{loc} = e^{\frac{k}{r}}.dl_{dist}.$$

On peut remarquer qu'en un point donné il passe une infinité de géodésiques de toutes directions ; le raisonnement qui précède est donc valable quelle que soit la direction, ce qui signifie que le coefficient de dilatation de l'espace est identique dans toutes les directions.

Nous avons vu précédemment que le coefficient de dilatation du temps est $e^{-\frac{k}{r}}$; nous voyons maintenant que le coefficient de dilatation de l'espace est $e^{\frac{k}{r}}$. Ceci signifie que, lorsqu'on se rapproche du corps central (le Soleil), il y a plus d'espace disponible que prévu par la géométrie euclidienne. Si on préfère, on peut dire que les unités de longueur sont contractées par l'effet du champ gravitationnel.

Ces réflexions seront développées dans la section sur "l'harmonisation dynamique des règles et des horloges", dans le document "Gravitation et vide quantique".

7 Matrices de changement de potentiel

Pour résumer ce qui vient d'être dit, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} dt_{loc} \\ dx_{loc} \\ dy_{loc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{k}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{k}{r}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{k}{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_{dist} \\ dx_{dist} \\ dy_{dist} \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} dt_{dist} \\ dx_{dist} \\ dy_{dist} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{k}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{k}{r}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{k}{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_{loc} \\ dx_{loc} \\ dy_{loc} \end{pmatrix} .$$

On pourra écrire aussi :

$$\begin{pmatrix} dt_{loc} \\ dx_{loc} \\ dy_{loc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\Phi}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\Phi}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\Phi}{c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_{dist} \\ dx_{dist} \\ dy_{dist} \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} dt_{dist} \\ dx_{dist} \\ dy_{dist} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\Phi}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\Phi}{c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_{loc} \\ dx_{loc} \\ dy_{loc} \end{pmatrix} .$$

Si nous considérons, non plus un observateur distant et un observateur local, mais deux observateurs locaux différents loc_1 et loc_2 (tous deux immobiles par rapport au Soleil), situés dans des potentiels quelconques, alors il sera possible de passer successivement de l'observateur loc_1 à l'observateur distant, puis de l'observateur distant à l'observateur loc_2, par une composition de matrices :

$$\begin{pmatrix} dt_2 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\Phi_2}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\Phi_2}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\Phi_2}{c^2}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dt_{dist} \\ dx_{dist} \\ dy_{dist} \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} dt_2 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\Phi_2}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\Phi_2}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\Phi_2}{c^2}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^{\frac{-\Phi_1}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\Phi_1}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\Phi_1}{c^2}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dt_1 \\ dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} dt_2 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\Phi_1-\Phi_2}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\Phi_1-\Phi_2}{c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{\Phi_1-\Phi_2}{c^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt_1 \\ dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix}.$$

Pour passer d'un observateur local à un autre, on pourra donc utiliser les mêmes matrices de changement de potentiel que pour passer d'un observateur local à un observateur distant, à condition de considérer que Φ désigne la différence de potentiel entre les deux observateurs. On pourra même prendre l'habitude de considérer Φ comme une quantité relative : $\Phi = \Phi_{mob} - \Phi_{obs}$, où Φ_{mob} désigne le potentiel gravitationnel dans lequel se trouve le mobile observé (par exemple la planète), et Φ_{obs} le potentiel dans lequel se trouve l'observateur. C'est cette différence de potentiel, interposée entre l'observateur et la scène observée, qui joue le rôle de verre déformant.

Notons bien que les matrices que nous utilisons ici (que j'appellerai "matrices de changement de potentiel") sont valables lorsqu'on passe d'un observateur local à un observateur distant (ou l'inverse), ou bien (par composition) lorsqu'on passe d'un observateur local à un autre observateur local. Mais ces observateurs ne sont pas des observateurs quelconques : ce sont des observateurs immobiles par rapport au Soleil. Ceci soulève des questions : que se passe-t-il lorsque les observateurs ne sont pas immobiles ? Que devient la notion d'immobilité lorsqu'on étudie le champ gravitationnel créé par plusieurs corps en mouvement ? Nous en reparlerons. Pour le moment notre but premier est l'application d'idées simples à une situation simple : le mouvement des planètes dans le système solaire ; le mot "immobile" signifiera, jusqu'à nouvel ordre : "immobile par rapport au Soleil".

La relativité restreinte est basée sur la matrice de Lorentz ; la gravitation relativiste, selon l'interprétation que nous étudions ici, se base sur la matrice de changement de potentiel. Si nous cherchons à combiner ces deux types de matrices pour étudier de manière générale les changements de référentiel (référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre, situés dans des potentiels différents), nous rencontrons très vite des problèmes. La raison est la suivante : notre solution du paradoxe de Schild dissocie les rôles de l'espace et du temps, alors que la relativité restreinte les considère comme deux aspects d'une même chose. Ces deux types de transformations semblent radicalement incompatibles, à moins d'admettre deux choses : d'une part, la matrice de Lorentz n'a qu'une valeur locale ; d'autre part, la matrice de changement de potentiel ne s'applique qu'à des référentiels particuliers, que nous appellerons "gravitationnellement immobiles". La signification de cette formule devra être précisée.

8 Evaluation des vitesses en fonction du potentiel

Voyons maintenant l'évaluation des vitesses.

Voici le troisième problème : si nous disons que T_{dist} est constant et que λ_{dist} est multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$, sachant que $c_{dist} = \frac{\lambda_{dist}}{T_{dist}}$, nous en déduisons que c_{dist} est multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$. De même, si nous disons que T_{loc} est multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$ et que λ_{loc} est constant, sachant que $c_{loc} = \frac{\lambda_{loc}}{T_{loc}}$, nous en déduisons que c_{loc} est divisé par $e^{-\frac{k}{r}}$.

Ce raisonnement est inexact, car λ_{dist} n'est pas multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$ dans l'absolu (un absolu qui n'existe pas !), mais par rapport à λ_{loc}. De même, T_{loc} n'est pas multiplié par $e^{-\frac{k}{r}}$ dans l'absolu, mais par rapport à T_{dist}.

En réalité, comme nous l'enseigne la relativité restreinte, tout observateur, mesurant la vitesse de la lumière dans son voisinage, obtiendra un résultat rigoureusement égal à la constante c ; on a donc : $c_{loc} = c$.

Si un observateur local calcule la vitesse d'un mobile par la formule : $v_{loc} = \frac{dl_{loc}}{dt_{loc}}$, alors l'observateur distant évaluera la même vitesse de la façon suivante :

$$v_{dist} = \frac{dl_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{e^{\frac{\Phi}{c^2}}.dl_{loc}}{e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.dt_{loc}} = e^{\frac{2\Phi}{c^2}}.v_{loc}.$$

La vitesse locale de la lumière sera toujours constante : $c_{loc} = c$; mais sa vitesse évaluée par un observateur distant ne le sera pas : $c_{dist} = c.e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$. Par exemple, lorsque la lumière passe dans le voisinage d'un corps massif ($\Phi < 0$), sa vitesse évaluée par un observateur distant sera inférieure à c, de sorte que celui-ci aura l'illusion de voir la lumière ralentir.

La solution du paradoxe de Schild que nous proposons comporte donc trois volets interdépendants et étroitement imbriqués. Le premier est le ralentissement des horloges dans un champ gravitationnel (volet sans lequel l'effet Einstein - voir plus loin - n'existerait pas) ; c'est l'élément central de notre vision du paradoxe de Schild. Le second est la contraction des règles dans un champ gravitationnel (volet sans lequel la déviation de la lumière, ou les mirages gravitationnels, seraient incompréhensibles : voir la section sur la déflexion de la lumière) ; c'est le complément indispensable du premier, sa facette spatiale pour ainsi dire. Le troisième est la constance de la vitesse locale de la lumière (indispensable si nous admettons la validité locale de la relativité restreinte) ; nous aurions pu commencer par lui, tant il va de soi. Il implique que la vitesse de la lumière, pour un observateur distant, semble varier en fonction du champ gravitationnel. Cette variation apparaîtra de manière spectaculaire dans l'effet Shapiro. Ces trois volets sont (au moins qualitativement) nécessaires ; sont-ils quantitativement satisfaisants, et jusqu'à quel point ? C'est ce que nous allons examiner.

Mais auparavant, soulignons encore une conséquence importante concernant l'évaluation des masses.

9 Evaluation des masses en fonction du potentiel

En relativité restreinte, l'énergie d'un corps de masse au repos m_0, de vitesse $\vec{v}$ et de rapidité $\vec{w}$, est donnée par la formule :

$$E = m_0.c^2.ch\frac{w}{c} \ ;$$

En gravitation relativiste, elle est donnée par la formule :

$$E = m_0.c^2.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.$$

La différence par rapport à la relativité restreinte vient du fait que c'est une quantité évaluée par l'observateur distant, ce qui nous impose de faire intervenir le potentiel (ou plus précisément la différence de potentiel entre la scène et l'observateur).

En relativité restreinte, il est d'usage de poser :

$$m = \frac{E}{c^2} = m_0.ch\frac{w}{c} \ ;$$

c'est la masse maupertuisienne, qui varie avec la vitesse.

De même, en gravitation relativiste, on peut poser :

$$m = \frac{E}{c^2} = m_0.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.$$

Cette "masse maupertuisienne gravitationnelle" va varier non seulement en fonction de la vitesse (locale), mais aussi en fonction du potentiel. Elle est évaluée par l'observateur distant.

On aura donc :

$$m_{loc} = m_0.ch\frac{w}{c} \quad \text{(masse maupertuisienne de la relativité restreinte) ;}$$

$$m = m_{dist} = m_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} = m_{loc}.e^{-\frac{k}{r}} \quad \text{(masse maupertuisienne gravitationnelle).}$$

On voit donc que la masse (maupertuisienne) se transforme comme les distances. Il en est de même de l'énergie, puisque $E = m.c^2$.

10 Les deux niveaux de lecture de la gravitation

Dans notre approche préliminaire, nous sommes partis de la notion de force (légèrement aménagée pour être compatible avec la relativité restreinte). C'est une approche de la gravitation qui est inspirée par la théorie de Newton.

Très rapidement, nous avons constaté qu'une conséquence inattendue de cette première approche est que les règles et les horloges vont nécessairement varier en fonction du potentiel, en raison du paradoxe de Schild.

Ceci nous a conduits à considérer que l'espace-temps est courbe. Nous confirmons donc cette intuition géniale d'Einstein : cette conclusion nous semble incontournable.

Nous allons voir par la suite que cette courbure explique totalement la course des planètes autour du Soleil, par exemple. Dès lors, avons-nous encore besoin de la notion de (pseudo-)force ? Notre raisonnement ne nous conduit-il pas à réfuter les prémisses dont il découle ? A couper la branche sur laquelle nous sommes assis ?

Essayons de préciser le rôle de chacune des deux approches.

La notion de courbure va nous conduire à modéliser l'espace-temps comme un espace de Riemann courbe, à quatre dimensions.

De même qu'on peut définir un plan (surface plane à deux dimensions) tangent en un point donné à une sphère (surface courbe à deux dimensions), on peut définir, en chaque point (événement) d'un espace de Riemann à quatre dimensions, une variété tangente de courbure nulle, elle aussi à quatre dimensions (c'est un espace-temps de Minkowski). Pour cela, on considère la structure locale de l'espace de Riemann dans le voisinage du point considéré, et on réalise un prolongement à courbure nulle. Ceci revient tout simplement à faire abstraction de la courbure (et du potentiel dont elle résulte).

L'intérêt de cet espace de Minkowski tangent est que la relativité restreinte s'y applique. En particulier, pour décrire la trajectoire d'une particule de masse au repos m_0 (constante), on pourra utiliser les formules suivantes :

$$E = m_0.c^2.ch\frac{\vec{w}}{c} \ ;$$

$$c.\vec{p} = m_0.c^2.sh\frac{\vec{w}}{c} \ ;$$

$$dE = m_0.c^2.d\left(ch\frac{\vec{w}}{c}\right) = m_0.c^2.sh\frac{\vec{w}}{c}.\frac{d\vec{w}}{c} = c.\vec{p}.\frac{d\vec{w}}{c} \ ;$$

$$c.d\vec{p} = m_0.c^2.d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) = m_0.c^2.ch\frac{\vec{w}}{c}.\frac{d\vec{w}}{c} = E.\frac{d\vec{w}}{c}.$$

Notons m la masse maupertuisienne : $m = m_0.ch\frac{\vec{w}}{c} = \frac{E}{c^2}$.

$$d\vec{p} = \frac{E}{c^2}.d\vec{w} = m.d\vec{w}\ ;$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m.\frac{d\vec{w}}{dt} = m.\vec{\Gamma}.$$

Notons $d\vec{l} = \vec{v}.dt$ un déplacement infinitésimal de la particule considérée. On a alors :

$$\vec{F}.d\vec{l} = m.\frac{d\vec{w}}{dt}.\vec{v}.dt = m_0.ch\frac{\vec{w}}{c}.\frac{d\vec{w}}{dt}.\frac{sh\frac{\vec{w}}{c}}{ch\frac{\vec{w}}{c}}.c.dt\ ;$$

$$\vec{F}.d\vec{l} = m_0.c^2.sh\frac{\vec{w}}{c}.\frac{d\vec{w}}{c} = m_0.c^2.d\left(ch\frac{\vec{w}}{c}\right) = dE.$$

Toutes ces égalités sont d'une importance fondamentale en relativité restreinte ; elles sont la traduction relativiste directe des formules de Newton reliant la force avec l'accélération, l'énergie et l'impulsion. On remarque bien sûr le rôle central joué par la rapidité, et donc par le vecteur que nous appelons pseudo-accélération : $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$. On pourrait considérer ce vecteur comme la véritable accélération au sens physique du terme, dès lors qu'on travaille dans le cadre de la relativité restreinte ; mais l'usage est d'appeler accélération le vecteur $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. C'est pourquoi nous utilisons le terme "pseudo-accélération".

Dans un espace de Riemann, ces formules sont à utiliser avec précaution, car elles n'ont qu'une valeur locale : elles sont valables dans l'espace de Minkowski tangent, mais comme la particule se déplace sur sa trajectoire, l'espace tangent change continuellement. Pour la plupart des observateurs, ces formules vont être brouillées par le potentiel qui varie dans l'espace et dans le temps, autrement dit par la courbure. C'est pour cette raison que l'étude de la trajectoire dans l'espace courbe nécessite le recours aux géodésiques. Quand on choisit d'utiliser les géodésiques, on range les forces au placard.

Dans notre première approche de la gravitation, nous avons fait appel à la notion de force, en application des concepts de Newton ; ensuite, nous avons admis que l'espace-temps doit être courbe, et que les trajectoires doivent être décrites par des géodésiques, selon l'idée d'Einstein. Il n'y a là aucune contradiction, à priori. Mais il est important de savoir s'il existe vraiment une théorie de la gravitation compatible avec ces deux points de vue. Nous en reparlerons longuement dans le document sur les métriques, sections sur les géodésiques en coordonnées localement cartésiennes et cas particuliers. Nous verrons que ce rapprochement entre l'idée de Newton et celle d'Einstein conduit tout droit à la métrique de Ni.

Pourquoi chercher à rapprocher les idées de Newton de celles d'Einstein ? C'est parce-que la gravitation de Newton est une théorie d'une grande efficacité (elle est toujours utilisée par les agences spatiales, comme la NASA, pour calculer les orbites de leurs satellites), ce qui n'est probablement pas dû au hasard.

D'autre part, des raisonnements assez simples (comme celui de Schild) montrent que la courbure de l'espace-temps s'impose comme une nécessité.

On doit comprendre que, dans un espace-temps courbe (de Riemann), l'utilisation des géodésiques nous dispense de faire appel aux forces, de même que dans la théorie de Newton la notion de potentiel permet de résoudre certains problèmes sans parler de forces ; mais peut-on calculer les géodésiques, et le potentiel, sans le concept de force ? On dit parfois que "la force gravitationnelle est absorbée par la courbure" ; l'important est de comprendre dans quelles situations on va utiliser tel ou tel outil.

Une autre chose qu'il faut préciser est le rôle du temps. Effectivement, tout notre raisonnement s'appuie sur la pseudo-accélération : $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$. Elle est définie localement, dans la variété tangente, où tous les observateurs, quelle que soit leur vitesse, peuvent s'entendre sur $d\vec{w}$; mais ils ne peuvent pas s'entendre sur dt, car ils utilisent des horloges différentes. Il est donc indispensable de désigner l'observateur de référence, le "maître du temps", seul habilité à imposer un temps local de référence ; c'est ce que avons appelé l'"observateur local immobile".

Avant de continuer, il est utile de réfléchir à la signification de cette "immobilité". En relativité générale, l'un des postulats de base est que tous les référentiels se valent, ce qui signifie qu'il n'existe aucun référentiel privilégié, donc aucun référentiel "immobile". Pourtant, les modèles de l'expansion de l'Univers compatibles avec la relativité générale (modèles de Friedmann, De Sitter, Einstein...) nous disent que c'est l'espace qui se dilate, tandis que les galaxies sont (presque) "immobiles" par rapport à lui. On dit qu'elles sont "comobiles". Ceci signifie qu'il existe des référentiels "immobiles par rapport à l'espace en expansion". Que signifie cette notion de "référentiels immobiles" ? D'où leur vient ce privilège ? De droit divin ? Ou bien la répartition de l'ensemble de la matière dans l'Univers permet-elle de calculer l'immobilité locale, en chaque point ? Autrement dit, de calculer la vitesse de chaque corps par rapport à l'ensemble de l'Univers ? Cette idée est celle du philosophe Mach. Certains physiciens (Papapetrou, Rosen ...) pensent qu'elle est exacte, et que le principe de Mach permet de définir une immobilité en chaque point (et pas seulement en cosmologie).

On sait qu'Einstein, lorsqu'il a commencé à étudier la gravitation, souhaitait s'appuyer sur le principe de Mach ; mais ensuite il a constaté que ce principe était incompatible avec le principe de relativité généralisée. Il a alors fait un choix : il a opté pour le principe de relativité généralisée et la covariance totale, et a abandonné le principe de Mach. Le fait que sa théorie définitive l'ait conduit à réhabiliter les référentiels privilégiés, explicables par le principe de Mach, nous oblige à nous poser cette question : a-t-il fait le bon choix ? N'aurait-il pas été plus judicieux d'admettre, dès le début, le principe de Mach et les référentiels privilégiés ? C'est en tout cas ce que nous ferons dans ce travail.

Nous reparlerons du principe de Mach dans les documents sur les "Principes fondamentaux" et sur le "Champ d'entraînement". Le sujet des référentiels co-mobiles sera abordé dans le document : "Gravitation et cosmologie".

11 Mise au point provisoire

Avant de continuer, revenons à notre "approche préliminaire", qui doit être réinterprétée à la lumière du critère de Schild. En particulier, nous venons de voir que la plupart des mesures dépendent de l'observateur (local ou distant) ; nous n'en avions pas parlé dans l'approche préliminaire, et nous n'avions pas cherché à savoir par qui étaient évaluées les différentes quantités impliquées dans le calcul. Mais il est temps de le faire, sans quoi des contradictions risquent de surgir par la suite.

Reprenons la même situation : une planète de masse au repos m_0, se déplaçant dans le champ gravitationnel du Soleil, de masse M.

Nous avions utilisé plusieurs formules, dont l'expression de l'accélération, ainsi définie : $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$, et celle de la force, définie à partir de l'égalité : $\vec{F} = m.\vec{\Gamma} = m.\frac{d\vec{w}}{dt}$.

Pour éviter toute confusion, nous dirons que $\vec{\Gamma}$ est une pseudo-accélération, puisque, par définition, la vraie accélération, au sens usuel, est égale à $\frac{d\vec{v}}{dt}$. De même, nous dirons que $\vec{F}$ est une pseudo-force. En particulier, cette pseudo-force ne vérifie pas nécessairement l'égalité : $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, qui correspond pourtant à la définition usuelle de la force. En réalité, cette pseudo-force pourra, dans certaines situations, s'identifier à une véritable force au sens physique du terme ; mais le cas de la pseudo-force gravitationnelle, comme nous le verrons, est bien particulier ; son statut devra être précisé.

Une autre chose qu'il faut rappeler, c'est que les rapidités $\vec{w}$ sont définies dans un espace hyperbolique, dans lequel il n'existe pas d'addition vectorielle au sens usuel : il n'existe qu'une composition notée $\oplus$. Il faut donc préciser ce que signifie $d\vec{w}$: supposons qu'à un instant donné la rapidité du mobile, estimée par un observateur local ("immobile") soit $\vec{w}$, et qu'elle subisse variation infinitésimale $d\vec{w}$; pour l'observateur local, cette variation va se composer avec la rapidité initiale selon la règle : $\vec{w} \oplus d\vec{w}$. On peut donc dire que $d\vec{w}$ est évalué par un observateur local mobile, de rapidité $\vec{w}$ constante (non accélérée) par rapport à l'observateur local immobile.

Il faut bien retenir que $\vec{w}$ et $d\vec{w}$ sont des quantités évaluées localement, qui caractérisent le mouvement local du mobile, et qui seront utilisées telles quelles dans les calculs de tous les observateurs, quel que soit le potentiel dans lequel ils sont plongés. Nous ne parlerons jamais de $\vec{w}_{dist}$, mais seulement de $\vec{w}$, considéré comme une propriété objective, caractéristique du mobile considéré. De plus, nous noterons $\frac{\vec{v}}{c} = th\frac{\vec{w}}{c} = \frac{sh\frac{\vec{w}}{c}}{ch\frac{\vec{w}}{c}}$, où $\vec{v}$ est la vitesse du mobile évaluée par l'observateur local immobile.

De la même façon, la pseudo-accélération doit être considérée comme une quantité essentiellement locale ; nous noterons donc, par convention :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt_{loc}}.$$

Ceci est cohérent, puisque $\vec{w}$ et dt_{loc} sont évalués par le même observateur.

Dans la suite, il sera convenu que w, v et Γ sont évaluées par l'observateur local :

$$w = w_{loc}, \quad v = v_{loc}, \quad \Gamma = \Gamma_{loc}.$$

D'autre part, nous prendrons l'habitude d'utiliser les notations suivantes :

$$dl = dl_{dist}, \quad dt = dt_{dist}, \quad r = r_{dist} \ \text{ et } \ M = M_{dist}.$$

Les distances, les durées et les masses seront évaluées par l'observateur distant.

Dans l'étude des géodésiques, nous verrons également apparaître l'énergie et l'impulsion (et le moment cinétique). Ils seront donc (sauf mention contraire) évalués par l'observateur distant :

$$dE = E_{dist}, \quad p = p_{dist}.$$

Comme on l'a vu (et comme on va le revoir de manière plus détaillée), l'énergie se transforme comme les masses maupertuisiennes gravitationnelles (en raison de l'équivalence masse/énergie), donc comme les distances ; l'impulsion se transforme comme les durées, comme on peut s'en rendre compte facilement en utilisant les formules newtoniennes : $dE = \vec{F}.\vec{dl}$ et $d\vec{p} = \vec{F}.dt$.

En résumé :

$$dt = dt_{dist} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.dt_{loc} = e^{\frac{k}{r}}.dt_{loc} \ ;$$

$$dp = dp_{dist} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.dp_{loc} = e^{\frac{k}{r}}.dp_{loc} \ ;$$

$$dl = dl_{dist} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}.dl_{loc} = e^{-\frac{k}{r}}.dl_{loc} \ ;$$

$$dm = dm_{dist} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}.dm_{loc} = e^{-\frac{k}{r}}.dm_{loc} \ ;$$

$$dE = dE_{dist} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}.dE_{loc} = e^{-\frac{k}{r}}.dE_{loc}.$$

D'autre part, le potentiel sera défini par :

$$\Phi = -\frac{G.M}{r}.$$

Comme les masses et les longueurs se transforment de la même façon, nous pouvons dire que le potentiel est indépendant de l'observateur :

$$\Phi = -\frac{G.M}{r} = -\frac{G.M_{dist}}{r_{dist}} = -\frac{G.M_{loc}}{r_{loc}}.$$

Démontrons maintenant l'égalité : $d\Phi = -\vec{\Gamma}.\vec{dl_{loc}}$, en partant de la formule fondamentale : $E = E_{dist} = m_0.c^2.ch\frac{\vec{w}}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} = c^{te}$ (formule valable pour tout mobile se déplaçant librement sur une géodésique). Ecrivons cette égalité sous forme différentielle :

$$dE = m_0.c^2.\left(ch\frac{\vec{w}}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.\frac{d\Phi}{c^2} + sh\frac{\vec{w}}{c}.\frac{d\vec{w}}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}\right) = 0 \ ;$$

$$dE = m_0.c^2.ch\frac{\vec{w}}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.\left(\frac{d\Phi}{c^2} + \frac{\vec{v}}{c}.\frac{d\vec{w}}{c}\right) = 0 \ ;$$

$$dE = m_0.ch\frac{\vec{w}}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.\left(d\Phi + \vec{v}.d\vec{w}\right) = 0.$$

Ce qui entraîne :

$$d\Phi = -\vec{v}.d\vec{w} = -\frac{\vec{dl_{loc}}}{dt_{loc}}.d\vec{w} = -\frac{d\vec{w}}{dt_{loc}}.\vec{dl_{loc}} = -\vec{\Gamma}.\vec{dl_{loc}} = \Gamma.dr_{loc} \ ;$$

$$d\Phi = -\vec{\Gamma}.\vec{dl_{loc}} = -\Gamma.dr_{loc}.$$

12 Ordres de grandeur

Dans ce travail, nous raisonnerons le plus souvent comme si le champ gravitationnel en question était celui du Soleil ; précisons donc la valeur de k pour ce champ particulier, ainsi que celle du rapport $\frac{k}{r}$, qui interviendra souvent dans les équations.

Comme en gravitation newtonienne, nous appellons potentiel gravitationnel la quantité (négative) : $\Phi = -\frac{GM}{r}$. Nous dirons qu'un champ est fort si le nombre $\|\Phi\|$ est grand.

La masse du Soleil est $M \approx 1,9891.10^{30}\ kg$; la constante de la gravitation est $G \approx 6,6742.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$; et la vitesse de la lumière : $c \approx 2,99792.10^8\ m.s^{-1}$; donc :

$$k = \frac{GM}{c^2} \approx \frac{6,6742.10^{-11}.1,9891.10^{30}}{8,9875.10^{16}} \approx 1,47.10^3\ m.$$

Si on note $r = r_t \approx 1,5.10^{11}\ m$ le rayon de l'orbite terrestre, par exemple, le nombre $\frac{k}{r}$ qui apparaît dans les équations vaudra : $\frac{k}{r} \approx \frac{1,47.10^3}{1,5.10^{11}} \approx 10^{-8}$, donc $\left(\frac{k}{r}\right)^2 \approx 10^{-16}$, $\left(\frac{k}{r}\right)^3 \approx 10^{-24}$, etc. Quand on étudiera l'action du champ gravitationnel du Soleil sur la Terre (ou sur une autre planète), on ne pourra pas négliger $\frac{k}{r}$ (ce serait négliger la gravitation !) mais on pourra sans crainte négliger ses puissances.

Si on note $r = r_s \approx 6,96.10^8\ m$ le rayon du Soleil, on aura : $\frac{\|\Phi\|}{c^2} = \frac{k}{r} \approx \frac{1,47.10^3}{6,96.10^8} \approx 2.10^{-6}$, $\left(\frac{k}{r}\right)^2 \approx 4.10^{-12}$, $\left(\frac{k}{r}\right)^3 \approx 8.10^{-18}$, etc. Ceci montre qu'à la surface du Soleil, les puissances de $\frac{k}{r}$ seront très vite négligeables.

Considérons maintenant une étoile à neutrons ayant pour masse $1,4$ fois la masse du Soleil, et pour rayon 14 km. A sa surface, on aura : $k \approx 1,4\ .\ 1,47.10^3 \approx 2,058.10^3$ m, et $r = 1,4.10^4$ m, donc $\frac{\|\Phi\|}{c^2} = \frac{k}{r} \approx 0,147$; $\left(\frac{k}{r}\right)^2 \approx 0,0216$; $\left(\frac{k}{r}\right)^3 \approx 0,0032$; $\left(\frac{k}{r}\right)^4 \approx 0,00047$; $\left(\frac{k}{r}\right)^5 \approx 0,00007$; ... Il faudra donc être très prudent avant de négliger des puissances de $\frac{k}{r}$ à la surface d'une étoile à neutrons ! Nous sommes ici dans le domaine des champs gravitationnels forts ...

Revenons à la surface de la Terre. La masse de notre planète est $M \approx 6.10^{24}\ kg$; son rayon est $r \approx 6,37.10^6\ m$; donc :

$$\frac{\|\Phi\|}{c^2} = \frac{k}{r} = \frac{GM}{r\ c^2} = \frac{6,67.10^{-11}.6.10^{24}}{6,37.10^6.9.10^{16}} \approx 0,7.10^{-9}.$$

On voit donc qu'à la surface de la Terre, le champ créé par la Terre elle-même ($\frac{\|\Phi\|}{c^2} \approx 0,7.10^{-9}$) est un peu inférieur au champ créé par le Soleil ($\frac{\|\Phi\|}{c^2} \approx 10^{-8}$).

Etudions maintenant le champ créé par notre Galaxie (la Voie Lactée) à la surface de la Terre. Imaginons par exemple une masse de 3.10^{11} soleils (évaluation raisonnable ?) concentrée au centre de la Galaxie, à une distance de 28000 AL, soit $2,6.10^{20}\ m$. On a alors :

$$\frac{\|\Phi\|}{c^2} = \frac{k}{r} = \frac{GM}{r\ c^2} = \frac{6,67.10^{-11}.2.10^{30}.3.10^{11}}{2,6.10^{20}.9.10^{16}} \approx 1,7.10^{-6}.$$

Le potentiel gravitationnel créé par la Galaxie dans le voisinage de la Terre dépasse largement celui qui est dû au Soleil. (Bien entendu, il ne faut pas confondre ce potentiel avec la force d'attraction.)

On pourrait étudier ensuite la contribution des galaxies voisines (groupe local), qui est non négligeable, puis celle des galaxies lointaines ; pour ces dernières, le calcul est délicat : il fait intervenir la masse moyenne des galaxies, leur répartition dans l'espace, leur âge, leur vitesse de fuite due à l'expansion de l'Univers... Si les galaxies étaient en nombre infini, réparties uniformément dans l'espace et dans le temps, dans un Univers statique, leur contribution totale au champ gravitationnel serait infinie, ce qui nous poserait de sérieux problèmes :

tous les calculs qui suivent seraient caducs. Mais la faible luminosité du ciel nocturne (voir le paradoxe d'Olbers : "pourquoi le ciel est-il noir la nuit ?") suggère que le champ gravitationnel total pourrait bien être faible aussi ; nous en reparlerons dans la page "gravitation et cosmologie".

13 Effet Einstein

D'après ce que nous avons vu précédemment, un rayon lumineux se dirigeant de bas en haut dans le champ gravitationnel de la Terre doit perdre de l'énergie apparente : sa fréquence doit être décalée vers le rouge (pour un observateur immobile). C'est précisément ce qui a été vérifié par Pound et Rebka en 1959 ; si on analyse leur expérience, on voit qu'ils ont cherché à annuler ce décalage vers le rouge par un effet Doppler opposé (décalage vers le bleu produit par le rapprochement de l'émetteur et du récepteur, à une vitesse soigneusement calculée).

On en déduit qu'une horloge immobile dans un champ gravitationnel doit retarder par rapport à une horloge identique située hors de ce champ. Ceci a été vérifié d'abord dans des avions, puis dans des satellites artificiels : dans ce cas, l'horloge embarquée avance par rapport à celles qui restent à la surface de la Terre, car le champ est plus faible à haute altitude. Cette distorsion (appelée "effet Einstein") est systématiquement prise en compte dans les calculs du positionnement GPS. L'expérience de Pound et Rebka était donc la première (mais non la dernière !) mesure de cet effet Einstein.

En relativité générale, le coefficient de dilatation du temps est $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}}$; ici, nous avons trouvé $e^{-\frac{\Phi}{c^2}} = e^{\frac{k}{r}}$. On peut remarquer que $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}}$ et $e^{\frac{k}{r}}$ ont le même développement limité au premier ordre en $\frac{k}{r}$; c'est : $1 + \frac{k}{r}$; la différence est donc insensible pour r très grand par rapport à k, comme c'est le cas dans l'environnement terrestre, et dans la plupart des situations que nous étudierons.

Mais imaginons que r tende vers $2k$ (ce qui correspond à l'horizon d'un trou noir : nous en reparlerons !). Alors $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}}$ tend vers $+\infty$, tandis que $e^{\frac{k}{r}}$ tend vers $e^{\frac{1}{2}}$, soit $1,649$ environ : pour un observateur distant, un chronomètre situé à la surface d'un trou noir semblera s'arrêter, si c'est la première formule qui est la bonne ; mais si c'est la seconde formule qui est correcte, alors ce chronomètre semblera tourner à $60,6\%$ de sa vitesse normale. Ce n'est pas du tout pareil !

Calculons plus précisément la différence des deux coefficients de dilatation du temps : $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}} - e^{\frac{k}{r}}$;

- à la surface du Soleil ($\frac{k}{r} \approx 0,000002$) :

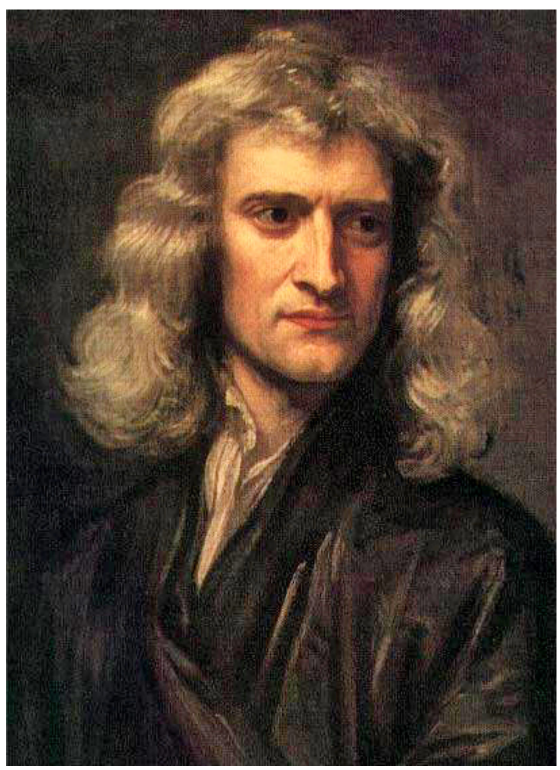
$\frac{1}{\sqrt{1-0{,}000004}} - e^{0{,}000002} \approx 1,000002000006 - 1,000002000002 \approx 4.10^{-12}$. C'est négligeable !

- à la surface d'une étoile à neutrons de $1,4$ masse solaire et 14 km de rayon ($\frac{k}{r} \approx 0,147$) :
$\frac{1}{\sqrt{1-2.0{,}147}} - e^{0{,}147} \approx 1,190 - 1,158 \approx 0,032$. (Différence relative : $\frac{0{,}032}{1{,}19} \approx 17\%$.)

En théorie, cet écart devrait pouvoir être mis en évidence par l'étude des radiations provenant de la surface des étoiles à neutrons : dans notre modèle, le décalage vers le rouge (redshift gravitationnel) est de 17% moins élevé qu'en relativité générale. Nous en reparlerons dans la section consacrée à la mesure de l'effet Einstein à la surface des étoiles à neutrons.

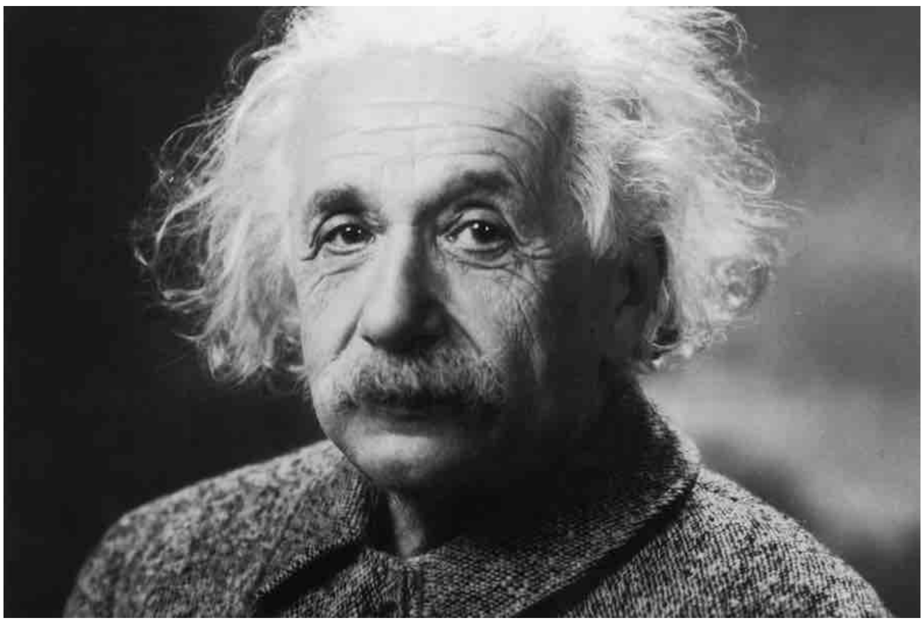
14 Newton, Einstein, et encore Einstein...

Avant de continuer, arrêtons-nous un instant pour observer les piliers sur lesquels s'appuie notre réflexion.



Le premier est, bien entendu, la gravitation de Newton : nous avons pris au pied de la lettre la loi de la gravitation universelle.

Le second est la relativité restreinte d'Einstein, théorie incontournable, maintes fois confirmée, devenue un pilier essentiel de la physique, car elle est indispensable à la compréhension de l'électromagnétisme, de l'optique, de la physique quantique, de la théorie des champs, etc.



Mais ces deux théories conduisent à une contradiction apparente, mise en évidence par le paradoxe de Schild. Pour résoudre ce paradoxe, nous avons proposé une idée, qui constitue le troisième pilier de notre réflexion : nous imaginons que l'évaluation de l'espace, du temps, de l'énergie et de l'impulsion, dépend non seulement de l'état de mouvement de l'observateur (comme en relativité restreinte), mais aussi du potentiel gravitationnel. Cette idée est inspirée par la relativité restreinte, mais ne coïncide pas avec les hypothèses de la relativité générale, bien qu'elle puisse être interprétée en termes de courbure de l'espace-temps.

Enfin, cette façon de traiter le paradoxe de Schild trouve sa force et sa cohérence grâce à une autre idée d'Einstein, qui constitue le quatrième pilier de notre réflexion : par son étude de l'effet photoélectrique, il nous apprend que l'énergie d'un photon, la fréquence de l'onde associée, ainsi que sa longueur d'onde, sont étroitement liées. Cette découverte n'étant pas due uniquement à Einstein, mais aussi à Planck : c'est une analyse croisée de l'effet photoélectrique et du rayonnement du corps noir qui a permis d'en révéler toute la profondeur. La recherche de la cohérence avec cet aspect ondulatoire de l'énergie est l'une des idées directrices de notre travail ; elle nous a servi de guide pour analyser le paradoxe de Schild. La formule $E = h\nu$ est ici d'une importance capitale : elle établit un lien fondamental entre l'énergie, l'espace et le temps. Nous l'avons appliquée à la lumière (car l'expérience de Pound et Rebka utilise un rayon lumineux), mais nous aurions pu l'appliquer à n'importe quel mobile : en effet, la mécanique ondulatoire a montré qu'elle se généralise de manière remarquable. Elle est devenue aussi l'une des bases de la mécanique quantique.

Précisons le rôle de cette formule : $E = h\nu$, dans la solution de notre problème.

L'énergie et l'impulsion ne sont pas évaluées de la même façon par tous les observateurs :

$$\begin{cases} E = E_{dist} = E_{loc} \ \ e^{\frac{\Phi}{c^2}} = m_0 \ c^2 \ ch\frac{w}{c} \ e^{\frac{\Phi}{c^2}} \ ; \\ \\ p = p_{dist} = p_{loc} \ e^{-\frac{\Phi}{c^2}} = m_0 \ c \ sh\frac{w}{c} \ e^{-\frac{\Phi}{c^2}} . \end{cases}$$

Dans le cas de la lumière :

$$E = E_{dist} = h\nu_{dist} = h\nu_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} = E_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} \ ;$$

$$p = p_{dist} = \frac{h\nu_{dist}}{c_{dist}} = \frac{h\nu_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}}{c.e^{\frac{2\Phi}{c^2}}} = \frac{h\nu_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}}{c} = p_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}} .$$

Il en résulte que les formules $E_{dist} = E_{loc}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ et $p_{dist} = \frac{h\nu_{dist}}{c_{dist}} = p_{loc}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$ s'appliquent aussi bien aux rayonnements qu'aux corps massifs.