

Les vitesses en Relativité restreinte

JP Chabert

Table des matières

1 Avertissement	2
2 Résumé	3
3 Introduction	3
4 La transformation de Lorentz	4
5 Contraction des règles et ralentissement des horloges	7
6 La formule relativiste de composition des vitesses colinéaires	8
7 Composition des vitesses non colinéaires	9
8 Vitesse et rapidité	12
9 La composition des rapidités dans l'espace	15
10 Métrique hyperbolique de l'espace des rapidités	16
11 Autres formules de trigonométrie hyperbolique	21
12 Aberration de la lumière	31
13 Effet Doppler relativiste	40
14 Un photon possède-t-il une énergie ?	45
15 Cinématique du choc élastique	47
16 Quadrivecteur vitesse et quadrivecteur énergie-impulsion	49
17 Propriétés mathématiques des quadrivecteurs	57
18 Echange d'un photon entre deux particules	67
19 Masse au repos et masse maupertuisienne	75

20 De l'espace des rapidités à l'espace des impulsions	79
21 Forces	84
22 Fonctions hyperboliques vectorielles	86
23 Petit formulaire sur les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques	98

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

- 01) Gravitation relativiste : introduction
 - Relativité restreinte :
- 02) Les vitesses en Relativité restreinte
 - Physique quantique :
- 03) Physique quantique : généralités
- 04) Physique quantique : l'aventure collective
 - Gravitation :
- 05) La relativité générale a-t-elle été prise en défaut ?
- 06) Gravitation relativiste : principes fondamentaux
- 07) Gravitation et critère de Schild
- 08) L'hypothèse du champ d'entraînement
- 09) Métriques et géodésiques
- 10) Tenseur de Ricci
- 11) Potentiel gravitationnel
- 12) Ni ou Schwarzschild ?

- 13) Gravitation et vide quantique
- 14) L'hypothèse du flux à double sens
- 15) Etude du système solaire en métrique de Ni
- 16) Etude des systèmes binaires en métrique de Ni
- 17) Sur la matière noire
- 18) Trous noirs et trous gris
- 19) Ondes gravitationnelles
- 20) Gravitation et cosmologie

2 Résumé

Une théorie de la gravitation doit évidemment être compatible, localement, avec la relativité restreinte. Voici donc quelques rappels sur cette théorie. Nous en profitons pour insister sur la notion de rapidité et sur la géométrie hyperbolique, que nous utiliserons par la suite.

3 Introduction

Nous allons parler ici des notions de vitesse et de rapidité, qui sont au cœur de la Relativité restreinte.

C'est d'ailleurs le paradoxe de la vitesse de la lumière qui a conduit Einstein à proposer sa théorie.

Rappelons brièvement l'histoire, pour ceux qui l'ignoreraient.

Évaluée pour la première fois par Ole Romer en 1666, grâce à l'observation des satellites de Jupiter, puis précisée par Michelson (1879), la vitesse de la lumière est proche de 300 000 km/s. Mais par rapport à quoi ?

Si la lumière se déplace à 300 000 km/s dans le vide (par rapport à un "éther" imaginaire), et si la Terre tourne autour du Soleil à 30 km/s, il est légitime de penser que les rayons lumineux de sens opposé à celui de la Terre (ceux qui viennent à notre rencontre) se déplacent à $300\,000 + 30 = 300\,030$ km/s par rapport à nous, tandis que les rayons de même sens que la Terre (ceux qui

nous rattrapent) se déplacent à $300\,000 - 30 = 299\,970$ km/s par rapport à nous.

Cette différence de 60 km/s doit pouvoir être mesurée.

Et si on ne trouve pas 60 km/s, c'est que d'autres éléments entrent en jeu : la vitesse du système solaire par rapport au centre de la galaxie, la vitesse du centre galactique par rapport au groupe local, etc.

Les célèbres expériences de Michelson (1881), puis Michelson et Morley (1887), basées sur un ingénieux système d'interférences, allaient trancher définitivement.

Et le résultat fut à la fois incroyable et indiscutable : la vitesse de la lumière par rapport à la Terre est toujours la même, dans toutes les directions, à toute heure et en toutes saisons ...

Pour résoudre ce paradoxe, une idée audacieuse était nécessaire ; c'est Einstein qui la proposa.

Cette idée, c'est que la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs se déplaçant les uns par rapport aux autres à vitesse constante ; ceci est possible si ces observateurs appréhendent l'espace et le temps de manière différente, chacun ayant ses propres critères pour évaluer les distances et les durées . C'est une idée d'une richesse incroyable : il suffit de tirer le fil, pour voir surgir toute la théorie de la Relativité.

4 La transformation de Lorentz

Plaçons-nous pour commencer dans un espace à une dimension (sur une droite) ; un observateur repèrera un événement quelconque par sa coordonnée spatiale (l'abscisse x du lieu où se produit l'événement) et par sa coordonnée temporelle (l'instant t).

Si un autre observateur, se déplaçant à la vitesse v par rapport au premier, observe le même événement, il lui attribuera d'autres coordonnées : x' et t' .

On suppose que les deux observateurs se sont mis d'accord sur l'origine du repère : si $x=0$ et $t=0$, alors $x'=0$ et $t'=0$. On suppose de plus que les coordonnées (x', t') s'obtiennent à partir de (x, t) de la manière la plus simple possible, à savoir par une transformation linéaire, et que cette transformation est symétrique : les mêmes formules doivent pouvoir être utilisées aussi bien pour calculer (x', t') en fonction de (x, t) , que pour calculer (x, t) en fonction de (x', t') ; seule la vitesse changera de signe.

Nous posons donc :

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta t ; \\ t' = \delta x + \gamma t. \end{cases}$$

Il faut calculer α , β , γ et δ . Pour cela, nous prenons en compte quatre contraintes :

a) Si $x = 0$: l'événement considéré est confondu (spatialement) avec le premier observateur, donc, pour le second, il doit vérifier : $x' = -v t'$ (puisque le premier observateur se déplace à la vitesse $-v$ par rapport au second). On a donc :

$$x' = \beta t, t' = \gamma t, x' = -v t', \text{ donc : } \beta = -v \gamma.$$

b) Si $x' = 0$: l'événement considéré est confondu (spatialement) avec le second observateur, donc, pour le premier, il doit vérifier : $x = v t$ (puisque le second observateur se déplace à la vitesse v par rapport au premier). On a donc :

$\alpha x + \beta t = 0$ et $x = v t$, donc $\alpha v + \beta = 0$, donc $\beta = -\alpha v$; ce qui implique que $\alpha = \gamma$.

Notre système devient :

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma v t \\ t' = \delta x + \gamma t \end{cases}$$

c) Si $x = c t$: cette équation traduit le déplacement d'un rayon lumineux parti du point origine à l'instant $t=0$; la vitesse de la lumière étant la même pour le second observateur, on aura nécessairement $x' = c t'$. Par conséquent :

$$x' = \gamma c t - \gamma v t, t' = \delta c t + \gamma t, x' = c t', \text{ d'où :}$$

$$\gamma c t - \gamma v t = \delta c^2 t + \gamma c t, \text{ donc } \delta = -\gamma \frac{v}{c^2}.$$

Notre système devient :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(-\frac{vx}{c^2} + t\right) \end{cases}$$

d) Par symétrie, on doit avoir aussi : $x = \gamma(x' + vt')$ et $t = \gamma\left(\frac{vx'}{c^2} + t'\right)$; faisons une substitution, par exemple dans la première des équations ci-dessus :

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma\left(\gamma(x' + vt') - v\gamma\left(\frac{vx'}{c^2} + t'\right)\right)$$

$$x' = \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} x' - \gamma^2 vt' = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x',$$

$$\text{donc } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Finalement, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \frac{-\frac{vx}{c^2} + t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Si on se place maintenant dans un espace à trois dimensions (la vitesse v étant toujours supposée parallèle à l'axe des x), on peut écrire :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(-\frac{vx}{c^2} + t\right) \end{cases}$$

$$\text{où } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ces formules célèbres, connues sous le nom de "transformation de Lorentz", nous propulsent d'emblée au cœur de la Relativité; elles ont eu un retentissement considérable sur l'ensemble de la physique : non seulement sur la conception de l'espace et du temps, mais aussi, entre autres, dans les domaines de l'électromagnétisme de Maxwell ou de l'énergie des atomes, où ce nouvel éclairage a apporté des simplifications spectaculaires.

On doit bien garder à l'esprit que la transformation de Lorentz n'est rien d'autre qu'un ensemble de formules de changement de repère : elle décrit le changement de "perspective" (ou de "point de vue") quand on passe d'un système inertiel (ou galiléen) à un autre. Ces systèmes inertiels sont des systèmes de coordonnées spatio-temporelles se déplaçant les uns par rapport aux autres à vitesse rectiligne et uniforme.

La transformation de Lorentz n'est pas censée décrire le passage d'un système inertiel à un système accéléré, ou en rotation. On peut s'en convaincre facilement :

- Imaginons un système inertiel associé à deux observateurs A et B; on pourra supposer que leur vitesse est nulle. Ils observent, par exemple, un point P immobile, situé à la distance x (dans leur repère commun). Supposons que

l'observateur B accélère en direction de P : sa vitesse passe de 0 à dv en un temps très court dt , puis se stabilise. Alors, pour B, la distance apparente de

P passe de x à $\frac{x}{\sqrt{1-\frac{(dv)^2}{c^2}}}$, ce qui fait une variation : $dx' = x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(dv)^2}{c^2}}} - 1 \right)$

pendant le temps dt ; ce qui donne une vitesse apparente $\frac{dx'}{dt'}$, qu'on peut calculer précisément en partant de la transformation de Lorentz, puis en dérivant x' et t' par rapport à t (attention : x est supposé constant, mais v est variable). Il est facile de choisir x , dv et dt de telle sorte que cette vitesse apparente soit égale ou supérieure à c . Mais la vitesse apparente n'est qu'une illusion !

- Imaginons maintenant que l'observateur B se mette à tourner sur lui-même, avec le repère qui lui est associé, à la vitesse angulaire ω . Alors, dans ce repère, le point P semblera tourner en sens inverse à la vitesse apparente $x \omega$. On peut très bien choisir x et ω de telle sorte que cette vitesse apparente soit égale ou supérieure à c .

Une vitesse égale (ou supérieure) à c pour un observateur, nulle pour l'autre ? Ceci semble contredire le postulat selon lequel la vitesse de la lumière serait une constante universelle ! Il faut donc préciser qu'elle est constante par rapport à tous les systèmes inertiels (galiléens). Les repères accélérés ou en rotation produisent des mirages ...

5 Contraction des règles et ralentissement des horloges

Imaginons deux observateurs (O et O') en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre ; supposons que le premier dispose d'une règle immobile par rapport à son repère, parallèle à la vitesse relative v , de longueur Δx . Le second observateur (O') note, à l'instant t' , la position apparente des extrémités de cette règle ; il enregistre leur distance $\Delta x'$. On a alors :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0, \text{ donc } \Delta t = \frac{v \Delta x}{c^2} ;$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x - \frac{v^2 \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x (1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x.$$

Ceci signifie que la règle paraîtra plus courte pour l'observateur O' que pour O : c'est ce qu'on appelle la contraction des règles en mouvement. Cette illusion vient du fait que O' croit observer les deux extrémités de la règle au même instant ; mais selon le point de vue de O, l'intervalle temporel Δt n'est pas nul : la simultanéité est une notion subjective.

Considérons maintenant une horloge liée au repère O ; le premier observateur note successivement deux positions des aiguilles, et note l'écart temporel Δt . L'horloge est immobile, donc $\Delta x = 0$. L'observateur O', pour les mêmes événements, note l'écart temporel :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ceci signifie que l'écart temporel va sembler plus long pour O' que pour O. C'est ce qu'on appelle le ralentissement des horloges en mouvement. Cette illusion vient du fait que les deux événements, observés "au même endroit" par O, sont vus "à des endroits différents" par O'.

6 La formule relativiste de composition des vitesses colinéaires

Plaçons-nous pour le moment dans un espace à une dimension (sur une droite) ; trois observateurs A, B, C se situent, à l'instant $t=0$, au point origine ($x=0$) et se déplacent à vitesse constante. Pour A, le mobile B se déplace à la vitesse v_1 (donc pour B, le déplacement de A est décrit par l'équation : $x_1 = -v_1 t$) ; pour B, le mobile C se déplace à la vitesse v_2 (équation : $x_2 = v_2 t$). Notons v_3 la vitesse de C mesurée par A. En mécanique classique (galiléenne), on aurait : $v_3 = v_1 + v_2$ et $v_2 = v_3 - v_1$. Ce n'est pas le cas en mécanique relativiste. On notera : $v_3 = v_1 \oplus v_2$, et $v_2 = v_3 \ominus v_1$.

Considérons l'ensemble des "points d'espace-temps" (événements) dont les coordonnées (x_2, t) , dans le repère lié à B, vérifient $x_2 = v_2 t$: c'est la trajectoire de C. Transformons x_2 et t par la transformation de Lorentz, pour voir comment apparaît cette trajectoire, vue par A (dont la vitesse par rapport à B est $-v_1$). On obtient :

$$x'_2 = \frac{x_2 + v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \text{ et } t' = \frac{\frac{v_1 x_2}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

Remplaçons x_2 par $v_2 t$; il vient :

$$x'_2 = \frac{v_2 t + v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \text{ et } t' = \frac{\frac{v_1 v_2 t}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

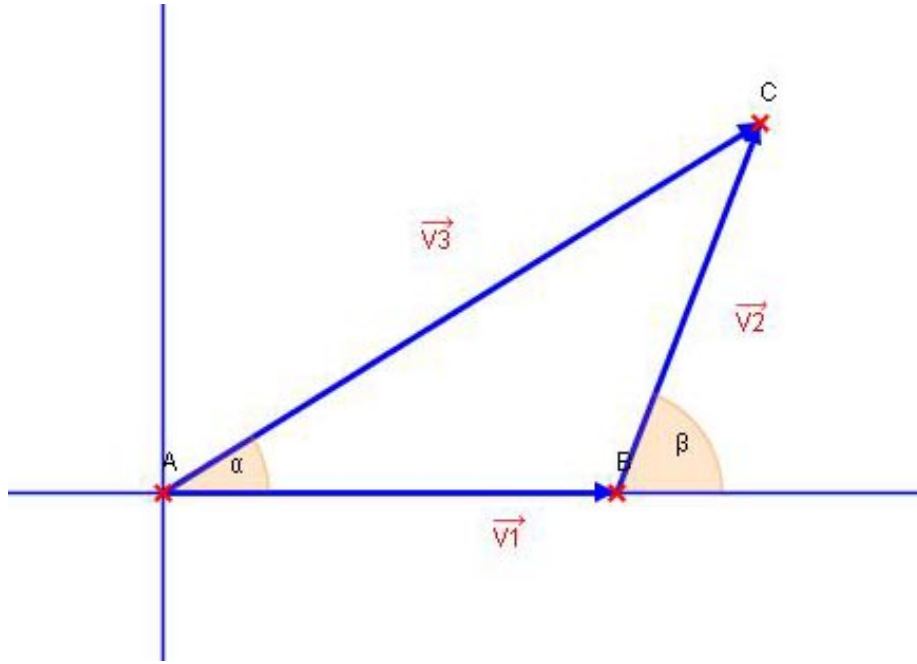
On obtient v_3 en divisant x'_2 par t' :

$$v_1 \oplus v_2 = v_3 = \frac{v_1 t + v_2 t}{\frac{v_1 v_2 t}{c^2} + t} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

La formule générale de la composition des vitesses colinéaires est donc :

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

7 Composition des vitesses non colinéaires



Nous nous plaçons maintenant dans un espace à deux dimensions (plan) ; le mobile B se déplace sur l'axe des abscisses à la vitesse v_1 (par rapport à A) ; le mobile C se déplace à la vitesse v_2 , par rapport à B, et sa direction forme, avec l'axe des abscisses, un angle β (selon le point de vue de B).

Donc pour B, la trajectoire de A est caractérisée par : $x_1 = -v_1 t$, $y_1 = 0$;

et celle de C est caractérisée par : $x_2 = v_2 t \cos\beta$, $y_2 = v_2 t \sin\beta$.

Par la transformation de Lorentz, transportons-nous en A, et étudions la trajectoire de C :

$$x'_2 = \frac{x_2 + v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, y'_2 = y_2 \text{ et } t' = \frac{\frac{v_1 x_2}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

Remplaçons x_2 par $v_2 t \cos\beta$, et y_2 par $v_2 t \sin\beta$:

$$x'_2 = \frac{v_2 t \cos\beta + v_1 t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, y'_2 = v_2 t \sin\beta, t' = \frac{\frac{v_1 v_2 t \cos\beta}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

La vitesse de C (observée par A) a une composante v_{3x} parallèle à l'axe des abscisses, et une composante v_{3y} parallèle à l'axe des ordonnées.

$$\begin{cases} v_{3x} = \frac{x'_2}{t'} = \frac{v_2 t \cos\beta + v_1 t}{\frac{v_1 v_2 t \cos\beta}{c^2} + t}; \\ v_{3y} = \frac{y'_2}{t'} = \frac{v_2 t \sin\beta}{\frac{v_1 v_2 t \cos\beta}{c^2} + t} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{3x} = \frac{v_2 \cos\beta + v_1}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos\beta}{c^2}}; \\ v_{3y} = \frac{v_2 \sin\beta}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos\beta}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}. \end{cases}$$

On peut interpréter cette formule de manière simple. Décomposons le vecteur $\vec{v}_2$ en deux composantes, l'une parallèle à $\vec{v}_1$, l'autre perpendiculaire à $\vec{v}_1$. La première composante a pour mesure $v_2 \cos\beta$, la seconde $v_2 \sin\beta$. Multiplions la seconde composante par $\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$. Appelons $\vec{v}'_2$ le vecteur ainsi obtenu. Sa composante parallèle à $\vec{v}_1$ est donc $v_2 \cos\beta$ (comme celle de $\vec{v}_2$), et sa composante perpendiculaire à $\vec{v}_1$ est $v_2 \sin\beta \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$. On a alors :

$$\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}'_2}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}'_2}{c^2}} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}'_2}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos\beta}{c^2}}.$$

On peut remarquer que la composition des vitesses n'est pas commutative, car $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \neq \vec{v}'_1 + \vec{v}_2$.

Calculons le module de v_3 :

$$v_3^2 = v_{3x}^2 + v_{3y}^2 = \frac{(v_2 \cos\beta + v_1)^2 + (v_2 \sin\beta)^2 (1 - \frac{v_1^2}{c^2})}{(1 + \frac{v_1 v_2 \cos\beta}{c^2})^2};$$

$$v_3^2 = \frac{v_2^2 \cos^2\beta + 2v_1 v_2 \cos\beta + v_1^2 + v_2^2 \sin^2\beta - \frac{v_1^2 v_2^2 \sin^2\beta}{c^2}}{(1 + \frac{v_1 v_2 \cos\beta}{c^2})^2}$$

$$v_3^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\beta - \frac{v_1^2 v_2^2 (1 - \cos^2\beta)}{c^2}}{(1 + \frac{v_1 v_2 \cos\beta}{c^2})^2};$$

$$v_3^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\beta - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2 \cos^2\beta}{c^2}}{(1 + \frac{v_1 v_2 \cos\beta}{c^2})^2};$$

$$\begin{aligned}
v_3^2 &= \frac{\left(c + \frac{v_1 v_2 \cos \beta}{c}\right)^2 - c^2 + v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v_1 v_2 \cos \beta}{c^2}\right)^2} ; \\
v_3^2 &= \frac{c^2 \left(1 + \frac{v_1 v_2 \cos \beta}{c^2}\right)^2 - c^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{v_1^2 v_2^2}{c^4}\right)}{\left(1 + \frac{v_1 v_2 \cos \beta}{c^2}\right)^2} ; \\
v_3^2 &= c^2 - \frac{c^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v_1 v_2 \cos \beta}{c^2}\right)^2} ; \\
v_3 &= c \sqrt{1 - \frac{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v_1 v_2 \cos \beta}{c^2}\right)^2}} .
\end{aligned}$$

Appelons γ l'angle du triangle ayant pour sommet B (donc le supplémentaire de β) ; alors :

$$v_3 = c \sqrt{1 - \frac{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_1 v_2 \cos \gamma}{c^2}\right)^2}} .$$

De même, pour l'angle α , par exemple :

$$v_2 = c \sqrt{1 - \frac{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_3^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_1 v_3 \cos \alpha}{c^2}\right)^2}} .$$

On peut écrire aussi :

$$1 - \frac{v_2^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v_3^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v_1 v_3 \cos \alpha}{c^2}\right)^2}$$

Cette égalité montre clairement que, si deux des vitesses v_1 , v_2 et v_3 sont strictement inférieures à c , la troisième l'est aussi.

Dans un but qui apparaîtra plus loin, exprimons encore $\cos \alpha$ en fonction des trois vitesses :

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{v_1 v_3 \cos \alpha}{c^2}\right) \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} &= \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}} \\
\cos \alpha &= \frac{c^2}{v_1 v_3} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}\right)
\end{aligned}$$

8 Vitesse et rapidité

Revenons à la dimension un (déplacements sur une droite). Composons une vitesse v quelconque avec une vitesse élémentaire dw ; nous obtenons :

$$\frac{v + dw}{1 + \frac{v dw}{c^2}}$$

La variation de la vitesse v est alors :

$$dv = \frac{v + dw}{1 + \frac{v dw}{c^2}} - v = \frac{v + dw}{1 + \frac{v dw}{c^2}} - \frac{v + \frac{v^2 dw}{c^2}}{1 + \frac{v dw}{c^2}} = \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})dw}{1 + \frac{v dw}{c^2}}.$$

Si on fait tendre dw vers 0, le quotient $\frac{dv}{dw}$ tend vers $1 - \frac{v^2}{c^2}$, ou, si on préfère :
 $dw = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma$ (pour dv et dw "infinitement petits").

En intégrant, nous obtenons :

$w = c \operatorname{Log} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ (à une constante près, que nous supposons nulle, pour avoir $w=0$ quand $v=0$). Ce qui nous donne la formule fondamentale :

$$\frac{w}{c} = \operatorname{Log} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} \frac{w}{c}.$$

(La fonction th est la tangente hyperbolique ; nous utiliserons aussi les fonctions ch et sh , qui représentent le cosinus et le sinus hyperboliques. En cas de besoin, on pourra se reporter au petit aide-mémoire qui figure à la fin de cet article.)

Par opposition à la vitesse usuelle (v), on donne parfois le nom de "rapidité" à w .

Remarquons que w tend vers l'infini quand v tend vers c .

Cette "rapidité" peut être utilisée avec profit en mécanique relativiste : nous dirons plus loin quelques mots sur ses liens avec l'impulsion et l'énergie.

L'autre intérêt des rapidités est qu'elles s'additionnent comme en mécanique classique (au moins lorsqu'elles sont colinéaires).

Nous avons introduit plus haut dw comme étant une "vitesse élémentaire", et ensuite nous avons constaté que $dv \neq dw$, puis nous avons défini w comme une rapidité et non une vitesse. Mais alors faut-il considérer dw comme une

vitesse ou comme une rapidité? En réalité, les "vitesses élémentaires" et les "rapidités élémentaires" sont une seule et même chose (si $v = 0$, on a $dv = dw$), mais c'est la façon de les combiner qui diffère. Si on raisonne en termes de vitesse, on pense d'abord à l'addition des vitesses, qui est une addition vectorielle usuelle, particulièrement simple; mais ici nous nous intéressons à la composition des vitesses, introduite par la relativité restreinte; dans ce cadre, elle est d'une manipulation particulièrement délicate. L'idée est de rechercher un cadre plus adapté. En partant des mêmes "rapidités élémentaires", on souhaite conserver autant que possible la notion d'addition vectorielle (ou tout au moins l'un de ses aspects : la relation de Chasles). Cette démarche permet de construire, à partir des mêmes briques élémentaires (dw), un nouvel ensemble : l'ensemble des rapidités. L'ensemble des vitesses, muni de l'opération "composition", et l'ensemble des rapidités, muni d'une sorte d'addition, n'ont pas la même structure, mais présentent des correspondances instructives.

Considérons deux vitesses usuelles (sur une même droite) : v_1 et v_2 , et leur composée : $v = v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$. Appelons w_1 , w_2 , w les rapidités associées à v_1 , v_2 et v . L'égalité ci-dessus donne :

$$th \frac{w}{c} = \frac{th \frac{w_1}{c} + th \frac{w_2}{c}}{1 + th \frac{w_1}{c} th \frac{w_2}{c}} = th \frac{w_1 + w_2}{c},$$

ce qui entraîne que $w = w_1 + w_2$.

Nous avons dit que $th \frac{w}{c} = \frac{v}{c}$; par conséquent :

$$ch \frac{w}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2 \frac{w}{c}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$sh \frac{w}{c} = th \frac{w}{c} ch \frac{w}{c} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Revenons à la transformation de Lorentz, sous sa forme la plus simple (dimension un).

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = x ch \frac{w}{c} - ct sh \frac{w}{c};$$

$$ct' = c \frac{-\frac{vx}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -x sh \frac{w}{c} + ct ch \frac{w}{c}.$$

Ceci peut s'exprimer simplement par une matrice :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \text{ ou encore :}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ ix' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & i sh \frac{w}{c} \\ -i sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{iw}{c} & \sin \frac{iw}{c} \\ -\sin \frac{iw}{c} & \cos \frac{iw}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix \end{pmatrix}.$$

(Rappelons que $\cos i\phi = ch \phi$ et que $\sin i\phi = i sh \phi$.)

La dernière matrice présente une ressemblance formelle avec celle d'une rotation, mais avec un angle imaginaire : $\frac{iw}{c}$; ne cherchons pas à l'interpréter ; notons seulement que les rotations conservent les longueurs, donc $(ct')^2 + (ix')^2 = (ct)^2 + (ix)^2$, ou $c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$; notons $s = \sqrt{c^2 t^2 - x^2}$ (ou, si on préfère : $s = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$) ; s est l'invariant de Minkowski (distance d'espace-temps).

Remarquons encore que l'additivité des rapidités est confirmée par l'égalité suivante :

$$\begin{pmatrix} ch \frac{w_1}{c} & -sh \frac{w_1}{c} \\ -sh \frac{w_1}{c} & ch \frac{w_1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ch \frac{w_2}{c} & -sh \frac{w_2}{c} \\ -sh \frac{w_2}{c} & ch \frac{w_2}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w_1+w_2}{c} & -sh \frac{w_1+w_2}{c} \\ -sh \frac{w_1+w_2}{c} & ch \frac{w_1+w_2}{c} \end{pmatrix}$$

Dans un espace de dimension 3 (donc dans l'espace-temps de Minkowski, de dimension 4) la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} & 0 & 0 \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ou bien :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ ix' \\ iy' \\ iz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & i sh \frac{w}{c} & 0 & 0 \\ -i sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix \\ iy \\ iz \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ ix' \\ iy' \\ iz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{iw}{c} & \sin \frac{iw}{c} & 0 & 0 \\ -\sin \frac{iw}{c} & \cos \frac{iw}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix \\ iy \\ iz \end{pmatrix},$$

où la vitesse relative des deux observateurs est supposée parallèle à l'axe des x ; l'invariant de Minkowski (conservé par cette transformation) est : $s = \sqrt{c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$.

Nous pouvons exprimer la transformation de Lorentz d'une autre manière encore :

$$ct' + x' = (ct ch \frac{w}{c} - x sh \frac{w}{c}) + (x ch \frac{w}{c} - ct sh \frac{w}{c}) = (ct + x)(ch \frac{w}{c} - sh \frac{w}{c}) ;$$

$$ct' - x' = (ct \operatorname{ch} \frac{w}{c} - x \operatorname{sh} \frac{w}{c}) - (x \operatorname{ch} \frac{w}{c} - ct \operatorname{sh} \frac{w}{c}) = (ct - x)(\operatorname{ch} \frac{w}{c} + \operatorname{sh} \frac{w}{c}).$$

Comme $\operatorname{ch} \frac{w}{c} - \operatorname{sh} \frac{w}{c} = e^{-\frac{w}{c}}$ et $\operatorname{ch} \frac{w}{c} + \operatorname{sh} \frac{w}{c} = e^{\frac{w}{c}}$, on obtient :

$$ct' + x' = (ct + x)e^{-\frac{w}{c}} \text{ et } ct' - x' = (ct - x)e^{\frac{w}{c}} ; \text{ en r\'esum\'e :}$$

$$\begin{pmatrix} ct' - x' \\ ct' + x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{w}{c}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{w}{c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct - x \\ ct + x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant \'etudier la composition des rapidit\'es dans l'espace \`a deux (ou trois) dimensions.

9 La composition des rapidit\'es dans l'espace

Reprenons la formule du cosinus, \'etablie dans la section sur la composition des vitesses dans l'espace :

$$\cos \alpha = \frac{c^2}{v_1 v_3} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \right)$$

et remplaçons $\frac{v_i}{c}$ par $\operatorname{th} \frac{w_i}{c}$ (i=1, 2, 3).

Remarquons que $\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \frac{w_i}{c}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{w_i}{c}}$. Nous obtenons :

$$\cos \alpha = \frac{c^2}{v_1 v_3} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\operatorname{th} \frac{w_1}{c} \operatorname{th} \frac{w_3}{c}} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \right) ;$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{th} \frac{w_1}{c} \operatorname{th} \frac{w_3}{c}} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{w_2}{c}}{\operatorname{ch} \frac{w_1}{c} \operatorname{ch} \frac{w_3}{c}} \right) ;$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ch} \frac{w_1}{c} \operatorname{ch} \frac{w_3}{c}}{\operatorname{sh} \frac{w_1}{c} \operatorname{sh} \frac{w_3}{c}} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{w_1}{c} \operatorname{ch} \frac{w_3}{c} - \operatorname{ch} \frac{w_2}{c}}{\operatorname{ch} \frac{w_1}{c} \operatorname{ch} \frac{w_3}{c}} \right) ;$$

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ch} \frac{w_1}{c} \operatorname{ch} \frac{w_3}{c} - \operatorname{ch} \frac{w_2}{c}}{\operatorname{sh} \frac{w_1}{c} \operatorname{sh} \frac{w_3}{c}} ;$$

$$\operatorname{ch} \frac{w_2}{c} = \operatorname{ch} \frac{w_1}{c} \operatorname{ch} \frac{w_3}{c} - \operatorname{sh} \frac{w_1}{c} \operatorname{sh} \frac{w_3}{c} \cos \alpha.$$

Nous reconnaissons ici la "loi des cosinus" (ou th\'eor\`eme d'Al-Kashi) sous sa version hyperbolique. Ceci signifie que si nous voulons repr\'esenter les rapidit\'es dans un espace tridimensionnel (l'"espace des rapidit\'es"), cet espace ne peut

pas être euclidien : il doit être hyperbolique (à courbure négative constante).

Bien entendu, la formule ci-dessus est valable pour les autres angles du triangle : il suffit de permuter convenablement les mesures des côtés, c'est-à-dire w_1 , w_2 et w_3 .

10 Métrique hyperbolique de l'espace des rapidités

Précisons d'abord le plus clairement possible ce qu'est cet espace des rapidités.

On peut imaginer qu'un observateur (lié à un repère galiléen) mesure les vitesses de différents mobiles par rapport à lui-même ; à chaque mobile, il associe un vecteur vitesse, qu'il peut représenter par un point dans un "diagramme des vitesses" (boule de rayon c dans un espace à 3 dimensions), ou dans un "diagramme des rapidités" (rayon infini). Deux mobiles galiléens ayant la même vitesse sont représentés par un même point. Bien entendu, la rapidité ainsi définie est de même direction que la vitesse correspondante, mais pas de même module, puisque $\frac{v}{c} = th \frac{w}{c}$.

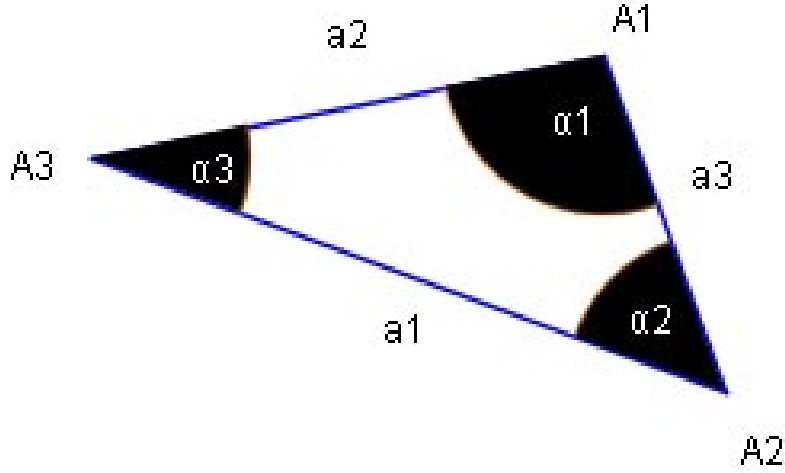
On désire définir la notion de distance dans le diagramme des rapidités ; celui-ci deviendra alors un espace métrique, au sens mathématique du terme. Pour cela, on commence par les droites passant par l'origine O . Deux points A_1 et A_2 situés sur une telle droite représentent les rapidités de deux mobiles M_1 et M_2 (relatives à O) : $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ (vecteurs colinéaires). On définit les distances de la façon suivante : $OA_1 = \frac{w_1}{c}$, $OA_2 = \frac{w_2}{c}$ et $A_1A_2 = \frac{w_2}{c} - \frac{w_1}{c}$ (en supposant $w_2 > w_1$). Ceci est cohérent en raison de l'additivité des rapidités colinéaires : $w_2 - w_1$ est la rapidité de M_2 par rapport à M_1 , mesurée par M_1 (ou M_2).

Supposons maintenant que les points O , A_1 et A_2 ne soient pas alignés (autrement dit que $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ ne soient pas colinéaires). Les trois points forment un triangle (trois côtés, trois angles) mais l'observateur initial n'est habilité que pour faire trois mesures : deux longueurs de côtés (OA_1 et OA_2) et un angle : $\widehat{A_1OA_2}$; pour le troisième côté (A_1A_2) et les deux autres angles ($\widehat{OA_1A_2}$ et $\widehat{OA_2A_1}$) il doit "demander l'avis" de M_1 et M_2 . Il faut donc faire un changement de repère galiléen, ce qui se fait grâce à la transformation de Lorentz.

On doit bien se rappeler que les côtés des triangles représentent des rapidités relatives, et non des distances spatiales ; la rapidité relative entre deux mobiles doit être mesurée par un observateur lié à l'un ou à l'autre de ces mobiles, ou ayant la même rapidité que l'un d'eux ; les autres observateurs ne sont pas qualifiés pour faire cette mesure. Un observateur est qualifié pour mesurer l'angle

entre deux rapidités s'il est qualifié pour mesurer les deux rapidités.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente (et également dans la section 5), il est possible, connaissant les mesures des trois côtés d'un triangle, de calculer la mesure d'un angle.



Notons $a_1 = \frac{w_1}{c}$, $a_2 = \frac{w_2}{c}$ et $a_3 = \frac{w_3}{c}$ les mesures des trois côtés, et α_1 , α_2 et α_3 les mesures des angles opposés, respectivement, à ces trois côtés. D'après les calculs qui précèdent (et qui se basent, rappelons-le, sur la transformation de Lorentz), on a :

$$\cos \alpha_1 = \frac{\text{ch}(a_2) \text{ch}(a_3) - \text{ch}(a_1)}{\text{sh}(a_2) \text{sh}(a_3)} ;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\text{ch}(a_3) \text{ch}(a_1) - \text{ch}(a_2)}{\text{sh}(a_3) \text{sh}(a_1)} ;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{\text{ch}(a_1) \text{ch}(a_2) - \text{ch}(a_3)}{\text{sh}(a_1) \text{sh}(a_2)} .$$

$$\text{ch}(a_1) = \text{ch}(a_2) \cdot \text{ch}(a_3) - \text{sh}(a_2) \cdot \text{sh}(a_3) \cdot \cos \alpha_1 ;$$

$$\text{ch}(a_2) = \text{ch}(a_3) \cdot \text{ch}(a_1) - \text{sh}(a_3) \cdot \text{sh}(a_1) \cdot \cos \alpha_2 ;$$

$$\text{ch}(a_3) = \text{ch}(a_1) \cdot \text{ch}(a_2) - \text{sh}(a_1) \cdot \text{sh}(a_2) \cdot \cos \alpha_3 .$$

$$\text{ch} \left(\frac{w_3}{c} \right) = \text{ch} \left(\frac{w_1}{c} \right) \cdot \text{ch} \left(\frac{w_2}{c} \right) - \text{sh} \left(\frac{w_1}{c} \right) \cdot \text{sh} \left(\frac{w_2}{c} \right) \cdot \cos \alpha_3 .$$

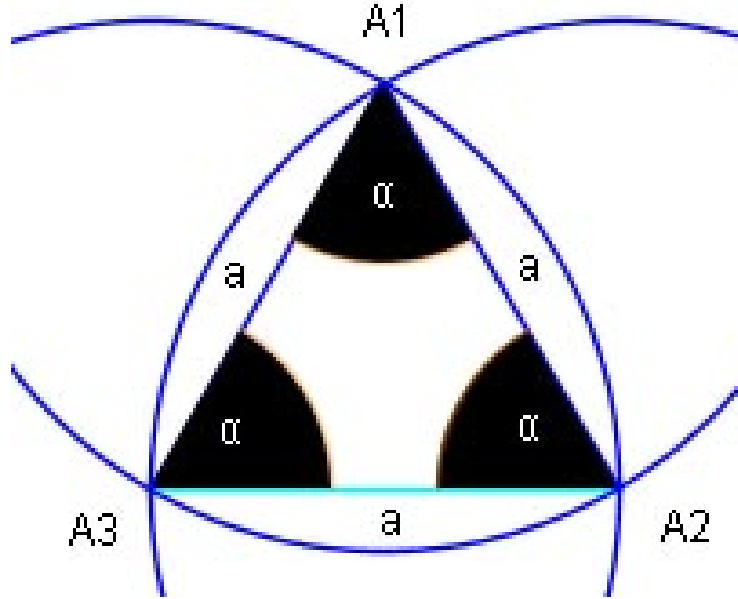
On peut considérer que $A_3\vec{A}_2 = \frac{\vec{w}_1}{c}$ et que $A_3\vec{A}_1 = \frac{\vec{w}_2}{c}$; on a alors : $A_1\vec{A}_2 = A_1\vec{A}_3 + A_3\vec{A}_2 = \frac{\vec{w}_2}{c} - \frac{\vec{w}_1}{c}$. Si nous appelons ϕ l'angle formé par les deux rapidités $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ ($\phi = \alpha_3$), cette dernière égalité s'écrit :

$$\text{ch}\left(\frac{w_2 - w_1}{c}\right) = \text{ch}\left(\frac{w_1}{c}\right) \cdot \text{ch}\left(\frac{w_2}{c}\right) - \text{sh}\left(\frac{w_1}{c}\right) \cdot \text{sh}\left(\frac{w_2}{c}\right) \cdot \cos\phi.$$

Cette formule est appelée : **loi des cosinus** ou **théorème d'Al-Kashi hyperbolique** ; elle est caractéristique des espaces hyperboliques (espaces de Lobatchevski, ou espaces de Riemann à courbure négative constante). C'est une clé tout-à-fait remarquable pour pénétrer dans l'univers des espaces hyperboliques : en effet, à partir de cette seule formule, il est possible d'en démontrer une multitude d'autres.

L'une des conséquences de la courbure hyperbolique est que la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° .

A titre d'exemple, imaginons un triangle équilatéral ayant pour côtés : $a_1 = a_2 = a_3 = a$, et pour angles : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.



$$\cos\alpha = \frac{\text{ch}^2(a) - \text{ch}(a)}{\text{sh}^2(a)} = \frac{\text{ch}(a)(\text{ch}(a) - 1)}{\text{ch}^2(a) - 1} = \frac{\text{ch}(a)(\text{ch}(a) - 1)}{(\text{ch}(a) + 1)(\text{ch}(a) - 1)} ;$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{ch}(a)}{\text{ch}(a) + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\text{ch}(a)}}.$$

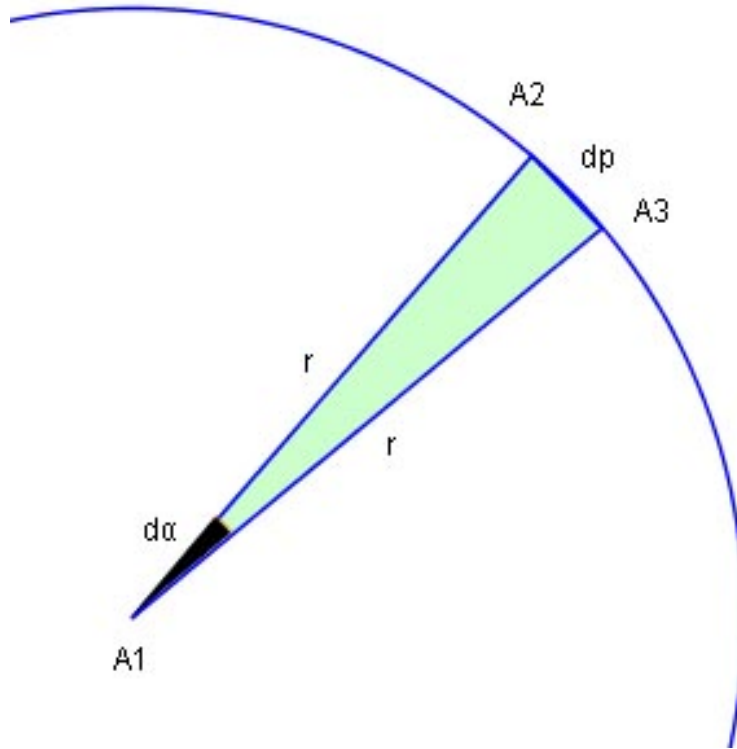
Quand a tend vers 0, $ch(a)$ tend vers 1, donc $cos\alpha$ tend vers 0.5, α tend vers 60° , et la somme des angles du triangle tend vers 180° .

Quand a tend vers l'infini, $ch(a)$ tend vers l'infini, donc $cos\alpha$ tend vers 1, α tend vers 0° , et la somme des angles du triangle tend vers 0° .

Une autre particularité des espaces hyperboliques est que le périmètre d'un cercle divisé par son diamètre donne un quotient supérieur à π .

Considérons un triangle ayant deux côtés égaux : $a_2 = a_3 = r$ (deux rayons d'un même cercle) et un troisième côté "infinitésimal" : $a_1 = dp$. Notons $d\alpha = d\alpha_1$ l'angle (infinitésimal) opposé à dp .

$$\cos(d\alpha) = \frac{ch^2(r) - ch(dp)}{sh^2(r)}$$



Remplaçons $\cos(d\alpha)$ par $1 - \frac{(d\alpha)^2}{2}$ et $ch(dp)$ par $1 + \frac{(dp)^2}{2}$ (développements

limités); nous obtenons :

$$1 - \frac{(d\alpha)^2}{2} = \frac{ch^2(r) - (1 + \frac{(dp)^2}{2})}{sh^2(r)} = \frac{sh^2(r) - \frac{(dp)^2}{2}}{sh^2(r)} = 1 - \frac{(dp)^2}{2 sh^2(r)}$$

donc $dp = sh(r) d\alpha$.

En intégrant de 0 à 2π , on obtient le périmètre : $p = 2\pi sh(r)$.

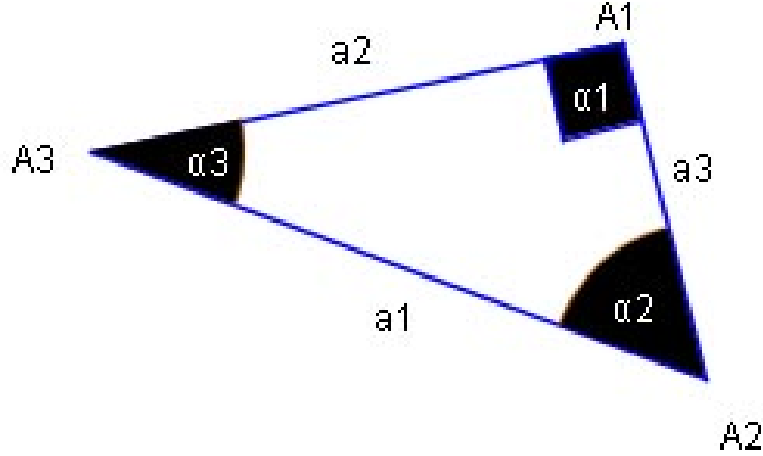
Le quotient du périmètre du cercle par son diamètre est donc égal à $\pi \frac{sh(r)}{r}$.

Quand r tend vers 0, ce quotient tend vers π ; quand r tend vers l'infini, il tend vers l'infini.

Une conséquence importante est la suivante : quand on compose une rapidité $\vec{w}$ avec une rapidité élémentaire $d\vec{w}$ perpendiculaire à $\vec{w}$ (accélération normale), la rapidité $\vec{w}$ tourne d'un angle $d\alpha$ donné par la formule :

$$d\alpha = \frac{dw}{c sh \frac{w}{c}}.$$

Appliquons maintenant la loi des cosinus à un triangle rectangle, pour obtenir l'équivalent du théorème de Pythagore en géométrie hyperbolique; posons $\alpha_1 = 90^\circ$.



$$\text{On a : } \cos \alpha_1 = \frac{ch(a_2) ch(a_3) - ch(a_1)}{sh(a_2) sh(a_3)} = 0, \text{ et, par conséquent :}$$

$$ch(a_1) = ch(a_2) ch(a_3).$$

Dans un triangle rectangle hyperbolique, le cosinus hyperbolique de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus hyperboliques des deux autres côtés.

Si les côtés du triangle sont suffisamment petits, on peut remplacer $ch(a_1)$, $ch(a_2)$ et $ch(a_3)$ par $1 + \frac{a_1^2}{2}$, $1 + \frac{a_2^2}{2}$ et $1 + \frac{a_3^2}{2}$ (développements limités au second ordre) ; l'égalité devient : $1 + \frac{a_1^2}{2} \approx (1 + \frac{a_2^2}{2})(1 + \frac{a_3^2}{2}) \approx 1 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{2}$, d'où on tire : $\frac{a_1^2}{2} \approx \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{2}$, donc $a_1^2 \approx a_2^2 + a_3^2$, ce qui est la forme classique du théorème de Pythagore.

Pour utiliser efficacement l'espace des rapidités, il est important de bien comprendre que ce n'est pas un espace vectoriel (ou affine) : la notion de parallélisme n'y est pas définie comme dans un espace euclidien ; les parallélogrammes n'existent pas ; par conséquent, l'égalité vectorielle et l'addition vectorielle (définie selon la "règle du parallélogramme") n'ont aucun sens. Ce qu'on peut définir, c'est la composition de déplacements. Un déplacement équivaut à un changement d'origine, autrement dit à un changement de repère galiléen. On peut donc considérer que la transformation de Lorentz a pour rôle de définir la notion de déplacement dans l'espace des rapidités.

On peut se demander si le recours aux rapidités ne complique pas les calculs : tout ce qui peut être calculé à l'aide des rapidités peut l'être aussi avec les vitesses, sans faire intervenir un espace hyperbolique. Mais la composition des vitesses, relativement simple en dimension un, se complique beaucoup en dimensions deux ou trois ; le recours aux rapidités peut être alors plus efficace, à condition de posséder la boîte à outils adaptée : un formulaire aussi complet que possible de triangulation hyperbolique.

11 Autres formules de trigonométrie hyperbolique

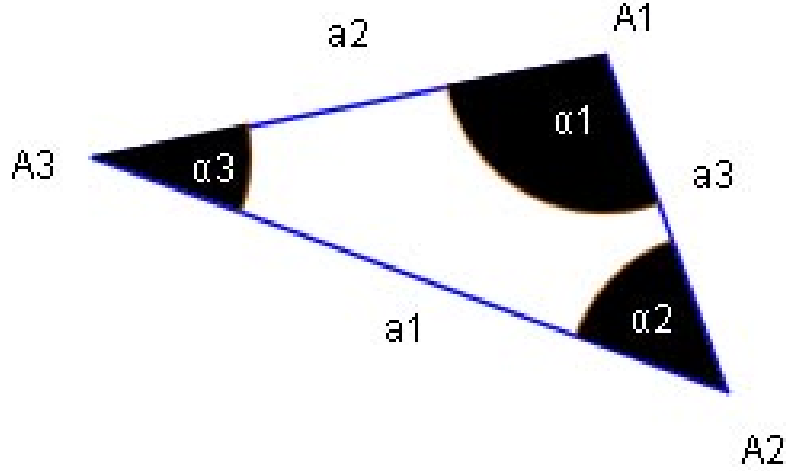
Voici encore quelques formules concernant le triangle quelconque ; toutes peuvent être démontrées à l'aide de la loi des cosinus.

$$\text{Loi des sinus : } \frac{\sin(\alpha_1)}{sh(a_1)} = \frac{\sin(\alpha_2)}{sh(a_2)} = \frac{\sin(\alpha_3)}{sh(a_3)}.$$

On peut écrire aussi :

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha_1).sh^2(a_2).sh^2(a_3) &= \sin^2(\alpha_2).sh^2(a_3).sh^2(a_1) = \sin^2(\alpha_3).sh^2(a_1).sh^2(a_2) \\ \dots &= 1 + 2 ch(a_1).ch(a_2).ch(a_3) - (ch^2(a_1) + ch^2(a_2) + ch^2(a_3)). \end{aligned}$$

Connaissant les mesures des trois angles d'un triangle, il est possible de calculer les mesures des trois côtés. Ceci peut surprendre, car c'est évidemment



impossible en géométrie euclidienne! On utilisera les formules suivantes :

$$ch(a_1) = \frac{\cos(\alpha_2) \cdot \cos(\alpha_3) + \cos(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2) \cdot \sin(\alpha_3)}$$

$$ch(a_2) = \frac{\cos(\alpha_3) \cdot \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_3) \cdot \sin(\alpha_1)}$$

$$ch(a_3) = \frac{\cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2)}$$

Nous dirons que deux formules sont conjuguées si on peut passer de l'une à l'autre en remplaçant $ch(a_n)$ par $-\cos(\alpha_n)$, $\cos(\alpha_n)$ par $-ch(a_n)$, $sh(a_n)$ par $i \sin(\alpha_n)$, $\sin(\alpha_n)$ par $-i sh(a_n)$ ($n=1,2,3$). On peut vérifier que les trois formules ci-dessus sont les conjuguées des trois formules de base (qui constituent la loi des cosinus). D'autre part, les formules $\cos^2(\alpha_n) + \sin^2(\alpha_n) = 1$ et $ch^2(a_n) - sh^2(a_n) = 1$ sont aussi conjuguées. Donc si une autre formule, construite à partir de ces briques élémentaires, est vraie, sa conjuguée le sera aussi.

Connaissant un côté et ses deux angles adjacents, on peut calculer l'angle opposé grâce aux formules suivantes, qui découlent directement des précédentes (puis on utilise la loi des sinus pour obtenir les deux autres côtés) :

$$\cos(\alpha_1) = ch(a_1) \cdot \sin(\alpha_2) \cdot \sin(\alpha_3) - \cos(\alpha_2) \cdot \cos(\alpha_3)$$

$$\cos(\alpha_2) = ch(a_2) \cdot \sin(\alpha_3) \cdot \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_3) \cdot \cos(\alpha_1)$$

$$\cos(\alpha_3) = ch(a_3) \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2)$$

On peut remarquer que, si $a_1 \neq 0$, alors $ch(a_1) > 1$, donc :

$$cos(\alpha_1) > sin(\alpha_2).sin(\alpha_3) - cos(\alpha_2).cos(\alpha_3)$$

$$cos(\alpha_1) > -cos(\alpha_2 + \alpha_3)$$

$$cos(\alpha_1) > cos(\pi - (\alpha_2 + \alpha_3))$$

$$\alpha_1 < \pi - (\alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$$

Ceci prouve que la somme des angles d'un triangle quelconque (à côtés non nuls) est toujours inférieure à 180° .

Connaissant un angle et ses deux côtés adjacents, on peut calculer le côté opposé (puis on utilise la loi des sinus pour obtenir les deux autres angles) :

$$ch(a_1) = ch(a_2).ch(a_3) - sh(a_2).sh(a_3).cos(\alpha_1)$$

$$ch(a_2) = ch(a_3).ch(a_1) - sh(a_3).sh(a_1).cos(\alpha_2)$$

$$ch(a_3) = ch(a_1).ch(a_2) - sh(a_1).sh(a_2).cos(\alpha_3)$$

Connaissant deux côtés et les deux angles opposés, on peut calculer le troisième angle et le troisième côté :

$$cos(\alpha_1) = \frac{ch(a_2).ch(a_3).sin(\alpha_2).sin(\alpha_3) - cos(\alpha_2).cos(\alpha_3)}{sh(a_2).sh(a_3).sin(\alpha_2).sin(\alpha_3) + 1}$$

$$cos(\alpha_2) = \frac{ch(a_3).ch(a_1).sin(\alpha_3).sin(\alpha_1) - cos(\alpha_3).cos(\alpha_1)}{sh(a_3).sh(a_1).sin(\alpha_3).sin(\alpha_1) + 1}$$

$$cos(\alpha_3) = \frac{ch(a_1).ch(a_2).sin(\alpha_1).sin(\alpha_2) - cos(\alpha_1).cos(\alpha_2)}{sh(a_1).sh(a_2).sin(\alpha_1).sin(\alpha_2) + 1}$$

$$ch(a_1) = \frac{cos(\alpha_2).cos(\alpha_3).sh(a_2).sh(a_3) + ch(a_2).ch(a_3)}{sin(\alpha_2).sin(\alpha_3).sh(a_2).sh(a_3) + 1}$$

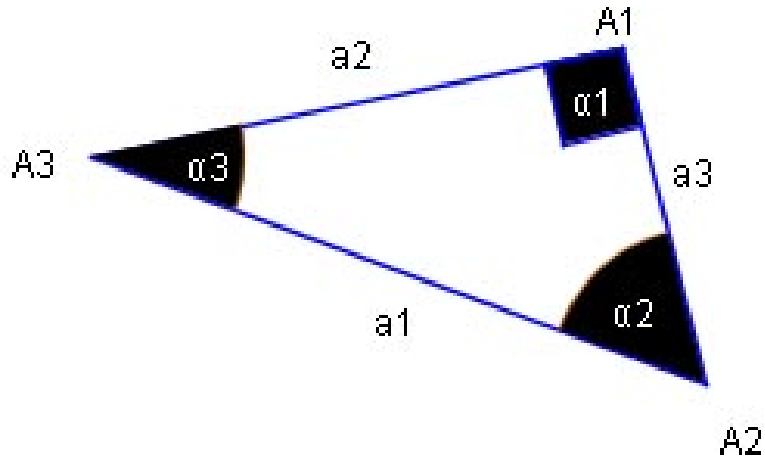
$$ch(a_2) = \frac{cos(\alpha_3).cos(\alpha_1).sh(a_3).sh(a_1) + ch(a_3).ch(a_1)}{sin(\alpha_3).sin(\alpha_1).sh(a_3).sh(a_1) + 1}$$

$$ch(a_3) = \frac{cos(\alpha_1).cos(\alpha_2).sh(a_1).sh(a_2) + ch(a_1).ch(a_2)}{sin(\alpha_1).sin(\alpha_2).sh(a_1).sh(a_2) + 1}$$

Revenons maintenant sur le triangle rectangle ; on supposera que $\alpha_1 = 90^\circ$; l'hypoténuse est donc a_1 . On a déjà vu que $ch(a_1) = ch(a_2).ch(a_3)$.

On peut démontrer de nombreuses autres formules ; en voici quelques-unes.

Calcul des côtés connaissant les angles :



$$ch(a_1) = \frac{1}{\tan(\alpha_2) \cdot \tan(\alpha_3)}$$

$$ch(a_2) = \frac{\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_3)}$$

$$ch(a_3) = \frac{\cos(\alpha_3)}{\sin(\alpha_2)}$$

Calcul des angles connaissant les côtés :

$$\cos(\alpha_2) = \frac{ch(a_2) \cdot sh(a_3)}{sh(a_1)} = \frac{th(a_3)}{th(a_1)}$$

$$\cos(\alpha_3) = \frac{ch(a_3) \cdot sh(a_2)}{sh(a_1)} = \frac{th(a_2)}{th(a_1)}$$

$$\sin(\alpha_2) = \frac{sh(a_2)}{sh(a_1)}$$

$$\sin(\alpha_3) = \frac{sh(a_3)}{sh(a_1)}$$

$$\tan(\alpha_2) = \frac{th(a_2)}{sh(a_3)}$$

$$\tan(\alpha_3) = \frac{th(a_3)}{sh(a_2)}$$

$$\cos(\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{sh(a_2) \cdot sh(a_3)}{ch(a_1) + 1}$$

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_3) = \frac{sh(a_2) \cdot sh(a_3)}{ch(a_1) - 1}$$

$$\sin(\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{ch(a_2) + ch(a_3)}{ch(a_1) + 1}$$

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_3) = \frac{ch(a_2) - ch(a_3)}{ch(a_1) - 1}$$

Liens entre un angle aigu, son côté adjacent et l'hypoténuse :

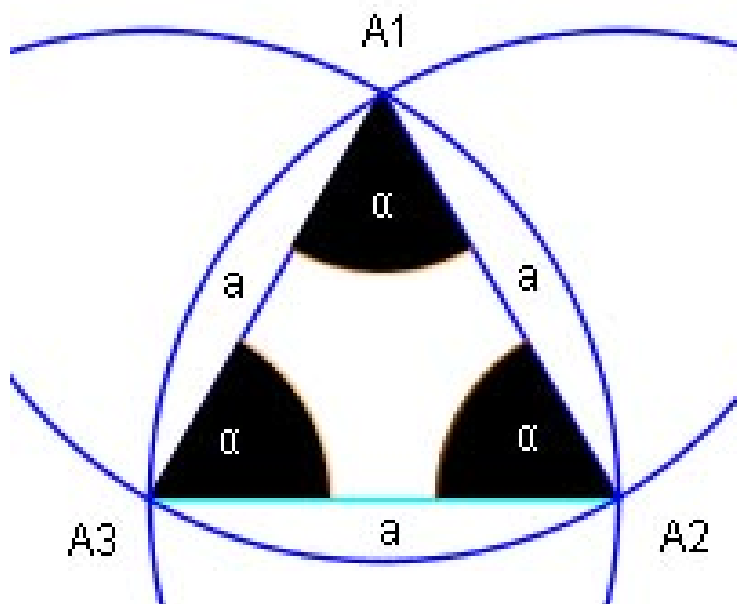
$$ch(a_1) = \frac{ch(a_3) \cdot \cos(\alpha_2)}{\sqrt{1 - ch^2(a_3) \cdot \sin^2(\alpha_2)}}$$

$$ch(a_1) = \frac{ch(a_2) \cdot \cos(\alpha_3)}{\sqrt{1 - ch^2(a_2) \cdot \sin^2(\alpha_3)}}$$

$$sh(a_1) = \frac{sh(a_3)}{\sqrt{1 - ch^2(a_3) \cdot \sin^2(\alpha_2)}}$$

$$sh(a_1) = \frac{sh(a_2)}{\sqrt{1 - ch^2(a_2) \cdot \sin^2(\alpha_3)}}$$

Voyons maintenant le cas du triangle équilatéral. Posons : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$
et $a_1 = a_2 = a_3 = a$.

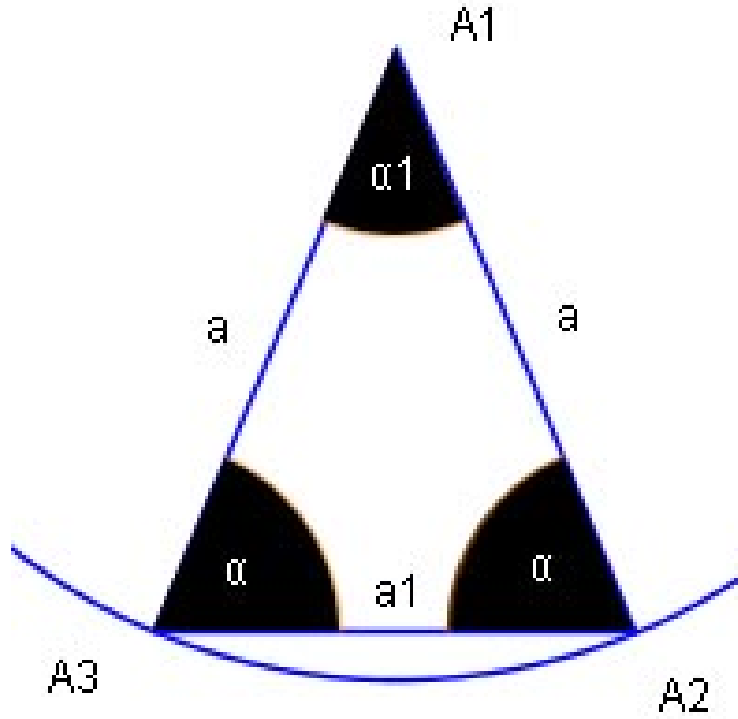


$$\cos(\alpha) = \frac{ch(a)}{ch(a) + 1}$$

$$ch(a) = \frac{\cos(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)}$$

Remarquons au passage qu'un plan hyperbolique ne peut être pavé avec des triangles équilatéraux (tous semblables) que pour certaines valeurs de α et de a : il doit exister un nombre entier n supérieur à 6 tel que : $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ et $a = \operatorname{argch}\left(\frac{\cos(\frac{2\pi}{n})}{1-\cos(\frac{2\pi}{n})}\right)$.

Passons au triangle isocèle. On posera : $a_2 = a_3 = a$ et $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.



$$\cos(\alpha_1) = \frac{ch^2(a) - ch(a_1)}{sh^2(a)}$$

$$ch(a_1) = \frac{\cos(\alpha_1) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{ch(a) \cdot (ch(a_1) - 1)}{sh(a) \cdot sh(a_1)}$$

$$ch(a) = \frac{\cos(\alpha) \cdot (\cos(\alpha_1) + 1)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha_1)}$$

$$ch(a_1) = \frac{\cos^2(\alpha) \cdot sh^2(a) + ch^2(a)}{\sin^2(\alpha) \cdot sh^2(a) + 1}$$

$$\cos(\alpha_1) = \frac{ch^2(a) \cdot \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{sh^2(a) \cdot \sin^2(\alpha) + 1}$$

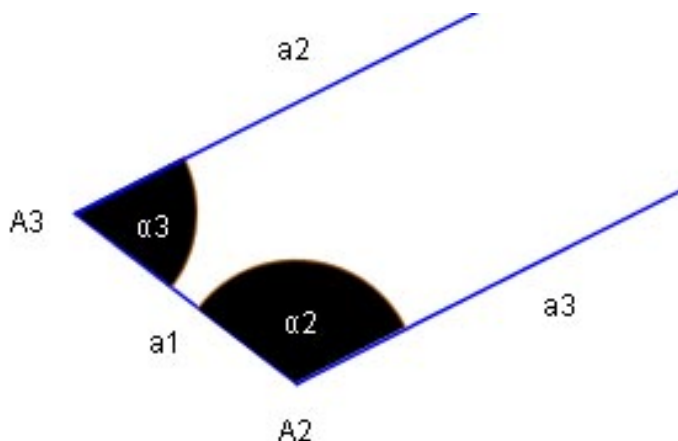
$$ch(a_1) = ch^2(a) - sh^2(a).cos(\alpha_1)$$

Les formules suivantes seront les plus utiles :

$$tan(\alpha) = \frac{1}{ch(a)} \cdot \sqrt{\frac{1 + cos(\alpha_1)}{1 - cos(\alpha_1)}}$$

$$th(a) = \frac{1}{cos(\alpha)} \cdot \sqrt{\frac{ch(a_1) - 1}{ch(a_1) + 1}}$$

Considérons maintenant un type de triangle bien particulier : un triangle dont l'un des sommets (par exemple A_1) est "à l'infini". Les points à l'infini se définissent comme en géométrie projective. Nous allons supposer que A_2 et A_3 sont fixes, et que A_1 se déplace sur une demi-droite d'origine A_2 . L'angle α_3 est constant. Si on fait tendre a_3 vers l'infini, a_2 tend vers l'infini et α_1 vers 0.



On étudie ensuite la limite de α_3 . On obtient :

$$cos(\alpha_3) = \frac{th(a_1) - cos(\alpha_2)}{1 - th(a_1).cos(\alpha_2)}$$

$$cos(\alpha_2) = \frac{th(a_1) - cos(\alpha_3)}{1 - th(a_1).cos(\alpha_3)}$$

$$th(a_1) = \frac{cos(\alpha_2) + cos(\alpha_3)}{1 + cos(\alpha_2).cos(\alpha_3)}$$

Si nous posons $a_1 = \frac{w}{c}$, nous aurons : $th(a_1) = \frac{v}{c}$, et les égalités ci-dessus s'écriront :

$$\cos(\alpha_3) = \frac{\frac{v}{c} - \cos(\alpha_2)}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos(\alpha_2)}$$

$$\cos(\alpha_2) = \frac{\frac{v}{c} - \cos(\alpha_3)}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos(\alpha_3)}$$

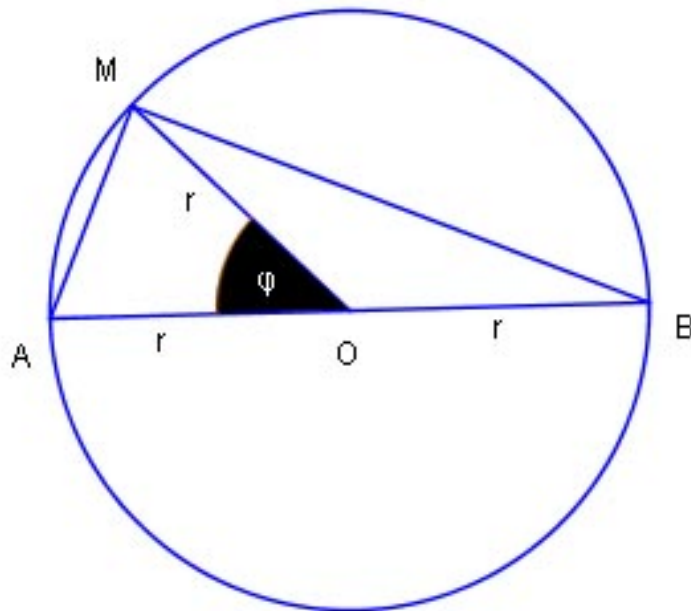
$$\frac{v}{c} = \frac{\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3)}{1 + \cos(\alpha_2) \cdot \cos(\alpha_3)}$$

L'importance des points à l'infini est considérable, puisqu'ils représentent la vitesse de la lumière; les formules ci-dessus nous seront donc utiles lorsque nous étudierons, par exemple, l'aberration de la lumière ou l'effet Doppler relativiste.

Nous allons nous intéresser maintenant au "théorème du cercle circonscrit au triangle rectangle".

Considérons un cercle de centre O , de rayon r et de diamètre $[AB]$; soit M un point (distinct de A et B) appartenant à ce cercle. On sait qu'en géométrie euclidienne, le triangle (AMB) est nécessairement rectangle en M . Qu'en est-il en géométrie hyperbolique?

Nous noterons $\phi = \widehat{AOM}$; donc $\widehat{MOB} = \pi - \phi$.



Les triangles (AOM) et (MOB) étant isocèles, nous allons leur appliquer la formule de la tangente (vue au paragraphe sur le triangle isocèle).

$$\begin{aligned}
\tan(\widehat{AMO}) &= \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos(\phi)}{1-\cos(\phi)}} \\
\tan(\widehat{MOB}) &= \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos(\pi-\phi)}{1-\cos(\pi-\phi)}} = \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(\phi)}{1+\cos(\phi)}} \\
\tan(\widehat{AMB}) &= \tan(\widehat{AMO} + \widehat{MOB}) = \frac{\tan(\widehat{AMO}) + \tan(\widehat{MOB})}{1 - \tan(\widehat{AMO}) \cdot \tan(\widehat{MOB})} \\
\tan(\widehat{AMB}) &= \frac{\frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos(\phi)}{1-\cos(\phi)}} + \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(\phi)}{1+\cos(\phi)}}}{1 - \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos(\phi)}{1-\cos(\phi)}} \cdot \frac{1}{ch(r)} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(\phi)}{1+\cos(\phi)}}} = \frac{\frac{1}{ch(r)} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\cos(\phi)}{1-\cos(\phi)}} + \sqrt{\frac{1-\cos(\phi)}{1+\cos(\phi)}} \right)}{1 - \frac{1}{ch^2(r)}} \\
\tan(\widehat{AMB}) &= \frac{ch(r)}{ch^2(r) - 1} \cdot \frac{(1+\cos(\phi)) + (1-\cos(\phi))}{\sqrt{(1-\cos(\phi)) \cdot (1+\cos(\phi))}} = \frac{ch(r)}{sh^2(r)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-\cos^2(\phi)}} \\
\tan(\widehat{AMB}) &= \frac{2 \, ch(r)}{sh^2(r) \cdot \sin(\phi)}
\end{aligned}$$

Supposons r fixé. Si on fait tendre ϕ vers 0 ou vers π , alors $\sin(\phi)$ tend vers 0, donc $\tan(\widehat{AMB})$ tend vers l'infini, ce qui veut dire que $\widehat{AMB}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$; sinon, $\widehat{AMB}$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Supposons ϕ fixé. Si on fait tendre r vers 0, $\widehat{AMB}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$; si on fait tendre r vers l'infini, $\widehat{AMB}$ tend vers 0.

Voici encore quelques formules, qui seront moins utiles dans les calculs relativistes, mais qui aident à mieux appréhender les espaces hyperboliques. Pure curiosité ...

Calcul de l'aire d'un disque de rayon r :

Un cercle de rayon x a pour périmètre $2 \pi \, sh(x)$, donc l'aire d'un disque de rayon r est :

$$A = \int_0^r 2 \pi \, sh(x) \, dx = 2 \pi [ch(x)]_0^r = 2\pi(ch(r) - 1)$$

En développant $ch(r)$ en série, on trouve : $A \approx \pi r^2 + \pi \frac{r^4}{12} + \dots$

Calcul de l'aire d'une sphère :

Par rapport à un espace euclidien, chaque portion infinitésimale de cercle est multipliée par $\frac{sh(r)}{r}$, et chaque portion de sphère par $\frac{sh^2(r)}{r^2}$, donc l'aire d'une sphère de rayon r est :

$$A = 4 \pi sh^2(r) = 2\pi(ch(2r) - 1)$$

En développant $ch(2r)$ en série, on trouve : $A \approx 4\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^4 + \dots$

Volume d'une boule de rayon r :

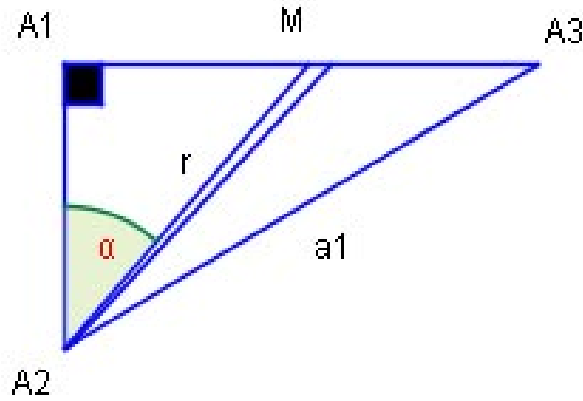
$$V = \int_0^r 4\pi sh^2(x) dx = 4\pi \int_0^r \frac{ch(2x) - 1}{2} dx = 2\pi \left[\frac{sh(2x)}{2} - x \right]_0^r$$

$$V = \pi(sh(2r) - 2r)$$

En développant $sh(2r)$ en série, on obtient : $V \approx \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{15}\pi r^5 + \dots$

Nous allons maintenant nous amuser à calculer l'aire d'un triangle rectangle, puis celle d'un triangle quelconque.

Commençons par un triangle $(A_1A_2A_3)$ rectangle en A_1 .



Nous allons le décomposer en secteurs angulaires infinitésimaux, de rayon $r = A_2M$, d'angle $d\alpha$. (Le point M se déplace sur le segment $[A_1A_3]$; l'angle $\alpha = \widehat{A_1A_2M}$ varie de 0 à α_2 .) Nous avons vu précédemment qu'un disque de rayon r a pour aire $A = 2\pi (ch(r) - 1)$, donc un secteur angulaire d'angle $d\alpha$ a pour aire $dA = (ch(r) - 1) d\alpha$.

Nous avons rencontré aussi la formule qui donne l'hypoténuse d'un triangle rectangle en fonction de l'un des angles aigus et du côté adjacent ; appliquée au

triangle (A_1A_2M) , elle donne :

$$ch(r) = \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{ch^2(a_3)} - \sin^2(\alpha)}} = \frac{ch(a_3) \cdot \cos(\alpha)}{\sqrt{1 - ch^2(a_3) \cdot \sin^2(\alpha)}}, \text{ donc :}$$

$$dA = (ch(r) - 1) d\alpha = \left(\frac{ch(a_3) \cdot \cos(\alpha)}{\sqrt{1 - ch^2(a_3) \cdot \sin^2(\alpha)}} - 1 \right) d\alpha;$$

$$dA = (ch(r) - 1) d\alpha = \frac{ch(a_3) \cdot d(\sin(\alpha))}{\sqrt{1 - ch^2(a_3) \cdot \sin^2(\alpha)}} - d\alpha.$$

Posons : $\sin(u) = ch(a_3) \cdot \sin(\alpha)$, autrement dit $u = \arcsin(ch(a_3) \cdot \sin(\alpha))$; alors :

$$dA = \frac{d(\sin(u))}{\cos(u)} - d\alpha = du - d\alpha;$$

$$A = \int_{\alpha=0}^{\alpha_2} (du - d\alpha) = \arcsin(ch(a_3) \cdot \sin(\alpha_2)) - \alpha_2.$$

Mais nous avons vu (dans le paragraphe sur le triangle rectangle) que $ch(a_3) \cdot \sin(\alpha_2) = \cos(\alpha_3)$, et, comme $\cos(\alpha_3) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_3)$, il vient :

$$A = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_3)) - \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_3 - \alpha_2.$$

Considérons maintenant un triangle quelconque (ABC) , d'angles α , β et γ ; il suffit de le partager en deux triangles rectangles (en traçant une hauteur) et d'appliquer deux fois la formule ci-dessus, pour obtenir facilement :

$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Pour calculer l'aire d'un triangle en géométrie hyperbolique, on calcule la somme de ses angles, et on la soustrait au nombre π .

Cette formule bien connue est l'une des plus étranges du bestiaire des mathématiques !

12 Aberration de la lumière

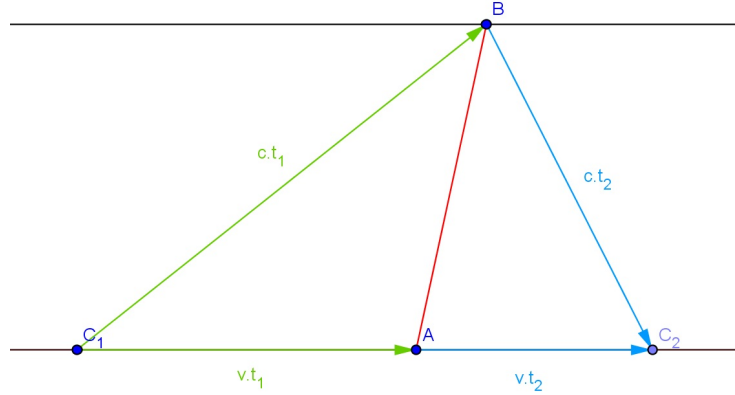
Le phénomène de l'aberration de la lumière est observé depuis longtemps par les astronomes : il est connu que la direction apparente d'une étoile, par exemple, dépend de la vitesse de l'observateur. Nos observatoires astronomiques étant situés sur la Terre, il est nécessaire de tenir compte du mouvement de celle-ci autour du Soleil pour établir des cartes du ciel aussi précises que possible. D'autres perturbations, dues par exemple au déplacement du Soleil dans la Galaxie, sont jusqu'à présent négligées.

Classiquement, l'aberration était calculée en combinant la vitesse de la lumière dans le vide avec la vitesse de l'observateur, selon le principe de l'addition

vectorielle. En relativité restreinte, le calcul se fait différemment.

Présentons l'aberration, pour commencer, dans un cadre classique, non relativiste.

Dans un repère supposé immobile, un premier observateur se déplace à la vitesse $\vec{v}$, et échange des faisceaux lumineux avec un second observateur. A l'instant où le premier se trouve en A , le second se trouve en B .



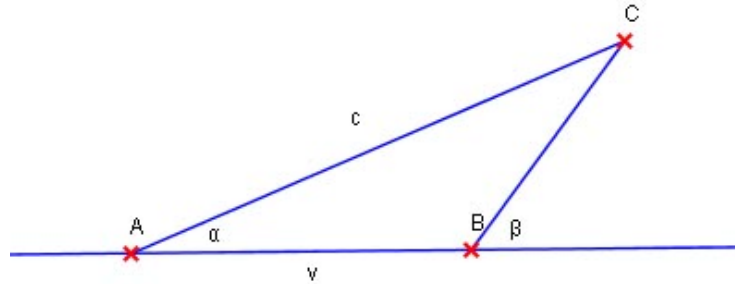
A ce même instant, le second observateur, situé en B reçoit, grâce à une lunette astronomique, un faisceau lumineux qui a été envoyé par premier observateur quand il était en C_1 ; ce faisceau a voyagé pendant le temps $t_1 = \frac{C_1 B}{c}$. Toujours au même instant, le second observateur envoie, grâce à un canon à lumière, un faisceau lumineux destiné à atteindre le premier observateur quand il sera en C_2 . Ce faisceau va voyager pendant le temps $t_2 = \frac{B C_2}{c}$. En posant $t = t_1 + t_2$, on aura : $C_1 A = v.t_1$, $A C_2 = v.t_2$ et $C_1 C_2 = v.t$. L'observateur situé en B va pouvoir mesurer l'angle entre sa lunette astronomique et son canon à lumière : $\widehat{C_1 B C_2}$.

Supposons maintenant que le second observateur se déplace, comme le premier, à la vitesse $\vec{v}$. En raison de l'aberration de la lumière, l'astronome ne va plus braquer sa lunette vers C_1 , mais vers A . Il ne va plus braquer son canon à lumière vers C_2 , mais également vers A . L'angle entre les deux instruments va donc s'annuler. Ceci est d'ailleurs évident, puisque les deux observateurs sont alors immobiles l'un par rapport à l'autre ; si on se place dans un repère lié à l'un d'eux (donc aussi à l'autre), la vitesse $\vec{v}$ s'annule.

Etudions maintenant l'aberration dans un cadre relativiste.

Imaginons deux observateurs A et B ; supposons que B se déplace par rapport à A à la vitesse $\vec{v}$.

Dans le repère lié à A (le repère de référence), un photon C se déplace à la vitesse $\vec{c}$, formant avec $\vec{v}$ un angle α . On peut donc considérer que cet angle α peut aller de 0 (lorsque la vitesse $\vec{v}$ du second observateur, et la vitesse $\vec{c}$ du photon, dans le repère de référence, sont parallèles et de même sens) jusqu'à π (lorsqu'elles sont parallèles et de sens contraire).



Si on effectue maintenant un changement de repère pour étudier le déplacement du photon observé par B, on va constater que son vecteur vitesse fait avec $\vec{v}$ un angle β différent de α .

Attention : dans notre figure, les points A, B et C ne représentent pas les trois mobiles (les deux observateurs et le photon) dans l'espace usuel, mais leurs vitesses relatives dans l'"espace des vitesses" ; ce n'est pas une représentation spatiale, mais un diagramme des vitesses. On est libre supposer que les observateurs A et B sont situés au même endroit dans l'espace, et voient le photon partir au même instant : $t = 0$; leur position dans l'espace est indifférente.

Nous allons utiliser la transformation de Lorentz en nous limitant à deux dimensions spatiales (la troisième étant inutile ici), et en supposant la vitesse $\vec{v}$ dirigée selon l'axe des x , sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} & 0 \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c.t - \frac{v.x}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{-v.t + x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y \end{pmatrix}.$$

Les deux coordonnées spatiales de C, vu par A, sont :

$$\begin{cases} x = c.t.\cos \alpha ; \\ y = c.t.\sin \alpha. \end{cases}$$

Les trois coordonnées de C, vues par A, sont donc :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ c.t.\cos \alpha \\ c.t.\sin \alpha \end{pmatrix} = c.t. \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

C'est l'équation de la trajectoire du rayon lumineux ("photon") C, sous forme paramétrée (le paramètre étant t), dans le repère de A.

D'après la transformation de Lorentz rappelée ci-dessus, les coordonnées de C, vu par B, sont :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = c.t. \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} & 0 \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = c.t. \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} \cdot \left(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha\right) \\ ch \frac{w}{c} \cdot \left(-\frac{v}{c} + \cos \alpha\right) \\ \sin \alpha \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = c.t. \begin{pmatrix} \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{-\frac{v}{c} + \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c.t. \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\frac{v}{c} + \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \\ \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c.t. \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\frac{v}{c} + \cos \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \\ \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = c.t'. \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\frac{v}{c} + \cos \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \\ \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} c.t' = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c.t ; \\ x' = c.t' \cdot \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} ; \\ y' = c.t' \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha . \end{array} \right.$$

Les coordonnées de C sont :

$$c.t. \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{dans le repère lié à A,}$$

$$c.t' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad \text{dans le repère lié à B.}$$

Le calcul que nous venons de faire montre donc que :

$$\left\{ \begin{array}{l} c.t' = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c.t ; \\ \cos \beta = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} ; \\ \sin \beta = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha . \end{array} \right.$$

Pour vérifier la cohérence de ces formules, on peut vérifier que $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta &= \frac{(\cos \alpha - \frac{v}{c})^2}{(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha)^2} + \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2}) \cdot \sin^2 \alpha}{(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha)^2} ; \\ \cos^2 \beta + \sin^2 \beta &= \frac{\cos^2 \alpha - 2 \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha + \frac{v^2}{c^2} + \sin^2 \alpha - \frac{v^2}{c^2} \cdot \sin^2 \alpha}{(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha)^2} ; \\ \cos^2 \beta + \sin^2 \beta &= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2 \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha + \frac{v^2}{c^2} (1 - \sin^2 \alpha)}{(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha)^2} ; \\ \cos^2 \beta + \sin^2 \beta &= \frac{1 - 2 \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha + \frac{v^2}{c^2} \cdot \cos^2 \alpha}{(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha)^2} = \frac{(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha)^2}{(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha)^2} = 1 . \end{aligned}$$

On pourrait aussi utiliser la tangente :

$$\tan \beta = \frac{y'}{x'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{v}{c}},$$

et calculer le cosinus par la formule : $\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \tan^2 \beta}$. On retrouve la formule du cosinus démontrée ci-dessus.

Dans l'étude de l'aberration de la lumière, la seule formule vraiment utile (la formule "de base") est celle-ci :

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}.$$

Cette formule peut s'inverser :

$$\begin{aligned} \cos \beta \cdot \left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right) &= \cos \alpha - \frac{v}{c} ; \\ \cos \beta - \frac{v}{c} \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \cos \alpha - \frac{v}{c} ; \\ \cos \beta + \frac{v}{c} &= \cos \alpha \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta\right) ; \\ \cos \alpha &= \frac{\cos \beta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta}. \end{aligned}$$

Cette formule n'est pas parfaitement symétrique de la précédente. Pourquoi ? Observons la figure : si nous inversons les rôles de A et B , il faut remplacer α et β par leurs supplémentaires α' et β' ; comme $\cos \alpha = -\cos \alpha'$ et $\cos \beta = -\cos \beta'$, cette dernière formule peut s'écrire :

$$\begin{aligned} -\cos \alpha' &= \frac{-\cos \beta' + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \beta'} ; \\ \cos \alpha' &= \frac{\cos \beta' - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \beta'} \end{aligned}$$

Nous retrouvons la formule "de base".

Remarquons que la première formule :

$$c.t' = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c.t$$

peut aussi s'inverser :

$$c.t = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot c.t = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \frac{\cos \beta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta}} \cdot c.t = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot (1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta)}{(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta) - \frac{v}{c} \cdot (\cos \beta + \frac{v}{c})} \cdot c.t' ;$$

$$c.t = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot (1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot c.t' ;$$

$$c.t = \frac{1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c.t' .$$

Comme précédemment, on reconnaîtra plus facilement la formule de base si on utilise $\beta' = \pi - \beta$:

$$c.t = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \beta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c.t' .$$

L'inversion de la troisième formule en découle :

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha ;$$

$$\sin \alpha = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta} \cdot \sin \beta ;$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \beta'} \cdot \sin \beta' .$$

Remarquons au passage que, d'après les calculs qui précèdent, les fractions $\frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ et $\frac{1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ sont inverses ; leur produit est donc égal à 1 ; on peut écrire :

$$\left(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha\right) \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta\right) = 1 - \frac{v^2}{c^2} .$$

Ceci permet d'exprimer $\frac{v}{c}$ en fonction de $\cos \alpha$ et $\cos \beta$:

$$1 + \frac{v}{c} \cdot \cos \beta - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha - \frac{v^2}{c^2} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = 1 - \frac{v^2}{c^2} ;$$

$$\frac{v^2}{c^2} \cdot (1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta) = \frac{v}{c} \cdot (\cos \alpha - \cos \beta) ;$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta} .$$

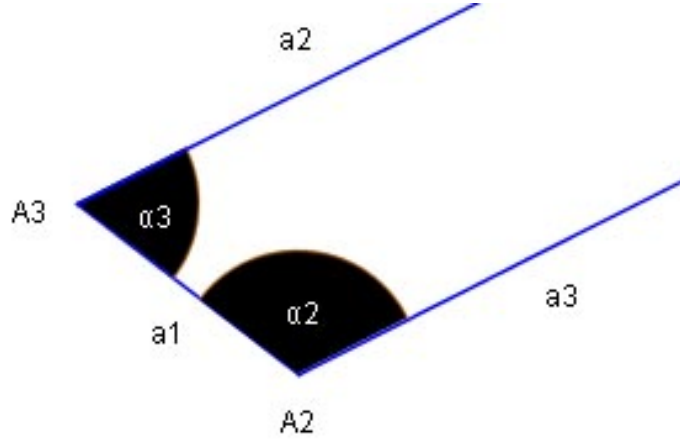
Si on se reporte à la figure sur laquelle nous raisonnons, on voit que α est un angle intérieur du triangle (ABC) , tandis que β est un angle extérieur. Si on préfère utiliser deux angles intérieurs, alors on utilisera $\beta' = \pi - \beta$; on aura alors $\cos \beta = -\cos \beta'$; la formule ci-dessus devient alors :

$$\frac{v}{c} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta'}{1 + \cos \alpha \cdot \cos \beta'} .$$

Nous aurions pu obtenir cette formule d'une autre manière. Pour cela, il suffit de transposer notre figure (qui se situe dans l'espace euclidien des vitesses) à l'espace hyperbolique des rapidités. A toute vitesse (calibrée) $\frac{v}{c}$ va correspondre la rapidité (calibrée) $\frac{w}{c}$ telle que : $\frac{v}{c} = th \frac{w}{c}$. Si on fait tendre v vers c , alors w tend vers l'infini.

Que devient notre triangle (ABC) ? Tout d'abord, le point C est rejeté à l'infini; ensuite, la longueur du côté AB va être égale à $\frac{w}{c}$; enfin, les angles (en A et en B) vont être conservés. On obtient un triangle courbe (de l'espace hyperbolique) avec un point à l'infini.

Dans la section sur la trigonométrie hyperbolique, reprenons la figure du triangle avec un point à l'infini :



Nous avons vu la formule :

$$th a_1 = \frac{\cos \alpha_2 + \cos \alpha_3}{1 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}.$$

La correspondance avec la figure précédente est simple : A_3 correspond à A , A_2 à B , α_3 à α , α_2 à β' , $a_1 = \frac{w}{c}$ correspond à v . La formule peut se traduire ainsi :

$$\frac{v}{c} = th \frac{w}{c} = tha_1 = \frac{\cos \alpha_2 + \cos \alpha_3}{1 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3} ;$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta'}{1 + \cos \alpha \cos \beta'} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{1 - \cos \alpha \cos \beta}.$$

Nous aurions donc pu partir de cette formule, dont on déduit facilement les formules de base de l'aberration : $\cos \beta = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}$ et $\cos \alpha = \frac{\cos \beta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \beta}$.

Dans l'utilisation de ces différentes formules, on peut jouer sur le sens du rayon lumineux (par exemple en remplaçant un rayon fuyant par un rayon incident, se dirigeant vers A , dans le repère de référence) ou sur le sens du vecteur vitesse $\vec{v}$; pour cela, on peut utiliser, selon le but recherché, soit les angles supplémentaires $\alpha' = \pi - \alpha$ et $\beta' = \pi - \beta$, soit les angles $\alpha + \pi$ et $\beta + \pi$; ce qui a pour conséquence, dans les deux cas, de changer les signes des cosinus.

Nous allons maintenant comparer $\cos \beta$ et $\cos \alpha$ (en partant de la formule de base) :

$$\begin{aligned}\cos \beta - \cos \alpha &= \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c} \cos^2 \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} \\ \cos \beta - \cos \alpha &= \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c} - \cos \alpha + \frac{v}{c} \cos^2 \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} = -\frac{\frac{v}{c} \sin^2 \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}.\end{aligned}$$

Comme $v < c$, le dénominateur est toujours positif; on a donc $\cos \beta - \cos \alpha < 0$, et par conséquent $\cos \beta < \cos \alpha$ et $\beta > \alpha$.

En astronomie, on peut visualiser sur la voûte céleste le point P vers lequel se dirige l'observateur; si un astre semble "proche" de ce point sur le ciel (ce qui veut dire que la distance angulaire est petite), on pourrait être tenté de considérer que l'angle (aigu) formé par ces deux directions correspond à l'angle α de notre figure. En réalité, comme le rayon lumineux provenant de l'astre est incident, tandis que le vecteur vitesse est fuyant, l'angle α formé par les deux vecteurs est obtus (proche de π), alors que l'angle mesuré est aigu. On doit comprendre que dans ce cas l'angle mesuré correspond $\alpha' = \pi - \alpha$.

Puisque $\beta > \alpha$, on a $\beta' < \alpha'$. Ceci signifie que si l'observateur accélère en direction d'un point de la voûte céleste, les images qui lui arrivent des astres vont tendre à se rapprocher de ce point.

S'il observe le point P' diamétralement opposé à P sur la voûte céleste, les astres proches (angulairement) de P' vont sembler s'en éloigner lorsque la vitesse augmente.

Remarquons au passage que ceci soulève un problème en cosmologie : lorsqu'on imagine un Univers homogène (ce que font généralement les cosmologistes), c'est-à-dire les galaxies uniformément réparties sur la voûte céleste, il est nécessaire de se référer à un observateur "immobile par rapport à l'ensemble de l'Univers". Pour un autre observateur en mouvement par rapport au premier, la répartition des galaxies va être biaisée. Le simple fait de parler d'un "Univers globalement homogène" impose d'admettre cette notion complémentaire : l'"immobilité par rapport à l'ensemble de l'Univers".

Voyons maintenant comment on peut composer les aberrations.

Imaginons trois observateurs sur la même droite (l'axe des x) : le premier (A_1) supposé "immobile", le second (A_2) se déplaçant à la vitesse v_1 par rapport à A_1 , le troisième (A_3) se déplaçant à la vitesse v_2 par rapport à A_2 ; les vitesses sont supposées colinéaires. Les trois observateurs mesurent l'angle d'un même rayon lumineux par rapport à la direction commune des vecteurs vitesse. Cet angle est égal à α pour le premier observateur, β pour le second, γ pour le troisième. On a alors :

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{c \cos \alpha - v_1}{c - v_1 \cos \alpha} \quad \text{et} \quad \cos \gamma = \frac{c \cos \beta - v_2}{c - v_2 \cos \beta}, \quad \text{donc :} \\ \cos \gamma &= \frac{c \frac{c \cos \alpha - v_1}{c - v_1 \cos \alpha} - v_2}{c - v_2 \frac{c \cos \alpha - v_1}{c - v_1 \cos \alpha}} = \frac{c (c \cos \alpha - v_1) - v_2 (c - v_1 \cos \alpha)}{c (c - v_1 \cos \alpha) - v_2 (c \cos \alpha - v_1)} \\ \cos \gamma &= \frac{(c^2 + v_1 v_2) \cos \alpha - (v_1 + v_2) c}{(c^2 + v_1 v_2) - (v_1 + v_2) c \cos \alpha} = \frac{c \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) \cos \alpha - (v_1 + v_2)}{c \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) - (v_1 + v_2) \cos \alpha} \end{aligned}$$

Nous venons de diviser le numérateur et le dénominateur par c ; divisons-les maintenant par $1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}$:

$$\cos \gamma = \frac{c \cos \alpha - \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}}{c - \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \cos \alpha}$$

Posons : $v = v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$: c'est la vitesse du troisième mobile par rapport au premier, obtenue par la formule relativiste de composition des vitesses ; on a alors :

$$\cos \gamma = \frac{c \cos \alpha - v}{c - v \cos \alpha}.$$

La composée des aberrations s'obtient tout simplement en composant les vitesses.

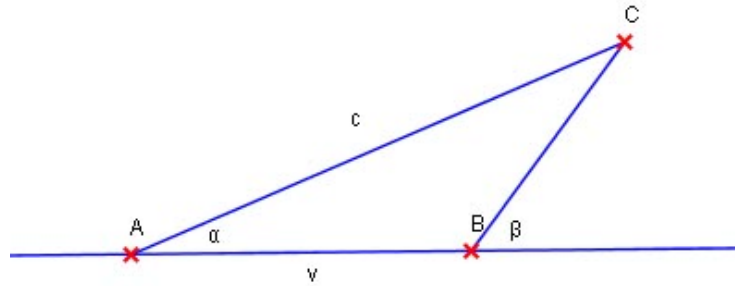
Ceci marche bien lorsque les deux vitesses sont colinéaires ; si ce n'est pas le cas, une autre approche, basée sur les rapidités, est plus efficace, mais impose de raisonner dans l'espace hyperbolique des rapidités.

13 Effet Doppler relativiste

Reprenons la figure de l'aberration de la lumière.

Le point C représente un rayon lumineux parti de A à l'instant $t = 0$, s'éloignant à la vitesse c ; sa direction fait un angle α avec l'axe des abscisses. Pour l'observateur A , ce rayonnement a une période T , une fréquence ν et une longueur d'onde λ . Pour l'observateur B (confondu avec A à l'instant $t = 0$, et se déplaçant à la vitesse v selon l'axe des abscisses), l'angle du rayonnement par

rapport à l'axe des abscisses est β , sa période est T' , sa fréquence ν' , sa longueur d'onde λ' .



Nous avons montré que, pour étudier la trajectoire du rayon lumineux, on peut passer du repère de A à celui de B grâce à ces formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} c.t' = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c.t ; \\ \cos \beta = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} ; \\ \sin \beta = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha. \end{array} \right.$$

Quand nous avons étudié l'aberration, nous avons utilisé la deuxième et la troisième formules; ce que nous allons voir maintenant, concernant l'effet Doppler, est en rapport avec la première.

Nous voudrions savoir comment se transforment la période T , la longueur d'onde $\lambda = c.T$ et la fréquence $\nu = \frac{1}{T}$ quand on change d'observateur. Pour cela, on fait intervenir la phase ϕ de l'onde, car on ne peut pas raisonner séparément sur le temps et sur l'espace.

Imaginons d'abord une onde progressive se propageant selon l'axe des x . Dans le repère de A , la phase serait alors donnée par : $\phi = \phi_0 + 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$, et dans le repère de B par $\phi = \phi_0 + 2\pi \cdot \left(\frac{t'}{T'} - \frac{x'}{\lambda'} \right)$. Mais ici la direction de l'onde fait un angle α avec l'axe des x dans le repère de A , et un angle β dans le repère

de B . La phase sera donc :

$$\phi = \phi_0 + 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x \cdot \cos \alpha}{\lambda} \right) \text{ pour A, } \phi = \phi_0 + 2\pi \cdot \left(\frac{t'}{T'} - \frac{x' \cdot \cos \beta}{\lambda'} \right) \text{ pour B.}$$

En identifiant les deux expressions, on obtient :

$$\frac{t}{T} - \frac{x \cdot \cos \alpha}{\lambda} = \frac{t'}{T'} - \frac{x' \cdot \cos \beta}{\lambda'}.$$

On peut exprimer t et x en fonction de t' et x' grâce à la transformation de Lorentz inverse :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{v}{c} & sh \frac{v}{c} \\ sh \frac{v}{c} & ch \frac{v}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{cases} ct = \frac{ct' + \frac{v}{c} \cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \\ x = \frac{v \cdot t' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \end{cases}$$

En reportant dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\frac{ct' + \frac{v}{c} \cdot x'}{c \cdot T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{(v \cdot t' + x') \cdot \cos \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'}{T'} - \frac{x' \cdot \cos \beta}{\lambda'} ;$$

$$\left(\frac{1}{c \cdot T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot ct' + \left(\frac{\frac{v}{c}}{c \cdot T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\cos \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot x' = \frac{ct'}{c \cdot T'} - \frac{x' \cdot \cos \beta}{\lambda'} ;$$

$$\left(\frac{\cos \beta}{\lambda'} + \frac{\frac{v}{c}}{c \cdot T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\cos \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot x' = \left(\frac{1}{c \cdot T'} - \frac{1}{c \cdot T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot ct'.$$

Cette égalité doit être vraie pour toutes les valeurs de t' et de x' ; donc :

$$\begin{cases} \frac{\cos \beta}{\lambda'} + \frac{\frac{v}{c}}{c \cdot T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\cos \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 ; \\ \frac{1}{c \cdot T'} - \frac{1}{c \cdot T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 ; \\ \frac{\cos \beta}{\lambda'} = - \frac{\frac{v}{c}}{c \cdot T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\cos \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \\ \frac{1}{c \cdot T'} = \frac{1}{c \cdot T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \end{cases}$$

Comme nous savons que $\lambda = c.T$, il vient :

$$\begin{cases} \frac{\cos \beta}{\lambda'} = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \\ \frac{1}{c.T'} = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{c.T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\cos \alpha - \frac{v}{c}} \cdot \lambda \cdot \cos \beta ; \\ T' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot T. \end{cases}$$

Nous savons que $\cos \beta = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}$; donc :

$$\lambda' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\cos \alpha - \frac{v}{c}} \cdot \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \lambda = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \lambda.$$

Comme $\lambda = c.T$, il en résulte que $\lambda' = c.T'$, comme on pouvait s'y attendre.

En résumé, en notant $v_r = v \cdot \cos \alpha$ la composante de la vitesse v parallèle au rayon lumineux :

$$T' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot T = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_r}{c}} \cdot T,$$

$$\lambda' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \lambda = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_r}{c}} \cdot \lambda.$$

D'autre part, la fréquence ν est l'inverse de la période, donc :

$$\nu' = \frac{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \nu = \frac{1 - \frac{v_r}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \nu.$$

Ce sont les trois formules de base de l'effet Doppler.

Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier où la vitesse relative $\vec{v}$ des deux mobiles et la vitesse $\vec{c}$ du photon sont parallèles et de même sens. On a alors $\cos \alpha = 1$, et $v_r = v$. Si on considère que la lumière provient d'une étoile immobile dans le repère de A , alors B s'éloigne de l'étoile, radialement, à la vitesse v . On parle alors de vitesse de fuite, ou de vitesse de récession.

$$\text{Dans ce cas, } \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{\sqrt{(1 - \frac{v}{c}) \cdot (1 + \frac{v}{c})}}{1 - \frac{v}{c}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Les formules deviennent :

$$T' = T \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} ;$$

$$\lambda' = \lambda \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} ;$$

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} .$$

Etudions ensuite le cas particulier où la vitesse relative $\vec{v}$ des deux mobiles et la vitesse $\vec{c}$ du photon sont parallèles et de sens contraires. On a alors $\cos \alpha = -1$, et $v_r = -v$. Si on considère que la lumière provient d'une étoile immobile dans le repère de A , alors B se rapproche de l'étoile, radialement, à la vitesse v .

$$\text{On a alors } \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_r}{c}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{\sqrt{(1 - \frac{v}{c}) \cdot (1 + \frac{v}{c})}}{1 + \frac{v}{c}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} .$$

Dans ce cas, les formules deviennent :

$$T' = T \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} ;$$

$$\lambda' = \lambda \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} ;$$

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} .$$

Dans ces deux cas particuliers, en notant v_r la vitesse de fuite et w_r la rapidité de fuite de l'astre observé, on a : $\frac{v_r}{c} = th \frac{w_r}{c}$, donc :

$$\frac{1 + \frac{v_r}{c}}{1 - \frac{v_r}{c}} = \frac{1 + th \frac{w_r}{c}}{1 - th \frac{w_r}{c}} = \frac{ch \frac{w_r}{c} + sh \frac{w_r}{c}}{ch \frac{w_r}{c} - sh \frac{w_r}{c}} .$$

Comme $ch \frac{w}{c} = \frac{e^{\frac{w}{c}} + e^{-\frac{w}{c}}}{2}$ et $sh \frac{w}{c} = \frac{e^{\frac{w}{c}} - e^{-\frac{w}{c}}}{2}$, on voit que :

$$ch \frac{w}{c} - sh \frac{w}{c} = e^{-\frac{w}{c}} \text{ et } ch \frac{w}{c} + sh \frac{w}{c} = e^{\frac{w}{c}} , \text{ donc :}$$

$$\frac{c + v_r}{c - v_r} = \frac{e^{\frac{w_r}{c}}}{e^{-\frac{w_r}{c}}} = e^{2 \frac{w_r}{c}} ;$$

$$T' = T \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}} = T \sqrt{e^{2 \frac{w_r}{c}}} = T e^{\frac{w_r}{c}} .$$

L'effet Doppler relativiste se résume donc (dans le cas des vitesses colinéaires) par les trois formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} T' = T e^{\frac{w_r}{c}} ; \\ \lambda' = \lambda e^{\frac{w_r}{c}} ; \\ \nu' = \nu e^{-\frac{w_r}{c}} . \end{array} \right.$$

14 Un photon possède-t-il une énergie ?

Lorsque nous allons sur la plage, nous utilisons une crème solaire pour protéger notre peau contre les rayons ultraviolets. Tout le monde s'accorde pour dire que ces rayons ultraviolets sont plus énergétiques que la lumière visible. Selon la formule $E = h.\nu$, l'énergie d'un photon est proportionnelle à sa fréquence.

Mais, si nous considérons la formule :

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}},$$

où ν et ν' correspondent à la fréquence d'un même rayonnement dans deux référentiels se déplaçant l'un par rapport à l'autre à la vitesse v , nous voyons clairement que la fréquence du photon dépend du référentiel... donc son énergie aussi !

Supposons par exemple que le premier référentiel soit fixé (donc que la fréquence ν soit fixée), et faisons varier la vitesse v du second référentiel par rapport au premier.

Si nous faisons tendre v vers c , nous voyons que ν' tend vers 0.

Si nous faisons tendre v vers $-c$, alors ν' tend vers l'infini.

Précisons que la vitesse du référentiel est positive si elle est de même sens que celle du rayonnement (ou du photon) observé, négative si elle est de sens contraire.

Ceci signifie que la fréquence du photon (donc son énergie, selon la formule $E = h.\nu$) peut varier de 0 à l'infini, selon le référentiel auquel on la rapporte. On peut choisir la vitesse v de telle sorte que ν' soit supérieur à ν , ou inférieur, si on préfère.

Si ν_1 et ν_2 ($\nu_1 > \nu_2$) sont les fréquences de deux photons évaluées dans un référentiel donné, et ν'_1 et ν'_2 les fréquences des mêmes photons évaluées dans un autre référentiel se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au premier, alors, selon la vitesse $\vec{v}$, on pourra avoir aussi bien $\nu'_1 < \nu'_2$ que $\nu'_1 > \nu'_2$. Si le premier

photon est plus énergétique que le second pour un observateur donné, il peut l'être moins pour d'autres observateurs.

En relativité restreinte, tous les référentiels ont un statut équivalent. On peut donc dire que l'énergie du photon, dans l'absolu, est fondamentalement indéterminée. Il faut choisir un référentiel pour pouvoir attribuer une énergie à chaque photon, et pour pouvoir comparer ces énergies.

Le quadrivecteur énergie-impulsion, ou le vecteur d'onde (voir plus loin) d'un photon a pour partie scalaire (énergie calibrée) $\frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$, et pour partie vectorielle (impulsion) $\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \cdot \vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire indiquant la direction de propagation de l'onde. Ces composantes sont proportionnelles à ν , donc varient selon le référentiel. La seule chose qui se conserve par changement de référentiel est la norme du quadrivecteur, c'est-à-dire : $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - (\vec{p})^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = 0$. Par conséquent, en relativité restreinte, tous les photons sont identiques, à une transformation de Lorentz près. Si on dit que chacun d'eux possède une énergie bien définie qui lui est propre, c'est qu'on raisonne par rapport à un référentiel choisi (arbitrairement?).

Dans la section sur l'échange de photon entre deux particules, nous verrons que quatre référentiels jouent un rôle particulier : les référentiels de la particule émettrice avant et après l'émission, et les référentiels de la particule réceptrice avant et après la réception. Dans ces quatre référentiels, il est possible de définir l'énergie du photon, et on obtient le plus souvent quatre valeurs différentes.

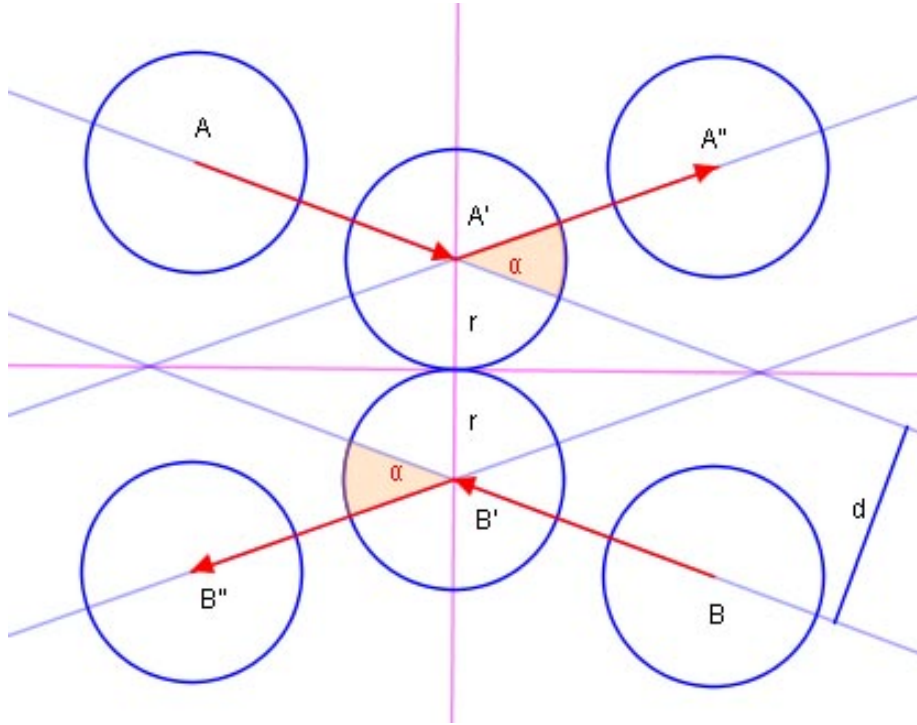
En gravitation relativiste (mais pas en relativité générale!), selon la théorie envisagée, il peut exister en chaque point, comme nous le verrons, un repère privilégié appelé : repère gravitationnellement immobile (repère défini par la répartition globale de l'énergie-impulsion dans l'espace). Si un tel repère existe bien (en accord avec le principe de Mach), alors on peut définir l'énergie d'un photon par rapport à ce repère privilégié. Mais, même dans ce cas, on ne peut pas dire que cette énergie appartienne en propre au photon : c'est plutôt une énergie qui définit la relation entre ce photon et l'ensemble de l'Univers. Le photon n'est pas une particule au sens usuel : c'est plutôt une entité relationnelle.

Au contraire, la masse au repos d'une particule comme l'électron par exemple, est parfaitement bien définie, puisqu'elle s'évalue dans un repère particulier, qui est le repère de la particule. Nous en reparlerons dans la section "Masse au repos et masse maupertuisienne". Ceci ne vaut pas pour le photon, qui ne possède pas de masse au repos, puisque l'immobilité ne fait pas partie de son vocabulaire.

15 Cinématique du choc élastique

Imaginons un électron immobile, percuté par un électron rapide. D'après la mécanique newtonienne, après le choc, les vitesses des électrons diffusés seront perpendiculaires. D'après la relativité restreinte, ces vitesses formeront un angle aigu. On sait que l'expérience a donné raison à la relativité. Le but que nous nous proposons ici est d'expliquer, à l'aide des rapidités, pourquoi les deux théories font des prédictions différentes.

Nous allons d'abord raisonner comme si les mobiles étaient deux boules de billard identiques, de rayon r , et de même masse ; nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique classique. Nous choisissons un repère galiléen lié au centre de gravité du système : les vitesses des deux boules sont alors des vecteurs opposés, et leurs trajectoires sont parallèles ; on note d la distance de ces deux parallèles. Nous avons représenté trois positions successives de la première boule : A (avant le choc), A' (au moment du choc), et A'' (après le choc). Le vecteur vitesse a tourné d'un angle α . Pour la seconde boule, nous avons représenté les positions B , B' , B'' , symétriques de A , A' et A'' .

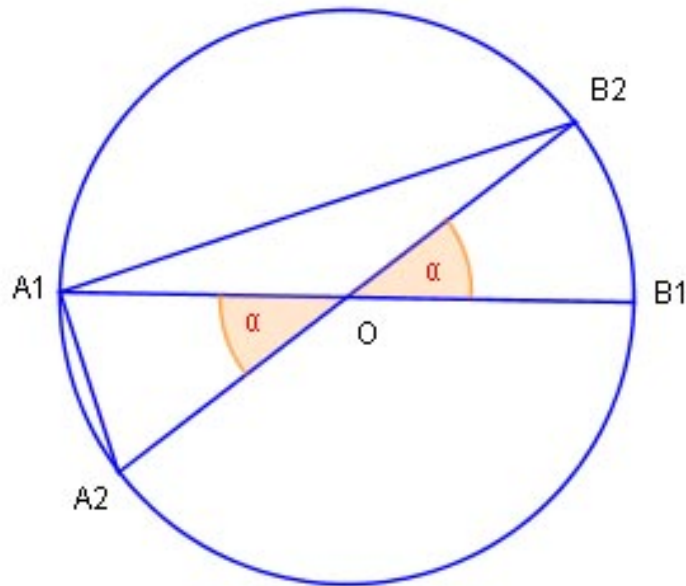


On peut montrer que $d = 2r \cos \frac{\alpha}{2}$; donc $\alpha = 2 \arccos \frac{d}{2r}$. Pour $d = 2r$, on a : $\alpha = 0$ (trajectoires rasantes, pas de choc) ; pour $d = 0$, on obtient : $\alpha = \pi$

(choc frontal). Mais ceci n'a pas d'importance pour la suite : nous retiendrons seulement que les vecteurs vitesse, qui étaient opposés, le sont toujours ; ils ont simplement tourné d'un même angle α . Attention : ceci n'est vrai que dans un repère particulier, attaché au centre de gravité. Il va falloir changer de repère, pour se placer dans celui de l'observateur.

Représentons les vecteurs vitesse par un diagramme : O représente la vitesse du centre de gravité (on peut considérer que c'est l'origine du repère), $A1$ et $B1$ représentent les vitesses des boules A et B avant le choc, $A2$ et $B2$ leurs vitesses après le choc.

Nous avons dit que, dans l'expérience sur les chocs d'électrons, l'un des électrons devait être immobile. Ici, c'est la première boule (A) qui sera immobile ; sous-entendu : immobile par rapport à l'observateur (ou au laboratoire où se déroule l'expérience). Ceci veut dire que, sur le diagramme des vitesses, l'observateur se situe en $A1$.



D'après la règle de composition des vitesses (en mécanique classique), la vitesse de la première boule par rapport à l'observateur, après le choc, est $A1\vec{A2}$, et celle de la seconde est $A1\vec{B2}$; puisque le triangle $(A1A2B2)$ est rectangle en $A1$ (théorème du cercle circonscrit au triangle rectangle), on conclut que les vitesses des deux boules, après le choc, sont perpendiculaires.

Etudions maintenant le problème d'un point de vue relativiste. Tout le dé-

but du raisonnement reste vrai ; c'est au moment où intervient la composition des vitesses que les difficultés apparaissent : la composition des vitesses ne peut pas se faire par addition vectorielle. Une solution simple consiste à remplacer les vitesses par les rapidités : elles ne se combinent pas non plus vectoriellement, mais au moins elles permettent de définir un espace métrique utilisable.

Rappelons-nous la formule que nous avons trouvée au paragraphe sur le cercle circonscrit : $\tan \widehat{AMB} = \frac{2 \, ch \, r}{sh^2 \, r \cdot \sin \phi}$; nous devons remplacer $\widehat{AMB}$ par $\widehat{A2A1B2}$ et ϕ par α ; quant au rayon du cercle, c'est $\frac{w}{2c}$, où w désigne la rapidité relative des deux boules. Il vient :

$$\tan \widehat{A2A1B2} = \frac{2 \, ch \, \frac{w}{2c}}{sh^2 \, \frac{w}{2c} \cdot \sin \alpha}.$$

Cette expression représente l'angle formé par les vecteurs vitesses des deux boules de billard après le choc, du point de vue de l'observateur.

Si $\frac{w}{2c}$ est petit, l'angle est proche de 90° ; mais si on fait tendre $\frac{w}{2c}$ vers l'infini, il tend vers 0° . Ceci explique pourquoi l'angle de diffusion des deux électrons peut être aigu : pour cela, il faut que la vitesse de l'électron utilisé comme projectile soit proche de celle de la lumière.

On voit que ce phénomène s'explique de manière très simple, et purement géométrique. Si l'espace des rapidités était euclidien, l'angle de diffusion serait toujours droit !

16 Quadrivecteur vitesse et quadrivecteur énergie-impulsion

Nous utilisons le tilde ($\sim$) pour désigner les quadrivecteurs.

Deux observateurs O et O' se déplacent l'un par rapport à l'autre à vitesse constante V (vitesse dirigée selon l'axe des x), soit avec la rapidité W ; ils observent un mobile M à deux instants très rapprochés, et notent l'écart spatio-temporel des deux événements.

Dans le repère de O, la position du mobile M est indiquée par le quadrivecteur : $\tilde{r} = \begin{pmatrix} c.t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dont la différentielle est : $d\tilde{r} = \begin{pmatrix} c.dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dt \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$.

Dans le repère O', la position du mobile M est indiquée par le quadrivec-

teur : $\tilde{r}' = \begin{pmatrix} c.t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, dont la différentielle est : $d\tilde{r}' = \begin{pmatrix} c.dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = dt' \cdot \begin{pmatrix} c \\ v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}$.

Pour O , la vitesse du mobile M est $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$; pour O' , c'est $v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z}$. La vitesse entre O et O' est la composée $V = v \oplus v'$ (correspondant à la rapidité W).

Nous savons que le quadrivecteur position $\tilde{r}$ est Lorentz-invariant ; il en est donc de même de sa différentielle $d\tilde{r}$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} c dt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{W}{c} & -sh \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ -sh \frac{W}{c} & ch \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} ;$$

$$dt' \cdot \begin{pmatrix} c \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{W}{c} & -sh \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ -sh \frac{W}{c} & ch \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . dt \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} .$$

Si on pouvait diviser le membre de gauche par dt' et celui de droite par dt , on obtiendrait une relation de type Lorentz reliant v' à v . Mais c'est interdit, car il faut diviser les deux membres par un même facteur. On va donc choisir le temps propre du mobile, qu'on note souvent τ , et qui est égal à $\frac{s}{c}$, où s l'invariant de Minkowski ("distance d'univers").

On sait que $dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ et que $dt' = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$, donc :

$$d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt' \cdot \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} .$$

Dans l'égalité précédente, nous allons donc diviser le membre de gauche par $dt \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ et celui de droite par $dt' \cdot \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$. Nous obtenons :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{W}{c} & -sh \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ -sh \frac{W}{c} & ch \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} .$$

On note :

$$\tilde{U} = \frac{d\tilde{r}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = ch \frac{w}{c} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{U}' = \frac{d\tilde{r}'}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = ch \frac{w'}{c} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\tilde{U}' = \begin{pmatrix} ch \frac{W}{c} & -sh \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ -sh \frac{W}{c} & ch \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{U}.$$

Cette égalité signifie que le quadrivecteur $\tilde{U}$ est Lorentz-invariant.

Ce quadrivecteur est appelé : quadrivecteur vitesse (ou quadrivitesse).

Nous avons noté $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = ch \frac{w}{c}$ (attention : w est alors la rapidité du mobile par rapport à l'observateur O , à ne pas confondre avec la rapidité entre les deux observateurs, que nous avons notée W).

En multipliant le quadrivecteur vitesse $\tilde{U}$ par m_0 , on obtient un autre quadrivecteur Lorentz-invariant, qu'on nomme énergie-impulsion :

$$\tilde{p} = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{p}' = m_0 \cdot ch \frac{w'}{c} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}.$$

La première composante de ce quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{p}$ est donc $m_0 \cdot c \cdot ch \frac{w}{c} = \frac{E}{c}$, où $E = m_0 \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c}$ est l'énergie du mobile M évaluée dans le repère de l'observateur O ; les trois autres composantes s'obtiennent en projetant l'impulsion vectorielle $\vec{p} = m_0 \cdot c \cdot sh \frac{w}{c} = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{E}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ sur les trois axes spatiaux.

On peut donc écrire :

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \frac{E}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},$$

où $p_x = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} \cdot v_x$, $p_y = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} \cdot v_y$ et $p_z = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} \cdot v_z$ sont les trois composantes de l'impulsion vectorielle.

On a alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{W}{c} & -sh \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ -sh \frac{W}{c} & ch \frac{W}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}.$$

On peut définir un pseudo-produit scalaire des quadrivecteurs vitesse :

$$\tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2 = ch \frac{w_1}{c} (c, i.v_{1x}, i.v_{1y}, i.v_{1z}) \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \begin{pmatrix} c \\ i.v_{2x} \\ i.v_{2y} \\ i.v_{2z} \end{pmatrix} ;$$

$$\tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2 = ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot (c^2 - v_{1x}.v_{2x} - v_{1y}.v_{2y} - v_{1z}.v_{2z}).$$

On peut écrire aussi :

$$\frac{1}{c^2} \cdot \tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2 = ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(1 - \frac{v_{1x}}{c} \cdot \frac{v_{2x}}{c} - \frac{v_{1y}}{c} \cdot \frac{v_{2y}}{c} - \frac{v_{1z}}{c} \cdot \frac{v_{2z}}{c} \right) ;$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2 = ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(1 - \frac{\vec{v}_1}{c} \cdot \frac{\vec{v}_2}{c} \right).$$

Si on note v_1 et v_2 les normes de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ et ϕ l'angle formé par ces deux vecteurs, alors $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1.v_2.\cos \phi$, et, par conséquent :

$$\frac{1}{c^2} \cdot \tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2 = ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(1 - \frac{v_1}{c} \cdot \frac{v_2}{c} \cdot \cos \phi \right) ;$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2 = ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} \cdot \cos \phi.$$

On peut démontrer que ce pseudo-produit scalaire de deux quadrivecteurs vitesse (ou énergie-impulsion) est conservé par la transformation de Lorentz. Voici une démonstration basée sur les rapidités.

Considérons d'abord, dans l'espace des vitesses usuel, trois points M , A et B tels que $\vec{MA} = \vec{v}_1$ et $\vec{MB} = \vec{v}_2$, avec $\widehat{AMB} = \phi$. On a alors : $\vec{AB} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Si on déplace le point M , la longueur AB ne change pas.

Transposons ce triangle dans l'espace hyperbolique des rapidités. Nous conservons l'angle ϕ et les noms des points ; la mesure de MA ne sera plus égale à v_1 mais à $\frac{w_1}{c}$, celle de MB ne sera plus égale à v_2 mais à $\frac{w_2}{c}$, et celle de AB ne sera plus égale à $|v_2 - v_1|$ mais à $\frac{|w_2 \ominus w_1|}{c}$.

Selon le théorème d'Al-Kashi hyperbolique, on a :

$$ch \frac{|w_2 \ominus w_1|}{c} = ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} \cdot \cos \phi.$$

Dans cet espace des rapidités, un changement de repère équivaut à un changement d'origine. Nous faisons jouer ce rôle d'origine au point M , que nous allons déplacer, tandis que A et B vont rester fixes. Leur distance $|w_2 \ominus w_1|$ sera donc constante, donc $ch \frac{|w_2 \ominus w_1|}{c}$ sera constant, et, par conséquent, d'après le théorème d'Al-Kashi, l'expression $ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} \cdot \cos \phi$ sera constante aussi. Donc le produit scalaire $\tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2$ est invariant par changement de repère.

Passons maintenant à la pseudo-norme (carrée) associée à ce pseudo-produit scalaire :

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}\|^2 &= \tilde{U} \cdot \tilde{U} = ch^2 \frac{w}{c} \cdot (c^2 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)) ; \\ \|\tilde{U}\|^2 &= \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2. \end{aligned}$$

On peut définir aussi un pseudo-produit scalaire des quadrivecteurs énergie-impulsion :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 &= \left(\frac{E_1}{c}, i.p_{1x}, i.p_{1y}, i.p_{1z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{E_2}{c} \\ i.p_{2x} \\ i.p_{2y} \\ i.p_{2z} \end{pmatrix} ; \\ \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 &= \frac{E_1 \cdot E_2}{c^2} - (p_{1x} \cdot p_{2x} + p_{1y} \cdot p_{2y} + p_{1z} \cdot p_{2z}) = \frac{E_1 \cdot E_2}{c^2} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 ; \\ \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 &= m_1 \cdot m_2 \cdot c^2 \cdot \left(ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} \cdot \cos \phi \right). \end{aligned}$$

Ce qui a été dit sur le pseudo-produit scalaire des quadrivitesse se transpose ici : le pseudo-produit scalaire des quadrivecteurs énergie-impulsion est invariant par changement de repère.

La pseudo-norme (carrée) associée est :

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}\|^2 &= \tilde{p} \cdot \tilde{p} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E^2 - c^2 \cdot p^2}{c^2} ; \\ \|\tilde{p}\|^2 &= \|m_0 \cdot \tilde{U}\|^2 = m_0^2 \cdot \|\tilde{U}\|^2 = m_0^2 \cdot c^2. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{E^2 - c^2 \cdot p^2}{c^2} &= m_0^2 \cdot c^2 ; \\ E^2 - c^2 \cdot p^2 &= m_0^2 \cdot c^4. \end{aligned}$$

De même qu'on a défini le quadrivecteur vitesse par : $\tilde{U} = \frac{d\tilde{r}}{d\tau}$, on peut définir un quadrivecteur accélération par : $\tilde{A} = \frac{d\tilde{U}}{d\tau}$.

On peut aussi définir un quadrivecteur force (ou quadriforce) : $\tilde{f} = \frac{d\tilde{p}}{d\tau}$. Comme on a $\tilde{p} = m_0 \cdot \tilde{U}$, on aura aussi $\tilde{f} = m_0 \cdot \tilde{A}$.

Tout ce qui vient d'être dit, à priori, n'est pas valable pour la lumière ni pour une particule se déplaçant à la vitesse de la lumière, puisque, dans nos calculs, intervient le coefficient $ch\frac{w}{c}$, qui tend vers $+\infty$ quand $v \rightarrow c$.

Cependant, si on part de la formule :
$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \frac{E}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},$$

on voit qu'elle peut parfaitement s'appliquer à la lumière ; il suffit de remplacer E par $h.\nu$ et p par $\frac{h.\nu}{c}$. On obtient :

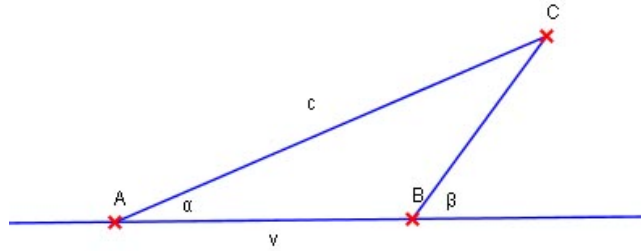
$$\tilde{p} = \frac{h.\nu}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$||\tilde{p}||^2 = \frac{h^2.\nu^2}{c^4} \cdot (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = 0.$$

Mais il faut démontrer que ce quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon, comme celui d'une particule massive de vitesse inférieure à c , est Lorentz-invariant.

Reprenons une fois de plus la figure de l'aberration de la lumière ou de l'effet Doppler relativiste :



Le premier observateur est A , le second (qui se déplace à la vitesse v par rapport au premier) est B ; le point C représente le photon. On néglige la troisième dimension spatiale, inutile ici.

Le quadrivecteur énergie-impulsion du photon, évalué dans le repère de A , s'écrit :

$$\tilde{p} = \frac{h.\nu}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{h.\nu}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c \\ c.\cos \alpha \\ c.\sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Nous allons transformer ce quadrivecteur par la transformation de Lorentz, pour connaître le point de vue de B , puis nous vérifierons que les résultats sont bien cohérents avec ce qui a été démontré précédemment.

Le quadrivecteur énergie-impulsion du même photon, évalué par B , doit s'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{p}' &= \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{p} ; \\ \tilde{p}' &= \frac{h.\nu}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -\frac{v}{c}.ch\frac{w}{c} & 0 \\ -\frac{v}{c}.ch\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ c.\cos \alpha \\ c.\sin \alpha \end{pmatrix} ; \\ \tilde{p}' &= \frac{h.\nu}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c.ch\frac{w}{c} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}.\cos \alpha\right) \\ c.ch\frac{w}{c} \cdot \left(-\frac{v}{c} + \cos \alpha\right) \\ c.\sin \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mais on doit avoir aussi :

$$\tilde{p}' = \frac{h.\nu'}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c \\ c.\cos \beta \\ c.\sin \beta \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \frac{h.\nu}{c^2} \cdot c.ch\frac{w}{c} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}.\cos \alpha\right) = \frac{h.\nu'}{c^2} \cdot c ; \\ \frac{h.\nu}{c^2} \cdot c.ch\frac{w}{c} \cdot \left(-\frac{v}{c} + \cos \alpha\right) = \frac{h.\nu'}{c^2} \cdot c.\cos \beta ; \\ \frac{h.\nu}{c^2} \cdot c.\sin \alpha = \frac{h.\nu'}{c^2} \cdot c.\sin \beta ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu' = \nu.ch\frac{w}{c} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}.\cos \alpha\right) = \nu \cdot \frac{1 - \frac{v}{c}.\cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \\ \nu' \cdot \cos \beta = \nu.ch\frac{w}{c} \cdot \left(-\frac{v}{c} + \cos \alpha\right) = \nu \cdot \frac{-\frac{v}{c} + \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \\ \nu' \cdot \sin \beta = \nu.\sin \alpha. \end{cases}$$

La première égalité :

$$\nu' = \nu \cdot \frac{1 - \frac{v}{c}.\cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a déjà été démontrée dans la section sur l'effet Doppler.

En faisant la substitution dans la deuxième formule, on obtient :

$$\cos \beta = \frac{\nu}{\nu'} \cdot \frac{-\frac{v}{c} + \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ;$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha}.$$

Cette égalité a été démontrée dans la section sur l'aberration.

Quant à la troisième égalité, elle découle des deux précédentes :

$$\nu'^2 \cdot \sin^2 \beta = \nu'^2 \cdot (1 - \cos^2 \beta) = \nu^2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \nu^2 \cdot \frac{\left(\cos \alpha - \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} ;$$

$$\nu'^2 \cdot \sin^2 \beta = \nu^2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha\right)^2 - \left(\cos \alpha - \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} ;$$

$$\nu'^2 \cdot \sin^2 \beta = \nu^2 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha + \frac{v^2}{c^2} \cdot \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 2 \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \alpha - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} ;$$

$$\nu'^2 \cdot \sin^2 \beta = \nu^2 \cdot \frac{1 + \frac{v^2}{c^2} \cdot \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} ;$$

$$\nu'^2 \cdot \sin^2 \beta = \nu^2 \cdot \frac{(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \nu^2 \cdot \sin^2 \alpha.$$

Nous voyons donc que le quadrivecteur $\tilde{p}$ est bien Lorentz-invariant ; on aurait même pu l'utiliser pour démontrer les formules de l'aberration et de l'effet Doppler relativiste.

On a l'habitude d'appeler "quadrivecteur d'onde" le quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon, ou d'une onde de vitesse égale à c . On le note $\tilde{k}$. Comme $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ et $\frac{h}{2\pi} = \hbar$, on a : $\frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{2\pi \cdot \hbar \cdot \frac{\omega}{2\pi}}{c} = \frac{\hbar \cdot \omega}{c}$, on écrira :

$$\tilde{k} = \frac{\hbar \cdot \omega}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},$$

où v_x , v_y et v_z sont les projections de la vitesse (c) sur les trois axes.

La partie vectorielle :

$$\vec{k} = \frac{\hbar \cdot \omega}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{est le vecteur d'onde.}$$

On pourrait également essayer de définir une quadrivitesse du photon, en divisant son quadrivecteur énergie-impulsion par $\frac{E}{c^2} = \frac{\hbar \cdot \nu}{c^2}$; on obtiendrait alors :

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

Mais la définition usuelle de la quadrivitesse : $\tilde{U} = \frac{d\tilde{r}}{d\tau} = ch \frac{w}{c} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

ne peut pas s'appliquer ici, d'une part parce-que, pour un photon, on aurait $ch \frac{w}{c} = 0$, mais surtout parce-que son temps propre $d\tau$ serait toujours nul. De plus, on obtient $||\tilde{U}|| = 0$, alors que pour une particule de vitesse inférieure à c on a $||\tilde{U}|| = c$.

17 Propriétés mathématiques des quadrivecteurs

Considérons deux événements $A(ct, x, y, z)$ et $A'(ct', x', y', z')$ de l'espace-temps de Minkowski. L'intervalle spatio-temporel entre ces deux événements est un quadrivecteur :

$$\widetilde{AA'} = (c.(t' - t), x' - x, y' - y, z' - z) = (c.\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) ;$$

$$\widetilde{A'A} = (c.(t - t'), x - x', y - y', z - z') = (-c.\Delta t, -\Delta x, -\Delta y, -\Delta z) = -\widetilde{AA'}.$$

Si $t' > t$, on a $\Delta t > 0$ et $-\Delta t < 0$; dans ce cas, le quadrivecteur $\widetilde{AA'}$ sera dit orthochrone et $\widetilde{A'A}$ antichrone. Mais en relativité restreinte rien ne permet de distinguer objectivement le futur du passé. Est antichrone le quadrivecteur auquel on a attribué une coordonnée temporelle de signe "-", par le choix arbitraire d'un sens de l'axe du temps.

Si on a $(\Delta s)^2 = c^2.(\Delta t)^2 - ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2) = 0$, autrement dit : $c.|\Delta t| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \Delta l$, alors un message peut aller soit de A à A' , soit de A' à A , à la vitesse de la lumière. Les deux quadrivecteurs $\widetilde{AA'}$ et $\widetilde{A'A}$ sont de **genre lumière**, l'un orthochrone, l'autre antichrone. Si c'est $\widetilde{AA'}$ qui est orthochrone, et $\widetilde{A'A}$ antichrone, on dit que A' est postérieur à A , et A antérieur à A' (et vice-versa). On choisit le sens du temps.

Si on a $(\Delta s)^2 > 0$, autrement dit : $c|\Delta t| > \Delta l$, alors un message peut aller soit de A à A' , soit de A' à A , à une vitesse inférieure à celle de la lumière. Les deux quadrivecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{A'A}$ sont de **genre temps**, l'un orthochrone, l'autre antichrone. Si c'est $\overrightarrow{AA'}$ qui est orthochrone, on dit que A' est postérieur à A , et A antérieur à A' (et vice-versa).

Si on a $(\Delta s)^2 < 0$, autrement dit : $c|\Delta t| < \Delta l$, alors aucun message ne peut aller de A à A' , ou de A' à A , à une vitesse inférieure ou égale à celle de la lumière. Les deux quadrivecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{A'A}$ sont de **genre espace**. Dans ce cas, Δs est un nombre imaginaire. Rien ne permet de dire que, par rapport à A , A' soit situé dans le futur ou dans le passé : on dit qu'ils est "ailleurs".

Lorsqu'on multiplie un quadrivecteur quelconque par un nombre réel λ (positif ou négatif), son genre ne change pas. Mais, si λ est négatif, le sens du temps est inversé, c'est-à-dire qu'un vecteur orthochrone va devenir antichrone, et inversement.

Lorsqu'on additionne deux quadrivecteurs (ce qui revient à additionner deux à deux leurs coordonnées), les choses sont plus compliquées ; pour simplifier, supposons que ces quadrivecteurs soient tous les deux orthochrones :

- la somme de deux quadrivecteurs de genre lumière (tous les deux orthochrones) peut être de genre lumière ou de genre temps (et également orthochrone) ;
- la somme de deux quadrivecteurs de genre temps (tous les deux orthochrones) est toujours de genre temps (et orthochrone) ;
- la somme de deux quadrivecteurs de genre espace (tous les deux orthochrones) peut être soit de genre lumière, soit de genre temps, soit de genre espace (et orthochrone).

On peut remplacer "orthochrone" par "antichrone", mais attention aux cas où l'un des quadrivecteurs est orthochrone et l'autre antichrone !

Continuons à raisonner uniquement sur les vecteurs orthochrones. On peut dire que l'ensemble des quadrivecteurs de genre temps au sens large (incluant les quadrivecteurs de genre lumière) est stable par addition (ce qui n'est pas le cas de l'ensemble des quadrivecteurs de genre espace). De plus, l'ensemble des quadrivecteurs de genre lumière en est une partie génératrice, c'est-à-dire que tout quadrivecteur (orthochrone) de genre temps peut être obtenu en additionnant deux quadrivecteurs (orthochrones) de genre lumière.

Ne démontrons que les propriétés les plus intéressantes.

Notons $(c.t, \vec{l})$ (avec $t \geq 0$, $||\vec{l}|| = l$ et $c.t \geq l$) un quadrivecteur orthochrone

de genre temps (au sens large). Pourquoi la somme de deux quadrivecteurs de ce type possède-t-elle les mêmes propriétés ?

Considérons deux quadrivecteurs ayant ces propriétés : $(c.t_1, \vec{l}_1)$ et $(c.t_2, \vec{l}_2)$, et leur somme : $(c.t, \vec{l}) = (c.(t_1 + t_2), \vec{l}_1 + \vec{l}_2)$. On a alors :

$$c.t = c.(t_1 + t_2) = c.t_1 + c.t_2 \geq l_1 + l_2 = \|\vec{l}_1\| + \|\vec{l}_2\| \geq \|\vec{l}_1 + \vec{l}_2\| = \|\vec{l}\| = l.$$

Le quadrivecteur obtenu est donc bien de genre temps.

On a utilisé l'inégalité triangulaire : $\|\vec{l}_1\| + \|\vec{l}_2\| \geq \|\vec{l}_1 + \vec{l}_2\|$.

Voyons maintenant pourquoi tout quadrivecteur $(c.t, \vec{l})$ orthochrone ($t > 0$) de genre temps ($c.t \geq l$) est la somme de deux quadrivecteurs de genre lumière.

Choisissons arbitrairement deux nombres positifs t_1 et t_2 tels que $t_1 + t_2 = t$, et posons : $l_1 = c.t_1$ et $l_2 = c.t_2$. Représentons le problème géométriquement : étant donnés deux points A et B tels que $\vec{AB} = \vec{l}$, il est toujours possible de trouver un point C tel que $AC = l_1$ et $BC = l_2$, puisque $l_1 + l_2 = c.t_1 + c.t_2 = c.t > l$. Ce point C étant choisi, on pose $\vec{l}_1 = \vec{AC}$ et $\vec{l}_2 = \vec{CB}$; les quadrivecteurs $(c.t_1, \vec{l}_1)$ et $(c.t_2, \vec{l}_2)$ sont de genre lumière et leur somme est égale au quadrivecteur initial, de genre temps. Ceci revient à dire que, s'il est possible d'aller en ligne droite d'un point A à un point B à une vitesse v inférieure à c , alors il est aussi possible d'aller de A à B à la vitesse c , en suivant une ligne brisée.

Nous voyons donc que l'ensemble des quadrivecteurs de genre lumière permet d'engendrer l'ensemble des quadrivecteurs de genre temps, qui est stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire. Ces quadrivecteurs ont donc, mathématiquement, un rôle bien particulier. Or nous pouvons remarquer que les quadrivecteurs qui jouent un rôle central en relativité restreinte, à savoir la quadrivitesse, l'énergie-impulsion et le quadrivecteur d'onde, sont précisément des quadrivecteurs orthochrones, de genre temps.

La quadrivitesse soulève un problème : la somme de deux quadrivitesse n'est pas une quadrivitesse ! Effectivement, si on nomme $\tilde{U}$ une quadrivitesse quelconque, on a nécessairement $\|\tilde{U}\| = c$: c'est vrai pour toutes les quadrivitesse. Mais si on considère le quadrivecteur $\tilde{U} + \tilde{U}$, sa pseudo-norme va être égale à $2.c$, donc ce n'est pas une quadrivitesse.

Tout ce qui a été dit ci-dessus s'applique parfaitement bien aux quadrivecteurs énergie-impulsion, qui sont de genre temps (le rôle du temps étant joué par l'énergie scalaire E) et aux quadrivecteurs d'onde, qui sont de genre lumière. Remarquons au passage que tout quadrivecteur énergie-impulsion de genre temps peut être obtenu en additionnant deux ou plusieurs quadrivecteurs d'onde, de genre lumière.

Précisons maintenant les notions de pseudo-produit scalaire et de pseudo-norme, dont nous avons brièvement parlé, en concentrant notre attention, plus particulièrement, sur l'énergie-impulsion et sur le vecteur d'onde.

Pour les quadrivecteurs position de la forme $\tilde{r} = (c.t, x, y, z)$, où t, x, y, z sont des intervalles temporel et spatiaux, le pseudo-produit scalaire est de la forme :

$$\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 = c^2.t_1.t_2 - x_1.x_2 - y_1.y_2 - z_1.z_2 = c^2.t_1.t_2 - \vec{l}_1.\vec{l}_2.$$

La pseudo-forme quadratique associée est :

$$q(\tilde{r}) = \tilde{r}.\tilde{r} = c^2.t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2.t^2 - \vec{l}^2,$$

et la pseudo-norme associée :

$$\|\tilde{r}\| = \sqrt{q(\tilde{r})} = \sqrt{c^2.t^2 - \vec{l}^2}.$$

Pour les quadrivecteurs énergie-impulsion de la forme $\tilde{p} = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$, le pseudo-produit scalaire est de la forme :

$$\tilde{p}_1.\tilde{p}_2 = \frac{E_1.E_2}{c^2} - p_{1x}.p_{2x} - p_{1y}.p_{2y} - p_{1z}.p_{2z} = \frac{E_1.E_2}{c^2} - \vec{p}_1.\vec{p}_2.$$

La pseudo-forme quadratique associée est :

$$q(\tilde{p}) = \tilde{p}.\tilde{p} = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2,$$

et la pseudo-norme associée :

$$\|\tilde{p}\| = \sqrt{q(\tilde{p})} = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2}.$$

En mathématiques, on présente généralement le produit scalaire comme une forme bilinéaire symétrique non dégénérée positive. Il permet de définir une forme quadratique $q(x) = x.x = \langle x, x \rangle$, et, par suite, une norme : $\|x\| = \sqrt{q(x)}$; en retour, la norme permet de définir le produit scalaire.

Cette définition soulève plusieurs problèmes. Le premier est que la norme doit être positive; or ici la norme est positive seulement pour les quadrivecteurs de genre temps (au sens large), ce qui nous impose de rejeter les quadrivecteurs de genre espace. Par chance, l'énergie-impulsion est toujours de genre temps. Le second problème est qu'une forme bilinéaire symétrique se définit sur un espace vectoriel, dans lequel chaque élément (ici : les quadrivecteurs) peut être multiplié par n'importe quel coefficient réel, y compris négatif, ce qui nous interdit, en principe, de nous limiter aux quadrivecteurs orthochrones. Mais l'énergie-impulsion est toujours orthochrone, jamais antichrone. Notre "espace vectoriel" n'est pas un vrai espace vectoriel : la multiplication par un facteur négatif n'y

est pas définie, ni la notion d'opposés, et la soustraction y est problématique.

Malgré ces difficultés, certains liens entre produit scalaire et norme se retrouvent avec le pseudo-produit scalaire et la pseudo-norme ; en particulier :

$$\|\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2\|^2 = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) \cdot (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_1 + 2 \cdot \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + \tilde{p}_2 \cdot \tilde{p}_2 = \|\tilde{p}_1\|^2 + 2 \cdot \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 + \|\tilde{p}_2\|^2 ;$$

$$\tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 = \frac{1}{2} \cdot (\|\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2\|^2 - \|\tilde{p}_1\|^2 - \|\tilde{p}_2\|^2).$$

On voit donc que la pseudo-norme peut être définie à partir du pseudo-produit scalaire, ou pseudo-produit scalaire à partir de la pseudo-norme.

Cette pseudo-forme bilinéaire symétrique admet des éléments isotropes, qui, par définition, vérifient : $\tilde{p} \cdot \tilde{p} = 0$. L'ensemble des éléments isotropes est le sous-ensemble des quadrivecteurs de genre lumière.

On sait qu'un vrai produit scalaire, associé à une vraie norme (positive), vérifie l'inégalité de Schwarz : $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Cette inégalité est-elle vérifiée par les quadrivecteurs dont nous parlons ?

Raisonnons par exemple sur les quadrivecteurs position orthochrones, de genre temps : $\tilde{r} = (ct, \vec{l})$, avec $t > 0$ et $ct > \|\vec{l}\|$. On peut poser $\vec{v} = \frac{\vec{l}}{t}$; on a alors : $\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{l}}{c \cdot t}$ et $\frac{v}{c} = \frac{\|\vec{v}\|}{c} = \frac{\|\vec{l}\|}{c \cdot t} < 1$.

Appelons $\vec{w}$ la rapidité correspondant à la vitesse $\vec{v}$. On a alors :

$$ch \frac{w}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad sh \frac{w}{c} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad sh \frac{\vec{w}}{c} = \frac{\frac{\vec{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$\|\tilde{r}\|^2 = (ct, \vec{l}) \cdot (ct, \vec{l}) = c^2 \cdot t^2 - l^2 = c^2 \cdot t^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) ;$$

$$\|\tilde{r}\| = ct \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} ;$$

$$\frac{\tilde{r}}{\|\tilde{r}\|} = \frac{1}{ct \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot (ct, \vec{v} \cdot t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\frac{\vec{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) ;$$

$$\tilde{r} = \|\tilde{r}\| \cdot \left(ch \frac{w}{c}, sh \frac{\vec{w}}{c} \right).$$

Cette formule est valable pour tous les quadrivecteurs position orthochrones de genre temps, et s'adapte aux quadrivecteurs énergie-impulsion.

Appliquons-la à deux quadrivecteurs $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$, et faisons leur produit scalaire :

$$\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 = \|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\|.\left(ch\frac{w_1}{c}, sh\frac{\vec{w}_1}{c}\right).\left(ch\frac{w_2}{c}, sh\frac{\vec{w}_2}{c}\right) ;$$

$$\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 = \|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\|.\left(ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c} - sh\frac{\vec{w}_1}{c}.sh\frac{\vec{w}_2}{c}\right) ;$$

$$\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 = \|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\|.ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c}.\left(1 - \frac{\vec{v}_1}{c}.\frac{\vec{v}_2}{c}\right).$$

Notons ϕ l'angle formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$; on a : $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = v_1.v_2.\cos \phi$, et par suite :

$$\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 = \|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\|.ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c}.\left(1 - \frac{v_1.v_2}{c^2}.\cos \phi\right) ;$$

$$\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 = \|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\|.\left(ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c} - sh\frac{w_1}{c}.sh\frac{w_2}{c}.\cos \phi\right).$$

On doit penser ici au théorème d'Al Kashi hyperbolique, qui nous dit que :

$$ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c} - sh\frac{w_1}{c}.sh\frac{w_2}{c}.\cos \phi = ch\frac{\vec{w}_1 \ominus \vec{w}_2}{c}.$$

On a donc :

$$\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 = \|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\|.ch\frac{\vec{w}_1 \ominus \vec{w}_2}{c}.$$

Comme un cosinus hyperbolique est toujours supérieur ou égal à 1, on en déduit :

$$\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 \geq \|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\|,$$

qu'on peut écrire aussi (selon la notation choisie pour le produit scalaire) :

$$< \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 > \geq \|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\|.$$

Nous obtenons une sorte d'**inégalité de Schwarz inversée**.

Voici une autre démonstration de cette inégalité, plus élémentaire mais moins instructive.

Posons : $\tilde{r}_1 = (c.t_1, \vec{l}_1)$ et $\tilde{r}_2 = (c.t_2, \vec{l}_2)$ (où $\vec{l}_1$ et $\vec{l}_2$ sont les parties vectorielles, tridimensionnelles, des deux quadrivecteurs). On suppose que ces quadrivecteurs sont de genre temps. On a alors :

$$\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 = c^2.t_1.t_2 - \vec{l}_1.\vec{l}_2 = c^2.t_1.t_2 - l_1.l_2.\cos \phi ;$$

$$\|\tilde{r}_1\|^2 = c^2.t_1^2 - \vec{l}_1^2 = c^2.t_1^2 - l_1^2 ;$$

$$\|\tilde{r}_2\|^2 = c^2.t_2^2 - \vec{l}_2^2 = c^2.t_2^2 - l_2^2.$$

Les deux quadrivecteurs étant de genre temps, on a : $c.t_1 \geq l_1$ et $c.t_2 \geq l_2$, donc $c^2.t_1.t_2 \geq l_1.l_2 \geq l_1.l_2.\cos \phi$; le produit scalaire $\tilde{r}_1.\tilde{r}_2$ est donc positif (ou nul).

$$\begin{aligned}
(\tilde{r}_1.\tilde{r}_2)^2 - \|\tilde{r}_1\|^2.\|\tilde{r}_2\|^2 &= (c^2.t_1.t_2 - l_1.l_2.\cos \phi)^2 - (c^2.t_1^2 - l_1^2).(c^2.t_2^2 - l_2^2) = \dots \\
\dots &= (c^4.t_1^2.t_2^2 - 2.c^2.t_1.t_2.l_1.l_2.\cos \phi + l_1^2.l_2^2.\cos^2 \phi) - (c^4.t_1^2.t_2^2 - c^2.t_1^2.l_2^2 - c^2.t_2^2.l_1^2 + l_1^2.l_2^2) = \dots \\
\dots &= -2.c^2.t_1.t_2.l_1.l_2.\cos \phi + l_1^2.l_2^2.\cos^2 \phi + c^2.t_1^2.l_2^2 + c^2.t_2^2.l_1^2 - l_1^2.l_2^2 = \dots \\
\dots &= (c^2.t_1^2.l_2^2 - 2.c^2.t_1.t_2.l_1.l_2 + c^2.t_2^2.l_1^2) + 2.c^2.t_1.t_2.l_1.l_2.(1 - \cos \phi) - (1 - \cos^2 \phi).l_1^2.l_2^2 = \dots \\
\dots &= (c.t_1.l_2 - c.t_2.l_1)^2 + l_1.l_2.(1 - \cos \phi).[2.c^2.t_1.t_2 - (1 + \cos \phi).l_1.l_2].
\end{aligned}$$

On peut remarquer d'abord que $(c.t_1.l_2 - c.t_2.l_1)^2 \geq 0$ (c'est un carré), ensuite que $(1 - \cos \phi) \geq 0$; d'autre part : $2.c^2.t_1.t_2 \geq 2.l_1.l_2 \geq (1 + \cos \phi).l_1.l_2$. Il en résulte que l'expression entre crochets est positive ou nulle. En conclusion, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\tilde{r}_1.\tilde{r}_2)^2 - \|\tilde{r}_1\|^2.\|\tilde{r}_2\|^2 &\geq 0 ; \\
\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 &\geq \|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\|.
\end{aligned}$$

On retrouve bien l'inégalité de Schwarz inversée.

En voici une conséquence immédiate ; $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$ étant toujours des quadrivecteurs orthochrones de genre temps :

$$\begin{aligned}
\|\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2\|^2 &= \|\tilde{r}_1\|^2 + 2.\tilde{r}_1.\tilde{r}_2 + \|\tilde{r}_2\|^2 \geq \|\tilde{r}_1\|^2 + 2.\|\tilde{r}_1\|.\|\tilde{r}_2\| + \|\tilde{r}_2\|^2 ; \\
\|\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2\|^2 &\geq (\|\tilde{r}_1\| + \|\tilde{r}_2\|)^2 ; \\
\|\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2\| &\geq \|\tilde{r}_1\| + \|\tilde{r}_2\|.
\end{aligned}$$

Nous voyons donc que l'inégalité de Schwarz inversée conduit à une **inégalité triangulaire inversée**.

Cette inégalité triangulaire inversée, comme l'inégalité de Schwarz inversée, est valable pour tous les quadrivecteurs orthochrones de genre temps, donc en particulier pour l'énergie-impulsion.

Si on représente, dans l'espace de Minkowski, les quadrivecteurs de genre temps $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$ par $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$, alors :

$$\|\vec{AC}\| \geq \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|.$$

On pourrait traduire cette inégalité ainsi : si nous avons le choix d'aller de A à C en ligne droite ou de faire un détour par B , alors on doit savoir que c'est le second parcours qui est le plus court, si les longueurs des parcours sont évaluées selon la pseudo-métrique de Minkowski.

Parmi tous les parcours conduisant de A à C , la ligne droite est le plus long chemin (en termes d'espace-temps, ou, si on préfère, de temps propre). Quand nous parlerons d'espace-temps courbe, il faudra en tenir compte dans la définition des géodésiques : une géodésique est une ligne d'espace-temps qui maximise le temps propre.

C'est l'inverse de ce qu'on observe dans notre espace usuel avec la norme usuelle pythagoricienne. Peut-on en déduire que l'espace de Minkowski est courbe ? Non, mais la seule norme "naturelle" (conservée par changement de repère), dans cet espace, est étroitement reliée à la rapidité, et l'espace des rapidités, lui, est hyperbolique.

Reprenons les calculs qui précèdent, et voyons comment ils s'adaptent au cas des quadrvecteurs de genre lumière, c'est-à-dire lorsque $c.t_1 = l_1$ et $c.t_2 = l_2$. On obtient :

$$\begin{aligned} & (\tilde{r}_1.\tilde{r}_2)^2 - \|\tilde{r}_1\|^2.\|\tilde{r}_2\|^2 = ... \\ ... &= (c.t_1.l_2 - c.t_2.l_1)^2 + l_1.l_2.(1 - \cos \phi). [2.c^2.t_1.t_2 - (1 + \cos \phi).l_1.l_2] = ... \\ ... &= (l_1.l_2 - l_2.l_1)^2 + l_1.l_2.(1 - \cos \phi). [2.l_1.l_2 - (1 + \cos \phi).l_1.l_2] = ... \\ ... &= l_1^2.l_2^2.(1 - \cos \phi)^2. \end{aligned}$$

La norme d'un quadrvecteur de genre lumière est nulle, donc dans le cas présent : $\|\tilde{r}_1\| = \|\tilde{r}_2\| = 0$, et par conséquent :

$$\begin{aligned} & (\tilde{r}_1.\tilde{r}_2)^2 = l_1^2.l_2^2.(1 - \cos \phi)^2 ; \\ & \tilde{r}_1.\tilde{r}_2 = l_1.l_2.(1 - \cos \phi). \end{aligned}$$

Tout ce qui vient d'être dit s'adapte aux quadrvecteurs énergie-impulsion du type $\tilde{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \frac{E}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$; on a :

$$\tilde{p}_1.\tilde{p}_2 = \frac{E_1.E_2}{c^2} - \vec{p}_1.\vec{p}_2 = \frac{E_1.E_2}{c^2} - p_1.p_2.\cos \phi.$$

Rappelons que $E_1 = m_1.c^2.ch \frac{w_1}{c}$, $E_2 = m_2.c^2.ch \frac{w_2}{c}$, et, pour les impulsions : $p_1 = m_1.v_1.ch \frac{w_1}{c} = m_1.c.sh \frac{w_1}{c}$, $p_2 = m_2.v_2.ch \frac{w_2}{c} = m_2.c.sh \frac{w_2}{c}$.

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1.\tilde{p}_2 &= m_1.m_2.c^2 \cdot \left(ch \frac{w_1}{c} . ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c} . sh \frac{w_2}{c} . \cos \phi \right) ; \\ \tilde{p}_1.\tilde{p}_2 &= m_1.m_2.c^2 . ch \frac{w_1}{c} . ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(1 - \frac{v_1}{c} \frac{v_2}{c} . \cos \phi \right) ; \\ \tilde{p}_1.\tilde{p}_2 &= m_1.m_2.c^2 . ch \frac{\vec{w}_1 \ominus \vec{w}_2}{c}. \end{aligned}$$

Si on fait $\tilde{p} = \tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$, on a $m_0 = m_1 = m_2$, $v = v_1 = v_2$, $\phi = 0$, $\cos \phi = 1$, $w = w_1 = w_2$, $\phi = 0$, $\cos \phi = 1$, $\vec{w}_1 \ominus \vec{w}_2 = \vec{0}$, $ch \frac{\vec{w}_1 \ominus \vec{w}_2}{c} = 1$, on peut faire la substitution dans l'avant-dernière égalité :

$$||\tilde{p}||^2 = \tilde{p} \cdot \tilde{p} = m_0^2 \cdot c^2 \cdot ch^2 \frac{w}{c} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 \cdot c^2 \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 \cdot c^2 ;$$

ou bien dans la dernière :

$$||\tilde{p}||^2 = \tilde{p} \cdot \tilde{p} = m_0^2 \cdot c^2 \cdot ch \frac{\vec{w} \ominus \vec{w}}{c} = m_0^2 \cdot c^2.$$

Pour $\tilde{p}_1$, nous obtenons : $||\tilde{p}_1|| = m_1 \cdot c$; pour $\tilde{p}_2$: $||\tilde{p}_2|| = m_2 \cdot c$; et, de manière générale :

$$||\tilde{p}|| = m_0 \cdot c.$$

Nous avons écrit m_0 plutôt que m pour rappeler que nous parlons de masse au repos et non de masse maupertuisienne.

La norme du quadrivecteur énergie-impulsion d'un corps quelconque est donc proportionnelle à sa masse au repos. La définition que nous avons choisie pour ce quadrivecteur (la plus usuelle) conduit à un coefficient de proportionnalité égal à c , mais on peut adapter arbitrairement cette définition pour avoir $||\tilde{p}|| = m_0 \cdot c^2$, ou bien $||\tilde{p}|| = m_0$. Les spécialistes de la relativité restreinte ont l'habitude de poser : $c = 1$, ce qui permet d'évacuer ce problème.

On pourrait définir la masse au repos d'un corps quelconque de cette manière : $m_0 = \frac{1}{c} \cdot ||\tilde{p}||$, où $||\tilde{p}||$ est la norme de l'énergie-impulsion du corps considéré, invariante par changement de repère.

Ceci a une conséquence très curieuse. Si deux corps ont pour masses au repos m_1 et m_2 et pour énergies-impulsions $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$, alors le système formé par ces deux corps a pour masse au repos m_0 et pour énergie-impulsion $\tilde{p} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$. On a alors :

$$\begin{aligned} ||\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2|| &\geq ||\tilde{p}_1|| + ||\tilde{p}_2|| ; \\ \frac{1}{c} \cdot ||\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2|| &\geq \frac{1}{c} \cdot ||\tilde{p}_1|| + \frac{1}{c} \cdot ||\tilde{p}_2|| ; \\ m_0 &\geq m_1 + m_2. \end{aligned}$$

La masse au repos d'un système est toujours supérieure ou égale à la somme des masses au repos de ses constituants.

Nous en reparlerons dans la section sur la masse maupertuisienne.

Pour la lumière : $\tilde{p} = \tilde{k} = \frac{h.\nu}{c^2} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, où $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$.

$$\tilde{k}_1.\tilde{k}_2 = \frac{h.\nu_1}{c^2} \cdot \frac{h.\nu_2}{c^2} \cdot (c^2 - \vec{v}_1.\vec{v}_2) = \frac{h^2.\nu_1.\nu_2}{c^4} \cdot (c^2 - v_1.v_2.\cos \phi), \text{ avec } v_1 = v_2 = c ;$$

$$\tilde{k}_1.\tilde{k}_2 = \frac{h^2.\nu_1.\nu_2}{c^4} \cdot (c^2 - c^2.\cos \phi) = \frac{h^2.\nu_1.\nu_2}{c^2} \cdot (1 - \cos \phi) = \frac{E_1.E_2}{c^2} \cdot (1 - \cos \phi).$$

Bien entendu, ϕ est toujours l'angle formé par les deux vecteurs vitesse :

$$\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{pmatrix}.$$

Si les vecteurs vitesse sont parallèles et de même sens, on a $\phi = 0$, donc $\cos \phi = 1$ et $1 - \cos \phi = 0$. On obtient donc :

$$||\tilde{k}_1||^2 = \tilde{k}_1.\tilde{k}_1 = \frac{h^2.\nu_1^2}{c^2} \cdot (1 - 1) = 0 ;$$

$$||\tilde{k}_2||^2 = \tilde{k}_2.\tilde{k}_2 = \frac{h^2.\nu_2^2}{c^2} \cdot (1 - 1) = 0.$$

Si les vecteurs vitesse sont parallèles et de sens contraires, on a $\phi = \pi$, donc $\cos \phi = -1$ et $1 - \cos \phi = 2$; dans ce cas :

$$\tilde{k}_1.\tilde{k}_2 = \frac{h^2.\nu_1.\nu_2}{c^2} \cdot (1 + 1) = 2 \cdot \frac{h^2.\nu_1.\nu_2}{c^2} ;$$

$$||\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2||^2 = ||\tilde{k}_1||^2 + 2.\tilde{k}_1.\tilde{k}_2 + ||\tilde{k}_2||^2 = 0 + 4 \cdot \frac{h^2.\nu_1.\nu_2}{c^2} + 0 = 4 \cdot \frac{h^2.\nu_1.\nu_2}{c^2} ;$$

$$||\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2|| = 2 \cdot \frac{h}{c} \cdot \sqrt{\nu_1.\nu_2}.$$

Le quadrivecteur énergie-impulsion d'un système formé de deux "photons" ayant des vecteurs vitesse parallèles et de sens contraires n'est pas de genre lumière, puisque sa norme n'est pas nulle. Il est de genre temps, et possède donc une "masse au repos" non nulle :

$$m_0 = 2 \cdot \frac{h}{c^2} \cdot \sqrt{\nu_1.\nu_2}.$$

Son énergie (dans son repère) est :

$$m_0.c^2 = 2.h.\sqrt{\nu_1.\nu_2}.$$

La formule générale :

$$\tilde{k}_1.\tilde{k}_2 = \frac{h^2.\nu_1.\nu_2}{c^2} \cdot (1 - \cos \phi)$$

montre qu'un système formé de deux photons de fréquences ν_1 et ν_2 , dont les vecteurs vitesse forment un angle ϕ , a pour masse :

$$m_0 = \frac{h}{c^2} \cdot \sqrt{\nu_1 \cdot \nu_2} \cdot (1 - \cos \phi).$$

La masse minimale est $m_0 = 0$ (si $\phi = 0$), la masse maximale est $2 \cdot \frac{h}{c^2} \cdot \sqrt{\nu_1 \cdot \nu_2}$ (si $\phi = \pi$).

Nous allons maintenant reprendre, d'une autre manière, ces idées concernant la masse en relativité restreinte.

18 Echange d'un photon entre deux particules

Voici un exemple d'application.

Nous allons étudier l'échange d'un photon entre deux particules A et B en mouvement. Nous supposons que B s'éloigne de A à la vitesse v , selon la direction définie par la droite (AB) , qui sera considérée comme l'axe des x . Nous négligerons les deux autres dimensions spatiales. Nous notons m_A et m_B les masses au repos des deux particules. Le photon est émis par A et reçu par B . Le photon a pour fréquence ν dans le repère de A , et ν' dans le repère de B . Nous allons calculer le bilan énergétique dans deux repères : celui de A et celui de B avant l'interaction.

Nous choisissons comme sens positif le sens de déplacement du photon.



Dans le repère de A , le quadrivecteur énergie-impulsion de A est $\begin{pmatrix} m_A \cdot c \\ 0 \end{pmatrix}$;
et dans le repère de B , ce même quadrivecteur s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_A \cdot c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A \cdot c \cdot ch \frac{w}{c} \\ -m_A \cdot c \cdot sh \frac{w}{c} \end{pmatrix}.$$

Dans le repère de B , le quadrivecteur énergie-impulsion de B est $\begin{pmatrix} m_B \cdot c \\ 0 \end{pmatrix}$;
et dans le repère de A , ce même quadrivecteur s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & sh \frac{w}{c} \\ sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_B \cdot c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_B \cdot c \cdot ch \frac{w}{c} \\ m_B \cdot c \cdot sh \frac{w}{c} \end{pmatrix}.$$

Dans le repère de A , le quadrivecteur énergie-impulsion du photon est $\begin{pmatrix} \frac{h.\nu}{c} \\ \frac{h.\nu}{c} \end{pmatrix}$;
et dans le repère de B , ce même quadrivecteur s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h.\nu}{c} \\ \frac{h.\nu}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h.\nu}{c} \cdot (ch\frac{w}{c} - sh\frac{w}{c}) \\ \frac{h.\nu}{c} \cdot (ch\frac{w}{c} - sh\frac{w}{c}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h.\nu'}{c} \\ \frac{h.\nu'}{c} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On remarque que } \nu' = \nu \cdot (ch\frac{w}{c} - sh\frac{w}{c}) = \nu \cdot \left(\frac{e^{\frac{w}{c}} + e^{-\frac{w}{c}}}{2} - \frac{e^{\frac{w}{c}} - e^{-\frac{w}{c}}}{2} \right) = \nu \cdot e^{-\frac{w}{c}}.$$

Ceci est une autre démonstration de l'effet Doppler relativiste, dont nous avons déjà parlé.

Dans le repère de A , la somme des énergies-impulsions s'écrit :

- avant l'échange :

$$\begin{pmatrix} m_A.c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_B.c.ch\frac{w}{c} \\ m_B.c.sh\frac{w}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A.c + m_B.c.ch\frac{w}{c} \\ m_B.c.sh\frac{w}{c} \end{pmatrix} ;$$

- après l'échange :

$$\begin{pmatrix} m_A.c - \frac{h.\nu}{c} \\ 0 - \frac{h.\nu}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_B.c.ch\frac{w}{c} + \frac{h.\nu}{c} \\ m_B.c.sh\frac{w}{c} + \frac{h.\nu}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A.c + m_B.c.ch\frac{w}{c} \\ m_B.c.sh\frac{w}{c} \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, la somme n'a pas changé.

Dans le repère de B , la somme des énergies-impulsions s'écrit :

- avant l'échange :

$$\begin{pmatrix} m_A.c.ch\frac{w}{c} \\ -m_A.c.sh\frac{w}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_B.c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A.c.ch\frac{w}{c} + m_B.c \\ -m_A.c.sh\frac{w}{c} \end{pmatrix} ;$$

- après l'échange :

$$\begin{pmatrix} m_A.c.ch\frac{w}{c} - \frac{h.\nu'}{c} \\ -m_A.c.sh\frac{w}{c} - \frac{h.\nu'}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_B.c + \frac{h.\nu'}{c} \\ 0 + \frac{h.\nu'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A.c.ch\frac{w}{c} + m_B.c \\ -m_A.c.sh\frac{w}{c} \end{pmatrix}.$$

La somme n'a pas changé.

Il reste à comparer les deux sommes quadrivectorielles obtenues par les deux observateurs A et B . On peut passer de l'une à l'autre par la transformation de Lorentz, donc elles ont la même norme. Vérifions-le :

- dans le repère de A :

$$\sqrt{\left(m_A.c + m_B.c.ch\frac{w}{c}\right)^2 - \left(m_B.c.sh\frac{w}{c}\right)^2} = \dots$$

$$\begin{aligned}
\dots &= \sqrt{m_A^2 \cdot c^2 + 2 \cdot m_A \cdot m_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c} + m_B^2 \cdot c^2 \cdot ch^2 \frac{w}{c} - m_B^2 \cdot c^2 \cdot sh^2 \frac{w}{c}} = \dots \\
&= \sqrt{m_A^2 \cdot c^2 + 2 \cdot m_A \cdot m_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c} + m_B^2 \cdot c^2}.
\end{aligned}$$

- dans le repère de B :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(m_A \cdot c \cdot ch \frac{w}{c} + m_B \cdot c\right)^2 - \left(-m_A \cdot c \cdot sh \frac{w}{c}\right)^2} = \dots \\
&\dots = \sqrt{m_A^2 \cdot c^2 \cdot ch^2 \frac{w}{c} + 2 \cdot m_A \cdot m_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c} + m_B^2 \cdot c^2 - m_A^2 \cdot c^2 \cdot sh^2 \frac{w}{c}} = \dots \\
&\dots = \sqrt{m_A^2 \cdot c^2 + 2 \cdot m_A \cdot m_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c} + m_B^2 \cdot c^2}.
\end{aligned}$$

Ce résultat (indépendant de l'observateur) correspond à la "masse au repos du système", autrement dit à l'énergie totale évaluée dans le repère du centre de gravité.

On peut remarquer une chose curieuse : les observateurs ne sont pas d'accord sur l'énergie qui a été échangée, car ils ne sont pas d'accord sur la fréquence, donc sur l'énergie (scalaire) du photon. Mais ils sont d'accord sur l'énergie-impulsion quadrivectorielle qui a été échangée (à une transformation de Lorentz près, bien entendu).

Nous allons encore calculer l'effet de recul produit, en A , par l'émission du photon. Notons dw_A la variation de la rapidité de A au moment de cette émission (variation évaluée dans le repère initial de A). Nous notons m'_A la masse au repos de A après l'émission. On va avoir :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} m_A \cdot c - \frac{h \cdot \nu}{c} \\ 0 - \frac{h \cdot \nu}{c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ch \frac{dw_A}{c} & sh \frac{dw_A}{c} \\ sh \frac{dw_A}{c} & ch \frac{dw_A}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m'_A \cdot c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m'_A \cdot c \cdot ch \frac{dw_A}{c} \\ m'_A \cdot c \cdot sh \frac{dw_A}{c} \end{pmatrix} ; \\
\begin{cases} m_A \cdot c - \frac{h \cdot \nu}{c} = m'_A \cdot c \cdot ch \frac{dw_A}{c} ; \\ -\frac{h \cdot \nu}{c} = m'_A \cdot c \cdot sh \frac{dw_A}{c} ; \end{cases} \\
\left(m'_A \cdot c \cdot ch \frac{dw_A}{c}\right)^2 - \left(m'_A \cdot c \cdot sh \frac{dw_A}{c}\right)^2 &= \left(m_A \cdot c - \frac{h \cdot \nu}{c}\right)^2 - \left(-\frac{h \cdot \nu}{c}\right)^2 ; \\
m_A'^2 \cdot c^2 \cdot \left(ch^2 \frac{dw_A}{c} - sh^2 \frac{dw_A}{c}\right) &= m_A^2 \cdot c^2 - 2 \cdot m_A \cdot h \cdot \nu + \frac{h^2 \cdot \nu^2}{c^2} - \frac{h^2 \cdot \nu^2}{c^2} ; \\
m_A'^2 &= m_A^2 - \frac{2 \cdot m_A \cdot h \cdot \nu}{c^2}.
\end{aligned}$$

On a donc $m_A'^2 < m_A^2$, donc $m'_A < m_A$: la masse au repos de A a diminué. La particule émettrice (celle qui émet le photon) perd de l'énergie, donc de la

masse au repos.

De plus :

$$\begin{aligned}
\frac{m_A'^2}{m_A^2} &= 1 - \frac{2.h.\nu}{m_A.c^2} ; \\
\frac{m_A'}{m_A} &= \sqrt{1 - \frac{2.h.\nu}{m_A.c^2}}. \\
\begin{cases} ch \frac{dw_A}{c} = \frac{m_A.c - \frac{h.\nu}{c}}{m_A'.c} ; \\ sh \frac{dw_A}{c} = -\frac{\frac{h.\nu}{c}}{m_A'.c} ; \end{cases} \\
\frac{dv_A}{c} = th \frac{dw_A}{c} &= \frac{sh \frac{dw_A}{c}}{ch \frac{dw_A}{c}} = -\frac{\frac{h.\nu}{c}}{m_A.c - \frac{h.\nu}{c}} ; \\
\frac{dv_A}{c} &= -\frac{h.\nu}{m_A.c^2 - h.\nu}.
\end{aligned}$$

Cette variation de la vitesse de A est négative ; c'est l'effet de recul.

Cette variation de vitesse dv_A est la vitesse relative entre le repère inertiel de A avant l'émission du photon et le repère inertiel de A après l'émission. Elle est parfaitement calculable, et a une signification physique objective, comme la variation de masse au repos de la particule. Ceci montre bien que la relativité restreinte attribue un statut particulier aux repères inertiels. On n'aurait pas pu faire le calcul dans un repère accéléré (un repère attaché à la particule A et suivant son mouvement, y compris ses accélérations). La transformation de Lorentz ne s'applique qu'aux repères inertiels. Au moment de l'émission du photon, la particule saute d'un repère inertiel à un autre.

Passons au point B . Notons dw_B la variation de la rapidité de B au moment de la réception du photon (variation évaluée dans le repère initial de B). Nous notons m_B' la masse au repos de B après la réception. On va avoir :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} m_B.c + \frac{h.\nu'}{c} \\ 0 + \frac{h.\nu'}{c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ch \frac{dw_B}{c} & sh \frac{dw_B}{c} \\ sh \frac{dw_B}{c} & ch \frac{dw_B}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_B'.c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_B'.c.ch \frac{dw_B}{c} \\ m_B'.c.sh \frac{dw_B}{c} \end{pmatrix} ; \\
\begin{cases} m_B.c + \frac{h.\nu'}{c} = m_B'.c.ch \frac{dw_B}{c} ; \\ \frac{h.\nu'}{c} = m_B'.c.sh \frac{dw_B}{c} ; \end{cases} \\
\left(m_B'.c.ch \frac{dw_B}{c} \right)^2 - \left(m_B'.c.sh \frac{dw_B}{c} \right)^2 &= \left(m_B.c + \frac{h.\nu'}{c} \right)^2 - \left(\frac{h.\nu'}{c} \right)^2 ; \\
m_B'^2.c^2 \cdot \left(ch^2 \frac{dw_B}{c} - sh^2 \frac{dw_B}{c} \right) &= m_B^2.c^2 + 2.m_B.h.\nu' + \frac{h^2.\nu'^2}{c^2} - \frac{h^2.\nu'^2}{c^2} ;
\end{aligned}$$

$$m_B'^2 = m_B^2 + \frac{2.m_B.h.\nu'}{c^2}.$$

On a donc $m_B'^2 > m_B^2$, donc $m'_B > m_B$: la masse au repos de B a augmenté. La particule réceptrice (celle qui reçoit le photon) gagne de l'énergie, donc de la masse au repos.

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{m_B'^2}{m_B^2} &= 1 + \frac{2.h.\nu'}{m_B.c^2} ; \\ \frac{m'_B}{m_B} &= \sqrt{1 + \frac{2.h.\nu'}{m_B.c^2}}. \\ \left\{ \begin{array}{l} ch \frac{dw_B}{c} = \frac{m_B.c + \frac{h.\nu'}{c}}{m'_B.c} ; \\ sh \frac{dw_B}{c} = \frac{\frac{h.\nu'}{c}}{m'_B.c} ; \end{array} \right. \\ \frac{dv_B}{c} = th \frac{dw_B}{c} &= \frac{sh \frac{dw_B}{c}}{ch \frac{dw_B}{c}} = \frac{\frac{h.\nu'}{c}}{m_B.c + \frac{h.\nu'}{c}} ; \\ \frac{dv_B}{c} &= \frac{h.\nu'}{m_B.c^2 + h.\nu'}. \end{aligned}$$

La vitesse de B a augmenté à la réception du photon sous l'effet de la "pression de la lumière".

A priori, la vitesse gagnée par B n'équivaut pas à la vitesse perdue par A , et la masse au repos gagnée par B n'équivaut pas à la masse au repos perdue par A . Mais alors qu'est-ce qui se conserve ?

Nous avons vu que la "masse au repos du système" (autrement dit la masse totale évaluée dans le repère du centre de gravité), ou l'énergie totale du système, ou encore la pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion total, se conserve par changement de repère. Nous l'avions calculée :

$$m.c^2 = m_A^2.c^2 + 2.m_A.m_B.c^2.ch \frac{w}{c} + m_B^2.c^2.$$

Cette quantité se conserve-t-elle lors de l'échange de photon ? Pour le vérifier, calculons :

$$m'.c^2 = m_A'^2.c^2 + 2.m'_A.m'_B.c^2.ch \frac{w'}{c} + m_B'^2.c^2.$$

On note m' la masse au repos du système après l'échange du photon, m'_A et m'_B les masses au repos des deux particules, et w' leur rapidité relative (après l'échange).

On a : $w' = w - dw_A + dw_B = w + |dw_A| + dw_B$. Calculons $ch \frac{dw_B - dw_A}{c}$ et $sh \frac{dw_B - dw_A}{c}$, puis $ch \frac{w'}{c}$:

$$\begin{aligned} ch \frac{dw_B - dw_A}{c} &= ch \frac{|dw_A|}{c} \cdot ch \frac{dw_B}{c} + sh \frac{|dw_A|}{c} \cdot sh \frac{dw_B}{c} ; \\ ch \frac{dw_B - dw_A}{c} &= \frac{(m_A \cdot c - \frac{h \cdot \nu}{c}) \cdot (m_B \cdot c + \frac{h \cdot \nu'}{c}) + \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot \frac{h \cdot \nu'}{c}}{m'_A \cdot m'_B \cdot c^2} ; \\ ch \frac{dw_B - dw_A}{c} &= \frac{m_A \cdot m_B \cdot c^2 + m_A \cdot h \cdot \nu' - m_B \cdot h \cdot \nu}{m'_A \cdot m'_B \cdot c^2} ; \\ sh \frac{dw_B - dw_A}{c} &= ch \frac{|dw_A|}{c} \cdot sh \frac{dw_B}{c} + sh \frac{|dw_A|}{c} \cdot ch \frac{dw_B}{c} ; \\ sh \frac{dw_B - dw_A}{c} &= \frac{(m_A \cdot c - \frac{h \cdot \nu}{c}) \cdot \frac{h \cdot \nu'}{c} + (m_B \cdot c + \frac{h \cdot \nu'}{c}) \cdot \frac{h \cdot \nu}{c}}{m'_A \cdot m'_B \cdot c^2} ; \\ sh \frac{dw_B - dw_A}{c} &= \frac{m_A \cdot h \cdot \nu' + m_B \cdot h \cdot \nu}{m'_A \cdot m'_B \cdot c^2} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ch \frac{w'}{c} &= ch \frac{w - dw_A + dw_B}{c} = ch \frac{w}{c} \cdot ch \frac{|dw_A| + dw_B}{c} + sh \frac{w}{c} \cdot sh \frac{|dw_A| + dw_B}{c} ; \\ ch \frac{w'}{c} &= ch \frac{w}{c} \cdot \frac{m_A \cdot m_B \cdot c^2 + m_A \cdot h \cdot \nu' - m_B \cdot h \cdot \nu}{m'_A \cdot m'_B \cdot c^2} + sh \frac{w}{c} \cdot \frac{m_A \cdot h \cdot \nu' + m_B \cdot h \cdot \nu}{m'_A \cdot m'_B \cdot c^2} ; \\ ch \frac{w'}{c} &= \frac{ch \frac{w}{c} \cdot (m_A \cdot m_B \cdot c^2 + m_A \cdot h \cdot \nu' - m_B \cdot h \cdot \nu) + sh \frac{w}{c} \cdot (m_A \cdot h \cdot \nu' + m_B \cdot h \cdot \nu)}{m'_A \cdot m'_B \cdot c^2} ; \\ ch \frac{w'}{c} &= \frac{m_A \cdot m_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c} + m_A \cdot h \cdot \nu' \cdot (ch \frac{w}{c} + sh \frac{w}{c}) - m_B \cdot h \cdot \nu \cdot (ch \frac{w}{c} - sh \frac{w}{c})}{m'_A \cdot m'_B \cdot c^2} . \end{aligned}$$

Sachant que $\nu' = \nu \cdot e^{-\frac{w}{c}}$, que $ch \frac{w}{c} + sh \frac{w}{c} = e^{\frac{w}{c}}$ et que $ch \frac{w}{c} - sh \frac{w}{c} = e^{-\frac{w}{c}}$, on obtient :

$$ch \frac{w'}{c} = \frac{m_A \cdot m_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c} + m_A \cdot h \cdot \nu - m_B \cdot h \cdot \nu \cdot e^{-\frac{w}{c}}}{m'_A \cdot m'_B \cdot c^2} .$$

Calculons maintenant $m' \cdot c^2$:

$$\begin{aligned} m' \cdot c^2 &= m_A'^2 \cdot c^2 + 2 \cdot m'_A \cdot m'_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w'}{c} + m_B'^2 \cdot c^2 ; \\ m' \cdot c^2 &= m_A'^2 \cdot c^2 + 2 \cdot \left(m_A \cdot m_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c} + m_A \cdot h \cdot \nu - m_B \cdot h \cdot \nu \cdot e^{-\frac{w}{c}} \right) + m_B'^2 \cdot c^2 . \\ m' \cdot c^2 &= m_A'^2 \cdot c^2 + 2 \cdot m_A \cdot m_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c} + 2 \cdot m_A \cdot h \cdot \nu - 2 \cdot m_B \cdot h \cdot \nu \cdot e^{-\frac{w}{c}} + m_B'^2 \cdot c^2 . \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on a :

$$m_A'^2 \cdot c^2 + 2 \cdot m_A \cdot h \cdot \nu = m_A^2, \text{ et :}$$

$$m_B'^2 \cdot c^2 - 2 \cdot m_B \cdot h \cdot \nu' = m_B'^2 \cdot c^2 - 2 \cdot m_B \cdot h \cdot \nu \cdot e^{-\frac{w}{c}} = m_B^2.$$

En faisant les substitutions dans l'égalité précédente, on obtient :

$$m' \cdot c^2 = m_A^2 \cdot c^2 + 2 \cdot m_A \cdot m_B \cdot c^2 \cdot ch \frac{w}{c} + m_B^2 \cdot c^2 = m \cdot c^2.$$

Ceci prouve que $m' = m$: la masse au repos totale n'a pas changé. C'est la version relativiste de la conservation de l'énergie.

On aurait pu abréger beaucoup ce calcul en utilisant les propriétés du quadrivecteur énergie-impulsion ; dans ce cas, il s'agit du quadrivecteur énergie-impulsion total du système, qui s'écrit :

- dans le repère de A , aussi bien après l'émission du photon qu'avant :

$$\begin{pmatrix} m_A \cdot c + m_B \cdot c \cdot ch \frac{w}{c} \\ m_B \cdot c \cdot sh \frac{w}{c} \end{pmatrix} ;$$

- dans le repère de B , aussi bien après la réception du photon qu'avant :

$$\begin{pmatrix} m_A \cdot c \cdot ch \frac{w}{c} + m_B \cdot c \\ -m_A \cdot c \cdot sh \frac{w}{c} \end{pmatrix}.$$

On peut dire qu'il s'agit du même quadrivecteur, exprimé dans deux repères différents. On passe d'une écriture à l'autre par la transformation de Lorentz, et on sait que la pseudo-norme se conserve.

Si nous avons choisi un calcul plus long, c'est pour montrer comment se modifient les masses au repos des deux particules, et leur rapidité relative.

Revenons sur les variations de rapidité de A et de B . Repartons des égalités démontrées plus haut :

$$\begin{cases} m_A \cdot c - \frac{h \cdot \nu}{c} = m_A' \cdot c \cdot ch \frac{dw_A}{c} ; \\ -\frac{h \cdot \nu}{c} = m_A' \cdot c \cdot sh \frac{dw_A}{c} ; \end{cases} \quad \begin{cases} ch \frac{dw_A}{c} = \frac{m_A \cdot c - \frac{h \cdot \nu}{c}}{m_A' \cdot c} ; \\ sh \frac{dw_A}{c} = -\frac{\frac{h \cdot \nu}{c}}{m_A' \cdot c} ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{dw_A}{c}} = ch \frac{dw_A}{c} + sh \frac{dw_A}{c} = \frac{m_A \cdot c - 2 \cdot \frac{h \cdot \nu}{c}}{m_A' \cdot c} = \frac{m_A - 2 \cdot \frac{h \cdot \nu}{c^2}}{m_A'} ; \\ e^{-\frac{dw_A}{c}} = ch \frac{dw_A}{c} - sh \frac{dw_A}{c} = \frac{m_A \cdot c}{m_A' \cdot c} = \frac{m_A}{m_A'} . \end{cases}$$

Remarquons au passage que :

$$e^{\frac{dw_A}{c}} \cdot e^{-\frac{dw_A}{c}} = \frac{m_A - 2 \cdot \frac{h \cdot \nu}{c^2}}{m'_A} \cdot \frac{m_A}{m'_A} = 1 ;$$

$$m_A'^2 = m_A \cdot \left(m_A - 2 \cdot \frac{h \cdot \nu}{c^2} \right).$$

Ce que nous savions déjà.

De même pour B :

$$\begin{cases} m_B \cdot c + \frac{h \cdot \nu'}{c} = m'_B \cdot c \cdot ch \frac{dw_B}{c} ; \\ \frac{h \cdot \nu'}{c} = m'_B \cdot c \cdot sh \frac{dw_B}{c} ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ch \frac{dw_B}{c} = \frac{m_B \cdot c + \frac{h \cdot \nu'}{c}}{m'_B \cdot c} ; \\ sh \frac{dw_B}{c} = \frac{\frac{h \cdot \nu'}{c}}{m'_B \cdot c} ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{dw_B}{c}} = ch \frac{dw_B}{c} + sh \frac{dw_B}{c} = \frac{m_B \cdot c + 2 \cdot \frac{h \cdot \nu'}{c}}{m'_B \cdot c} = \frac{m_B + 2 \cdot \frac{h \cdot \nu'}{c^2}}{m'_B} ; \\ e^{-\frac{dw_B}{c}} = ch \frac{dw_B}{c} - sh \frac{dw_B}{c} = \frac{m_B \cdot c}{m'_B \cdot c} = \frac{m_B}{m'_B}. \end{cases}$$

Remarquons au passage que :

$$e^{\frac{dw_B}{c}} \cdot e^{-\frac{dw_B}{c}} = \frac{m_B + 2 \cdot \frac{h \cdot \nu'}{c^2}}{m'_B} \cdot \frac{m_B}{m'_B} = 1 ;$$

$$m_B'^2 = m_B \cdot \left(m_B + 2 \cdot \frac{h \cdot \nu'}{c^2} \right).$$

Ce que nous savions déjà.

La variation de la rapidité relative $w = w_B - w_A$ peut se calculer de plusieurs façons, la plus simple étant celle-ci :

$$e^{\frac{dw}{c}} = e^{\frac{dw_B - dw_A}{c}} = \frac{e^{\frac{dw_B}{c}}}{e^{\frac{dw_A}{c}}} = \frac{m'_B}{m_B} \cdot \frac{m_A}{m'_A}.$$

Nous avons vu que $m'_B > m_B$ et $m'_A < m_A$, donc $\frac{m'_B}{m_B} \cdot \frac{m_A}{m'_A} > 1$, donc $dw > 0$.

Ceci prouve que l'échange d'un photon entre la particule A (émettrice) et la particule B (réceptrice) entraîne une augmentation de leur rapidité relative.

Supposons maintenant que la particule B renvoie le photon à la particule A : il ne faudrait pas croire que leur rapidité relative va retrouver sa valeur initiale ; en effet, elle va encore augmenter !

Et si nous passions le film à l'envers ? Dans le film passé à l'endroit, la rapidité relative initiale est w_i , la rapidité relative finale est w_f , et la variation de cette rapidité relative est $dw = w_f - w_i > 0$. Dans le film passé à l'envers, la rapidité relative initiale est $-w_f$, la rapidité relative finale est $-w_i$, et la variation de cette rapidité relative est $(-w_i) - (-w_f) = w_f - w_i = dw > 0$. Elle n'a pas changé, et elle est toujours positive !

On peut le voir clairement en utilisant la formule : $e^{\frac{dw}{c}} = \frac{m'_B}{m_B} \cdot \frac{m_A}{m'_A}$.

Pour raisonner sur le film passé à l'envers, il faut remplacer m_A par m'_A et m_B par m'_B (et réciproquement), car les masses avant interaction deviennent des masses après interaction (et réciproquement), mais il faut aussi remplacer A par B et B par A , car l'émetteur devient récepteur et le récepteur devient émetteur. Après avoir fait ces manipulations, on constate que $e^{\frac{dw}{c}}$ n'a pas changé, donc que dw n'a pas changé.

Nous voyons donc que la symétrie T n'est pas violée : un spectateur voyant les deux films ne peut pas savoir lequel est le bon.

Mais alors, pourquoi la rapidité relative ne peut-elle pas décroître ?

Nous avons dit que $m'_A < m_A$ (l'émetteur perd de l'énergie quand il émet le photon) et que $m'_B > m_B$ (le récepteur gagne de l'énergie quand il reçoit le photon), et nous en avons déduit que $\frac{m'_B}{m_B} \cdot \frac{m_A}{m'_A} > 1$, donc que $dw > 0$. Mais ceci est vrai à condition que l'énergie du photon soit positive. **Si la rapidité relative de A et B ne peut pas décroître, c'est parce-que les photons à énergie négative n'existent pas**, ce qui entraîne une rupture de symétrie. Ce n'est pas à cause de la relativité restreinte.

19 Masse au repos et masse maupertuisienne

Considérons deux corps galiléens de masses au repos m_1 et m_2 , et de rapidités $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ colinéaires. (On peut toujours se ramener à ce cas particulier par un changement de repère : si les rapidités $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont représentées par deux points A_1 et A_2 dans le diagramme des rapidités, alors il suffit que le repère de référence soit représenté par un point quelconque de la droite $(A_1 A_2)$; ceci nous autorise à remplacer les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ par les nombres réels w_1 et w_2).

Les énergies des deux corps sont : $E_1 = m_1 c^2 \operatorname{ch} \left(\frac{w_1}{c} \right)$ et $E_2 = m_2 c^2 \operatorname{ch} \left(\frac{w_2}{c} \right)$; leurs impulsions sont : $p_1 = m_1 c \operatorname{sh} \left(\frac{w_1}{c} \right)$ et $p_2 = m_2 c \operatorname{sh} \left(\frac{w_2}{c} \right)$.

Considérons maintenant le système composé des deux éléments précédents. Soit E son énergie et p son impulsion. En relativité restreinte, comme en mécanique classique, les énergies et les impulsions s'additionnent :
 $E = E_1 + E_2$, $p = p_1 + p_2$.

Notons m la masse au repos du système, et w sa rapidité. (Attention : dire qu'un corps composé est au repos ne signifie pas que ses parties soient au repos : par exemple, dans un atome au repos, les électrons sont en mouvement.) Nous voulons calculer m (et, accessoirement, w).

$$E = m c^2 \operatorname{ch}\left(\frac{w}{c}\right) = E_1 + E_2 = m_1 c^2 \operatorname{ch}\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2 c^2 \operatorname{ch}\left(\frac{w_2}{c}\right), \text{ donc :}$$

$$m \operatorname{ch}\left(\frac{w}{c}\right) = m_1 \operatorname{ch}\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2 \operatorname{ch}\left(\frac{w_2}{c}\right);$$

$$p = m c \operatorname{sh}\left(\frac{w}{c}\right) = p_1 + p_2 = m_1 c \operatorname{sh}\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2 c \operatorname{sh}\left(\frac{w_2}{c}\right), \text{ donc :}$$

$$m \operatorname{sh}\left(\frac{w}{c}\right) = m_1 \operatorname{sh}\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2 \operatorname{sh}\left(\frac{w_2}{c}\right).$$

$$\begin{cases} m \operatorname{ch}\left(\frac{w}{c}\right) = m_1 \operatorname{ch}\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2 \operatorname{ch}\left(\frac{w_2}{c}\right) \\ m \operatorname{sh}\left(\frac{w}{c}\right) = m_1 \operatorname{sh}\left(\frac{w_1}{c}\right) + m_2 \operatorname{sh}\left(\frac{w_2}{c}\right) \end{cases}$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, puis en les retranchant membre à membre (et en utilisant les formules : $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$), nous obtenons :

$$\begin{cases} m e^{\frac{w}{c}} = m_1 e^{\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{\frac{w_2}{c}} ; \\ m e^{-\frac{w}{c}} = m_1 e^{-\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{-\frac{w_2}{c}} . \end{cases}$$

Pour calculer w , nous divisons ces égalités membre à membre, et nous obtenons :

$$e^{\frac{2w}{c}} = \frac{m_1 e^{\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{\frac{w_2}{c}}}{m_1 e^{-\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{-\frac{w_2}{c}}}.$$

Pour calculer m , nous les multiplions membre à membre. Il vient :

$$m^2 = m_1^2 + m_1 m_2 e^{\frac{w_1 - w_2}{c}} + m_1 m_2 e^{\frac{w_2 - w_1}{c}} + m_2^2 = m_1^2 + 2 m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{w_1 - w_2}{c} + m_2^2 ;$$

$$m = \sqrt{m_1^2 + 2 m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{\Delta w}{c} + m_2^2}.$$

Cette masse m , comme m_1 et m_2 , est nécessairement invariante, c'est-à-dire indépendante de la vitesse de l'observateur.

Cette formule signifie que la masse au repos m du système n'est égale à la somme des masses au repos de ses deux constituants que dans le cas particulier où la rapidité relative des deux corps (Δw) est nulle; dans le cas contraire, la masse du corps composé est supérieure à la somme des masses de ses constituants.

Il est donc impossible de considérer la masse au repos comme une mesure de la "quantité de matière", comme on pourrait être tenté de le faire; ce n'est pas non plus une propriété intrinsèque des particules, comme la charge électrique : si un système est formé de deux particules de charges q_1 et q_2 , alors la charge du système est $q_1 + q_2$; ceci ne marche pas avec les masses au repos !

Poussons le raisonnement à l'extrême : imaginons un système formé de deux photons (ou d'autres particules de masse au repos nulle) tournant autour de leur centre de gravité commun immobile (en supposant que ce soit possible). Ces deux photons ont la même énergie : $E_1 = E_2 = h \nu$, et leurs impulsions (de module $p_1 = p_2 = \frac{h \nu}{c}$) sont opposées. Il va de soi que chaque photon en mouvement a une masse non nulle (c'est : $\frac{E_1}{c^2} = \frac{h \nu}{c^2}$); mais leur "masse au repos" est nulle : $m_1 c^2 = \sqrt{E_1^2 - c^2 p_1^2} = \sqrt{h^2 \nu^2 - h^2 \nu^2} = 0$. Ceci est d'ailleurs purement théorique, puisqu'un photon au repos n'existe pas !

Quant au système formé par les deux photons, il a une masse au repos m non nulle. En effet :

- l'énergie du système est : $E = E_1 + E_2 = 2h \nu$;
- son impulsion est : $p = 0$;
- sa masse au repos est : $m = \frac{E}{c^2} = \frac{2h \nu}{c^2}$.

Nous ne chercherons pas à savoir quel type de force peut lier ainsi les deux particules; retenons seulement qu'un assemblage de particules de masses au repos nulles peut avoir une masse au repos non nulle. On est en droit de se demander si les particules de masse non nulle ne sont pas toutes des assemblages de particules de masse nulle... mais je n'aurai pas l'imprudence de répondre à cette question : mon but est seulement de montrer qu'en relativité restreinte, la notion de masse au repos n'a rien à voir avec la masse au sens de Newton...

Dans la réalité, il faut tenir compte aussi des forces de liaison (que nous n'avons pas envisagées ici), et donc de l'énergie potentielle négative qui entre en jeu dans la masse des assemblages de particules; par exemple, un assemblage de deux protons a une masse au repos inférieure au double de celle du proton. Ceci ne contredit pas les remarques précédentes.

Revenons à w ; on peut écrire :

$$\begin{aligned}
e^{\frac{w}{c}} &= \frac{m_1 e^{\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{\frac{w_2}{c}}}{m} = \frac{m_1 e^{\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{\frac{w_2}{c}}}{\sqrt{m_1^2 + 2 m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{\Delta w}{c} + m_2^2}} ; \\
e^{\frac{w}{c}} &= \frac{m}{m_1 e^{-\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{-\frac{w_2}{c}}} = \frac{\sqrt{m_1^2 + 2 m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{\Delta w}{c} + m_2^2}}{m_1 e^{-\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{-\frac{w_2}{c}}} ; \\
e^{2\frac{w}{c}} &= \frac{m_1 e^{\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{\frac{w_2}{c}}}{m_1 e^{-\frac{w_1}{c}} + m_2 e^{-\frac{w_2}{c}}} .
\end{aligned}$$

Calculons encore la vitesse globale v du système :

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} \left(\frac{w}{c} \right) = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{w}{c} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{w}{c} \right)} = \frac{m_1 \operatorname{sh} \left(\frac{w_1}{c} \right) + m_2 \operatorname{sh} \left(\frac{w_2}{c} \right)}{m_1 \operatorname{ch} \left(\frac{w_1}{c} \right) + m_2 \operatorname{ch} \left(\frac{w_2}{c} \right)} .$$

Posons : $M_1 = m_1 \operatorname{ch} \left(\frac{w_1}{c} \right)$ et $M_2 = m_2 \operatorname{ch} \left(\frac{w_2}{c} \right)$ (masses maupertusiennes) ;

$m_1 \operatorname{sh} \left(\frac{w_1}{c} \right) = \frac{v_1}{c} M_1$; $m_2 \operatorname{sh} \left(\frac{w_2}{c} \right) = \frac{v_2}{c} M_2$; par conséquent : $\frac{v}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} M_1 + \frac{v_2}{c} M_2}{M_1 + M_2}$.

$$(M_1 + M_2) v = M_1 v_1 + M_2 v_2 .$$

La formule obtenue est analogue à celle de la mécanique classique, mais les masses usuelles ont été remplacées par les masses maupertusiennes, variables selon la vitesse. C'est cette formule qu'il faudra utiliser pour étudier les chocs élastiques par exemple. Ceci prouve que la masse qui est mise en évidence dans les expériences sur les chocs de mobiles (la masse inerte) est en fait une masse maupertusienne, et non une masse au repos. Mais est-ce la même masse qui est mise en évidence par la pesée ? Si oui, la masse pesante, comme la masse inerte, correspond, elle aussi, à la masse maupertusienne. C'est ce que confirment les mesures les plus précises.

De ces quelques remarques, il ressort qu'en relativité restreinte, c'est la masse maupertusienne, et non la masse au repos, qui va jouer le rôle de la masse au sens de Newton. La différence essentielle, c'est que la masse au sens de Newton est constante et absolue, tandis que la masse maupertusienne est relative : elle dépend de l'état de mouvement du mobile par rapport à l'observateur. Elle équivaut à une énergie (au coefficient c^2 près), puisque $E = m_0 c^2 \operatorname{ch} \left(\frac{w}{c} \right) = m c^2$.

Dans un choc de particules, comme dans une désintégration, c'est la masse maupertusienne qui se conserve, et non la masse au repos. Citons un exemple célèbre : quand un photon se désintègre en une paire électron-positron, un excédent de masse au repos ($2 m_e$) apparaît, mais l'énergie totale (donc la masse maupertusienne) est conservée.

20 De l'espace des rapidités à l'espace des impulsions

Nous avons vu que dans l'espace des rapidités le périmètre d'un cercle de rayon r (où r est une rapidité) n'est pas égal à $2.\pi.r$, mais à $2.\pi.sh(r)$. Le fait que le périmètre du cercle soit supérieur à $2.\pi.r$ est l'une des caractéristiques des espaces hyperboliques. Mais dans le cas présent nous voyons qu'il existe une manipulation simple (un changement de variable) qui permet de revenir à un espace euclidien : il suffit de multiplier les distances radiales par $\frac{sh(r)}{r}$, sans modifier les distances transverses (perpendiculaires au rayon vecteur).

Soyons plus précis. Choisissons un point O arbitraire de l'espace des rapidités. Ce n'est pas un point au sens spatial du terme, puisqu'il représente en réalité une rapidité, qui sera considérée comme la "rapidité nulle" (c'est-à-dire l'immobilité), à partir de laquelle seront évaluées toutes les autres rapidités. On pourrait dire que c'est la rapidité d'un certain mobile galiléen, et que les rapidités de tous les autres mobiles seront mesurées par rapport à lui. Nous disons "mobile galiléen" parce-que la relativité restreinte ne connaît pas les mobiles accélérés : ses formules permettent seulement de passer d'un repère galiléen à un autre repère galiléen. Si on considère maintenant un autre point M de l'espace des rapidités, alors il représente une certaine rapidité, dont la direction est celle du segment $[OM]$ et dont le module est proportionnel à la longueur du segment $[OM]$. On écrira : $OM = r = \frac{w}{c}$. On voit donc que, par construction, toute rapidité relative à O est représentée radialement : la position du mobile dans l'espace est indifférente, seule est prise en compte sa vitesse. Pour éviter des confusions, on pourra imaginer que tous les mobiles considérés se trouvent en un même point O à l'instant considéré. Ceci nous aidera à retenir que dans un diagramme de rapidités toutes les rapidités (donc toutes les vitesses) sont nécessairement radiales (mais pas les accélérations).

L'idée est d'associer à M un autre point M' , situé dans la même direction, tel que $OM' = R = sh(r) = sh\frac{w}{c}$. On a donc : $\frac{OM'}{OM} = \frac{sh(r)}{r} = \frac{sh\frac{w}{c}}{\frac{w}{c}}$. Si on préfère : $OM' = sh(OM)$. Les distances radiales par rapport à O sont donc modifiées. Mais comme on ne modifie pas la longueur des cercles de centre O , on annule la courbure. On pourrait considérer qu'on effectue une projection sur un espace euclidien tangent en O à l'espace hyperbolique des rapidités. C'est cet espace euclidien que nous appelons : espace des rapidités rectifié. Alors que dans l'espace des rapidités hyperbolique un cercle de centre O et de rayon $r = \frac{w}{c}$ avait pour périmètre $2.\pi.sh(r) = 2.\pi.sh\frac{w}{c}$, dans l'espace rectifié, le cercle correspondant aura pour rayon $R = sh(r) = sh\frac{w}{c}$ et pour périmètre $2.\pi.R = 2.\pi.sh\frac{w}{c}$. Les deux cercles n'ont pas le même rayon, mais ils ont le même périmètre. L'un se situe dans un espace hyperbolique, l'autre dans un espace euclidien.

Dans la direction radiale, nous avons remplacé $\frac{w}{c}$ par $sh\frac{w}{c}$, donc $d\frac{w}{c}$ par $d(sh\frac{w}{c}) = ch\frac{w}{c}.d\frac{w}{c}$.

On peut donc en conclure que, pour rectifier l'espace des rapidités (c'est-à-dire le transformer en un espace euclidien), il suffit de multiplier toutes les rapidités radiales élémentaires, et elles seules, par $ch \frac{w}{c}$.

Si $OM = \frac{w}{c}$, la variation élémentaire de rapidité $d\frac{w}{c}$ est dite radiale si $d\vec{w}$ est de même direction que $\vec{w}$, ou que $O\vec{M}$.

Une autre approche consiste à examiner comment une variation infinitésimale dw modifie une vitesse.

Dans le paragraphe sur la composition des vitesses non colinéaires, nous avons précisé la procédure pour composer une vitesse $\vec{v}_1$ avec une vitesse $\vec{v}_2$, de la façon suivante :

On décompose le vecteur $\vec{v}_2$ en deux composantes, l'une parallèle à $\vec{v}_1$, l'autre perpendiculaire à $\vec{v}_1$. La première composante a pour mesure $v_2 \cdot \cos \beta$, la seconde $v_2 \cdot \sin \beta$. On multiplie la seconde composante par $\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$. Appelons $\vec{v}'_2$ le vecteur ainsi obtenu. Sa composante parallèle à $\vec{v}_1$ est donc $v_2 \cdot \cos \beta$ (comme celle de $\vec{v}_2$), et sa composante perpendiculaire à $\vec{v}_1$ est $v_2 \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$. On a alors :

$$\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}'_2}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}'_2}{c^2}} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}'_2}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos \beta}{c^2}}.$$

Nous allons appliquer cette procédure pour composer une vitesse $\vec{v}$ avec une vitesse infinitésimale $d\vec{w}$, formant un angle a avec $\vec{v}$. On décompose $d\vec{w}$ en deux composantes, et on multiplie la seconde par $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

On obtient : $d\vec{w}_1 = d\vec{w} \cdot \cos a$ (composante parallèle à $\vec{v}$) et $d\vec{w}_2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot d\vec{w} \cdot \sin a$ (composante perpendiculaire à $\vec{v}$). L'égalité ci-dessus devient :

$$\vec{v} \oplus d\vec{w} = \frac{\vec{v} + d\vec{w}_1 + d\vec{w}_2}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{w}_1}{c^2}}.$$

Le vecteur vitesse ainsi obtenu possède une première composante parallèle à $\vec{v}$: c'est $(\vec{v} \oplus d\vec{w})_1 = \frac{\vec{v} + d\vec{w}_1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{w}_1}{c^2}}$, et une seconde composante perpendiculaire à $\vec{v}$: c'est $(\vec{v} \oplus d\vec{w})_2 = \frac{d\vec{w}_2}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{w}_1}{c^2}}$. Examinons ces deux composantes. Nous faisons un calcul au premier ordre en dw (on néglige $(dw)^2$).

$$(\vec{v} \oplus d\vec{w})_1 = \frac{\vec{v} + d\vec{w}_1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{w}_1}{c^2}} \approx (\vec{v} + d\vec{w} \cdot \cos a) \cdot \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot d\vec{w} \cos a}{c^2}\right) ;$$

$$(v \oplus w)_1 \approx (v + dw \cdot \cos a) \cdot \left(1 - \frac{v \cdot dw \cos a}{c^2}\right) \approx v + dw \cdot \cos a \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

La variation de la vitesse selon la direction parallèle à $\vec{v}$ (donc radiale) est donc :

$$(dv)_1 = dw \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \cos a = \frac{dw \cdot \cos a}{ch^2 \frac{w}{c}} = \frac{dw_1}{ch^2 \frac{w}{c}}.$$

Selon la direction perpendiculaire à $\vec{v}$, on a :

$$(dv)_2 = \frac{dw_2}{1 + \frac{v \cdot dw \cdot \cos a}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot dw \cdot \sin a}{1 + \frac{v \cdot dw \cdot \cos a}{c^2}} ;$$

$$(dv)_2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot dw \cdot \sin a = \frac{dw \cdot \sin a}{ch \frac{w}{c}} = \frac{dw_2}{ch \frac{w}{c}}.$$

On voit donc que le fait de composer une vitesse $\vec{v}$ avec une rapidité infinitésimale $d\vec{w}$ modifie ses deux composantes (parallèle et perpendiculaire à $\vec{v}$) de deux manières différentes, puisque dans la première formule c'est le coefficient $1 - \frac{v^2}{c^2}$ qui intervient, alors que dans la seconde c'est $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

On pourrait être tenté d'en conclure qu'une même accélération $\frac{d\vec{w}}{dt}$ ne modifie pas la vitesse $\vec{v}$ de la même façon, selon qu'elle s'applique parallèlement ou perpendiculairement à $\vec{v}$. Ce n'est pas faux, mais il faut garder en tête que ceci dépend du repère ; effectivement, la vitesse $\vec{v}$ d'un mobile dépend du repère auquel on la rapporte. On peut toujours choisir un repère dans lequel v s'annule ; on a alors $w = 0$, donc $ch^2 \frac{w}{c} = ch \frac{w}{c} = 1$, et dans ce cas les deux coefficients s'identifient.

Pour $a = 0$, donc $\cos a = 1$, la première formule donne : $dv = \frac{dw}{ch^2 \frac{w}{c}}$. On aurait pu obtenir ce résultat en partant de l'égalité $\frac{v}{c} = th \frac{w}{c} = \frac{sh \frac{w}{c}}{ch \frac{w}{c}}$:

$$d\left(\frac{v}{c}\right) = d\left(\frac{sh \frac{w}{c}}{ch \frac{w}{c}}\right) = \frac{ch^2 \frac{w}{c} \cdot d\frac{w}{c} - sh^2 \frac{w}{c} \cdot d\frac{w}{c}}{ch^2 \frac{w}{c}} = \frac{d\frac{w}{c}}{ch^2 \frac{w}{c}}.$$

La première formule (concernant les accélérations parallèles à la vitesse, donc radiales) était prévisible : on peut la retrouver de différentes façons. Mais pourquoi la seconde est-elle différente ? C'est à cause de la courbure de l'espace des rapidités. Pour mieux le comprendre, on peut se rappeler le passage de cet espace des rapidités hyperbolique à l'espace rectifié euclidien, par la "projection" qui a été décrite ci-dessus. Cette projection ne modifie pas de la même manière les rapidités élémentaires $d\vec{w}$, selon qu'elles sont parallèles ou perpendiculaires à $\vec{w}$.

Pour expliquer la seconde formule, on peut considérer qu'une accélération perpendiculaire à la vitesse a pour rôle de faire tourner le vecteur vitesse d'un angle $d\theta$ qui se calcule ainsi :

$$d\theta = \frac{(dv)_2}{v} = \frac{dw \cdot \sin a}{v \cdot ch \frac{w}{c}} = \frac{d\frac{w_2}{c}}{sh \frac{w}{c}}.$$

Dans cette formule, $(dv)_2$ est une vitesse élémentaire perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$, qui se compose avec elle. De même, dw_2 est la rapidité correspondante, perpendiculaire à $\vec{w}$, qui se compose avec elle. On peut remarquer que :

- d'une part : $d\theta = \frac{\frac{(dv)_2}{v}}{\frac{c}{v}}$ (dans l'espace des vitesses usuel) ;
- d'autre part : $d\theta = \frac{d\frac{w_2}{c}}{sh\frac{\vec{w}}{c}}$ (dans l'espace des rapidités rectifié).

La parenté entre ces deux formules est frappante.

Lorsqu'on passe de l'espace des vitesses usuel à l'espace des rapidités rectifié, la vitesse (calibrée) $\frac{\vec{v}}{c}$ est dépossédée de son rôle privilégié au profit de $sh\frac{\vec{w}}{c}$, et la variation infinitésimale de la vitesse $d\frac{\vec{v}}{c}$ cède la place à $d\frac{\vec{w}}{c}$.

Résumons notre démarche. Nous sommes partis de l'étude de la composition des vitesses dans un espace des vitesses euclidien. Nous avons constaté que cette étude n'était pas simple. Pour la simplifier, d'une certaine façon, nous sommes passés à l'espace des rapidités, dans lequel la composition des rapidités se fait de manière naturelle, ce qui est un bénéfice appréciable. Mais cet espace est hyperbolique, ce qui est une source de difficultés pour qui n'y est pas habitué. Nous avons ensuite cherché à revenir à un espace euclidien, sans perdre, si possible, le bénéfice apporté par les rapidités. Nous avons trouvé cette possibilité, mais le prix est de remplacer les vitesses $\frac{\vec{v}}{c}$ par $sh\frac{\vec{w}}{c}$: ce nouvel espace (l'espace des rapidités rectifié) est adapté pour l'étude des sinus hyperboliques des rapidités. Or il se trouve que ces sinus hyperboliques jouent un rôle fondamental en mécanique relativiste, puisque l'impulsion d'une particule de masse au repos m_0 est de rapidité $\vec{w}$ est : $\vec{p} = m_0.c.sh\frac{\vec{w}}{c}$. Finalement, au lieu de parler d'un "espace des rapidités rectifié", nous aurions pu dire "espace des impulsions".

Voyons maintenant quel est l'intérêt de raisonner dans l'espace des rapidités rectifié. La structure de cet espace n'est pas adaptée à l'étude de la vitesse $\vec{v}$, ni de la rapidité $\vec{w}$, mais à celle de l'impulsion réduite $sh\frac{\vec{w}}{c}$. Cet espace étant euclidien, le vecteur $sh\frac{\vec{w}}{c}$ peut être décomposé dans une base orthonormée $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, de la façon suivante :

$$\frac{\vec{p}}{c} = sh\frac{\vec{w}}{c} = sh\frac{\vec{w}_1}{c} + sh\frac{\vec{w}_2}{c} = sh\frac{w_1}{c}.\vec{u}_1 + sh\frac{w_2}{c}.\vec{u}_2,$$

où $\vec{p}$ est l'impulsion réduite (qui ne prend pas en compte la masse du mobile).

Attention : cette égalité ne signifie pas que $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, puisque l'addition vectorielle n'est pas définie dans l'espace hyperbolique des rapidités.

L'égalité ci-dessus peut être différenciée de la façon suivante :

$$d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) = d\left(sh\frac{w_1}{c}\right).\vec{u}_1 + d\left(sh\frac{w_2}{c}\right).\vec{u}_2 ;$$

$$\frac{d\vec{p}}{c} = d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) = ch\frac{w_1}{c}.d\frac{w_1}{c}.\vec{u}_1 + ch\frac{w_2}{c}.d\frac{w_2}{c}.\vec{u}_2.$$

Choisissons $\vec{u}_1$ parallèle à $\vec{v}$ et $\vec{u}_2$ perpendiculaire à $\vec{v}$. On a alors : $\vec{w}_1 = \vec{w}$ et $\vec{w}_2 = \vec{0}$, donc $ch\frac{w_1}{c} = ch\frac{w}{c}$ et $ch\frac{w_2}{c} = 0$, donc :

$$\frac{d\vec{p}}{c} = d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) = ch\frac{w}{c}.d\frac{w_1}{c}.\vec{u}_1 + d\frac{w_2}{c}.\vec{u}_2.$$

$$\frac{d\vec{p}}{c} = d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) = ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c} + d\frac{\vec{w}_2}{c} ;$$

$$d\vec{p} = c.d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) = ch\frac{w}{c}.d\vec{w}_1 + d\vec{w}_2 ;$$

Nous pouvons introduire ici la notion de **pseudo-accélération apparente** ou de **force réduite** :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = ch\frac{w}{c}.\frac{d\vec{w}_1}{dt} + \frac{d\vec{w}_2}{dt}.$$

Si on applique cette règle purement mathématique à une particule physique de masse m_0 , sachant que $m_0.d\vec{p} = d\vec{p}$ et que la définition de la force est $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, on peut écrire :

$$\vec{F} = m_0.ch\frac{w}{c}.\frac{d\vec{w}_1}{dt} + m_0.\frac{d\vec{w}_2}{dt}.$$

Cette formule est apparentée à la formule de Newton : $\vec{F} = m.\vec{\gamma}$; mais, d'une part, ce n'est pas l'accélération usuelle $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ qui intervient ici, mais la pseudo-accélération $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$; d'autre part, la symétrie entre l'accélération longitudinale et l'accélération transversale est rompue.

Notons $\vec{\Gamma}_1 = \frac{d\vec{w}_1}{dt}$ la pseudo-accélération longitudinale (selon la direction parallèle à la vitesse) et $\vec{\Gamma}_2 = \frac{d\vec{w}_2}{dt}$ la pseudo-accélération transversale (perpendiculaire à la vitesse).

Distinguons deux cas :

- si $d\vec{w}$ est "longitudinale" (ou "radiale", parallèle à $\vec{w}$), on a $d\vec{w}_2 = \vec{0}$ et $d\vec{w} = d\vec{w}_1$; la formule ci-dessus s'écrit :

$$\vec{F} = m_0.ch\frac{w}{c}.\frac{d\vec{w}_1}{dt} = m_0.ch\frac{w}{c}.\vec{\Gamma}_1.$$

Nous pouvons définir une **"masse inerte longitudinale"** : $m_l = m_0.ch\frac{w}{c}$.

On a alors :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 = m_l.\vec{\Gamma}_1.$$

Cette masse longitudinale varie avec la vitesse.

- si $d\vec{w}$ est "transversale" (perpendiculaire à $\vec{w}$), on a $d\vec{w}_1 = \vec{0}$ et $d\vec{w} = d\vec{w}_2$;
la formule ci-dessus s'écrit :

$$\vec{F} = m_0 \cdot \frac{d\vec{w}_2}{dt} = m_0 \cdot \vec{\Gamma}_2.$$

Nous pouvons définir une "masse inerte transversale" : $m_t = m_0$.

On a alors :

$$\vec{F} = \vec{F}_2 = m_t \cdot \vec{\Gamma}_2.$$

Cette masse transversale est constante.

Dans le premier cas, c'est le module de $\vec{p}$ qui est affecté, et non sa direction :

$$d\bar{p} = c \cdot d \left(sh \frac{w}{c} \right) = c \cdot ch \frac{w}{c} \cdot \frac{dw_1}{c} = ch \frac{w}{c} \cdot dw_1 ;$$

Dans le second cas, c'est la direction de $\vec{p}$ qui est affectée, et non son module :

$$d\theta = \frac{d \frac{w_2}{c}}{sh \frac{w}{c}} = \frac{dw_2}{c \cdot sh \frac{w}{c}} = \frac{dw_2}{\bar{p}} ;$$

$$d\bar{p} = \bar{p} \cdot d\theta = dw_2 \text{ (variation vectorielle de } \vec{p}, \text{ perpendiculairement à } \vec{p} \text{)}.$$

Nous voyons qu'une même force entraîne une variation de la rapidité $d\vec{w}$ différente selon qu'elle s'exerce parallèlement ou perpendiculairement au vecteur vitesse.

On peut retenir que le coefficient $ch \frac{w}{c}$ qui intervient dans la direction longitudinale (radiale), et non dans la direction transversale, vient du fait qu'on passe de l'espace hyperbolique des rapidités à l'espace euclidien des impulsions en multipliant dw_1 (c'est-à-dire les variations infinitésimales de rapidité radiales, et elles seules) par $ch \frac{w}{c}$.

Mais ce qu'il faut surtout retenir, c'est que la force définie de manière classique ($\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$) est directement reliée à la pseudo-accélération $\vec{\Gamma}_0 = \frac{d\vec{w}}{d\tau}$ et non à l'accélération $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. C'est un enseignement majeur de la relativité restreinte, trop souvent ignoré.

21 Forces

Reprenons la formule :

$$\begin{pmatrix} E' \\ cp'_x \\ cp'_y \\ cp'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} & 0 & 0 \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ cp_x \\ cp_y \\ cp_z \end{pmatrix}.$$

Il s'agit ici du quadrivecteur énergie-impulsion d'un mobile accéléré, observé par deux observateurs galiléens (non accélérés), O et O'; de plus, nous supposons que l'observateur O accompagne le mobile (la vitesse relative du mobile par rapport à O est nulle) à l'instant $t = 0$; bien entendu, comme le mobile est accéléré, tandis que O ne l'est pas, leurs vitesses ne coïncident que pendant une durée infinitésimale.

On peut considérer que w est constant (c'est la vitesse relative des deux observateurs), mais le quadrivecteur énergie-impulsion varie (puisque le mobile est accéléré).

Sous forme différentielle, l'égalité ci-dessus devient :

$$\begin{pmatrix} dE' \\ cdp'_x \\ cdp'_y \\ cdp'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dE \\ cdp_x \\ cdp_y \\ cdp_z \end{pmatrix}.$$

Nous allons diviser les deux membres de l'égalité par $d\tau$, intervalle infinitésimal de temps propre du mobile. Cet intervalle de temps propre, évalué par les horloges de O et O', donne : $dt = d\tau$ (pour l'observateur O) et $dt' = ch\frac{w}{c} d\tau$ (pour O'); donc $d\tau = dt = \frac{dt'}{ch\frac{w}{c}}$; nous pouvons donc diviser le membre de gauche de notre égalité par $\frac{dt'}{ch\frac{w}{c}}$, et le membre de droite par dt ; nous obtenons :

$$ch\frac{w}{c} \begin{pmatrix} \frac{dE'}{dt'} \\ c\frac{dp'_x}{dt'} \\ c\frac{dp'_y}{dt'} \\ c\frac{dp'_z}{dt'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dE}{dt} \\ c\frac{dp_x}{dt} \\ c\frac{dp_y}{dt} \\ c\frac{dp_z}{dt} \end{pmatrix}.$$

Du point de vue de nos deux observateurs, les composantes de la force qui agit sur le mobile sont :

$$\begin{aligned} \text{- pour O : } & \begin{cases} F_x = \frac{dp_x}{dt} ; \\ F_y = \frac{dp_y}{dt} ; \\ F_z = \frac{dp_z}{dt} . \end{cases} \\ \text{- pour O' : } & \begin{cases} F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} ; \\ F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} ; \\ F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} . \end{cases} \end{aligned}$$

Dans l'égalité précédente, explicitons la deuxième, la troisième et la quatrième lignes à l'aide de F et F' :

Deuxième ligne :

$c \, ch \frac{w}{c} F'_x = c \, ch \frac{w}{c} F_x - \frac{dE}{dt} sh \frac{w}{c} = c \, ch \frac{w}{c} F_x - \frac{F_x}{dt} sh \frac{w}{c} ;$
 comme $\frac{dx}{dt} = 0$ (puisque la vitesse du mobile est nulle dans le repère de O, à l'instant considéré), on voit que :
 $c \, ch \frac{w}{c} F'_x = c \, ch \frac{w}{c} F_x$, donc $F'_x = F_x$.

Troisième ligne :
 $c \, ch \frac{w}{c} F'_y = c \, F_y$, donc $F'_y = F_y \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Quatrième ligne :
 $c \, ch \frac{w}{c} F'_z = c \, F_z$, donc $F'_z = F_z \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_x = F_x ; \\ F'_y = F_y \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{F_y}{ch \frac{w}{c}} ; \\ F'_z = F_z \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{F_z}{ch \frac{w}{c}} . \end{array} \right.$$

Nous voyons donc qu'il y a une distorsion liée à la direction du vecteur vitesse : pour l'observateur O' , les composantes de la force perpendiculaires à son vecteur vitesse vont sembler réduites d'un facteur $ch \frac{w}{c}$.

On aurait pu faire une démonstration inspirée de ce que nous avons vu dans le paragraphe sur la rectification de l'espace des rapidités.

Nous avons vu qu'une variation de la rapidité $d\vec{w}$ entraîne une variation de l'impulsion ; mais cet effet est plus important dans la direction de $\vec{w}$ que dans les directions perpendiculaires ; le rapport entre ces deux effets étant justement $ch \frac{w}{c}$.

L'usage est de définir la force comme une variation de l'impulsion par unité de temps ; c'est cette définition que nous venons d'utiliser.

22 Fonctions hyperboliques vectorielles

Pour condenser les formules qui précèdent, et leur donner plus de force en les généralisant au cas où les vitesses ne sont pas colinéaires, il peut être intéressant de faire intervenir la rapidité sous forme vectorielle ($\vec{w}$) plutôt que réelle (w). Il faut alors définir les fonctions vectorielles $e^{\vec{x}}$, $ch \vec{x}$ et $sh \vec{x}$, de la façon suivante :

$$e^{\vec{x}} = 1 + \vec{x} + \frac{\vec{x}^2}{2!} + \frac{\vec{x}^3}{3!} + \frac{\vec{x}^4}{4!} + \frac{\vec{x}^5}{5!} + \frac{\vec{x}^6}{6!} + \dots$$

Les puissances de $\vec{x}$ d'exposant pair sont des réels, les puissances d'exposant impair sont des vecteurs parallèles à $\vec{x}$; en notant x le module de $\vec{x}$, on peut

écrire : $\vec{x}^{2n} = x^{2n}$ et $\vec{x}^{2n+1} = x^{2n} \cdot \vec{x} = x^{2n+1} \cdot \frac{\vec{x}}{x}$.

$$\begin{aligned} ch\vec{x} &= 1 + \frac{\vec{x}^2}{2!} + \frac{\vec{x}^4}{4!} + \frac{\vec{x}^6}{6!} + \frac{\vec{x}^8}{8!} + \dots = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \\ sh\vec{x} &= \vec{x} + \frac{\vec{x}^3}{3!} + \frac{\vec{x}^5}{5!} + \frac{\vec{x}^7}{7!} + \frac{\vec{x}^9}{9!} + \dots = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \right) \cdot \frac{\vec{x}}{x}. \end{aligned}$$

On voit donc que $e^{\vec{x}}$ comporte une partie réelle, égale à $ch\vec{x}$ (qu'on écrira plutôt $ch x$), et une partie vectorielle, égale à $sh\vec{x}$.

Si $\vec{x} = \frac{\vec{w}}{c}$, on obtient, pour une particule de masse au repos m_0 :

$$\begin{aligned} m_0 c^2 e^{\frac{\vec{w}}{c}} &= m_0 c^2 ch \frac{\vec{w}}{c} + m_0 c^2 sh \frac{\vec{w}}{c} = E + c\vec{p} ; \\ m_0 c^2 e^{-\frac{\vec{w}}{c}} &= m_0 c^2 ch \frac{\vec{w}}{c} - m_0 c^2 sh \frac{\vec{w}}{c} = E - c\vec{p} ; \\ E &= m_0 c^2 ch \frac{\vec{w}}{c} = m_0 c^2 \frac{e^{\frac{\vec{w}}{c}} + e^{-\frac{\vec{w}}{c}}}{2} \text{ (nombre réel) ;} \\ \vec{p} &= m_0 c sh \frac{\vec{w}}{c} = m_0 c \frac{e^{\frac{\vec{w}}{c}} - e^{-\frac{\vec{w}}{c}}}{2} \text{ (vecteur).} \end{aligned}$$

Rappelons-nous que, sous forme différentielle, on a :

$$\begin{aligned} d \left(ch \frac{\vec{w}}{c} \right) &= sh \frac{w}{c} \cdot d \frac{w_1}{c} = sh \frac{\vec{w}}{c} \cdot d \frac{\vec{w}_1}{c}, \text{ et :} \\ d \left(sh \frac{\vec{w}}{c} \right) &= ch \frac{w}{c} \cdot d \frac{\vec{w}_1}{c} + d \frac{\vec{w}_2}{c}, \end{aligned}$$

où dw_1 est la composante longitudinale de dw (parallèle à $\vec{w}$) et dw_2 sa composante transversale (perpendiculaire à $\vec{w}$).

Lorsqu'on étudie le choc de deux particules de masses au repos m_1 et m_2 , et de rapidités w_1 et w_2 , on peut exprimer la conservation de l'énergie-impulsion par deux équations vectorielles :

$$\begin{cases} m ch \left(\frac{\vec{w}}{c} \right) = m_1 ch \left(\frac{\vec{w}_1}{c} \right) + m_2 ch \left(\frac{\vec{w}_2}{c} \right) \\ m sh \left(\frac{\vec{w}}{c} \right) = m_1 sh \left(\frac{\vec{w}_1}{c} \right) + m_2 sh \left(\frac{\vec{w}_2}{c} \right) \end{cases}$$

qui peuvent se résumer par une équation unique :

$$m e^{\frac{\vec{w}}{c}} = m_1 e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} + m_2 e^{\frac{\vec{w}_2}{c}},$$

ou, si on préfère, par l'équation conjuguée :

$$m e^{-\frac{\vec{w}}{c}} = m_1 e^{-\frac{\vec{w}_1}{c}} + m_2 e^{-\frac{\vec{w}_2}{c}}.$$

Dans ces deux égalités, on peut considérer que le membre de gauche correspond au centre de gravité, supposé dépositaire de l'énergie totale, de l'impulsion totale et de la masse au repos résultante (m). La masse m est facile à calculer en faisant le produit membre à membre des deux égalités, comme lorsque w était réel :

$$m^2 = \left(m e^{\frac{\vec{w}}{c}} \right) \otimes \left(m e^{-\frac{\vec{w}}{c}} \right) = \left(m_1 e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} + m_2 e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} \right) \otimes \left(m_1 e^{-\frac{\vec{w}_1}{c}} + m_2 e^{-\frac{\vec{w}_2}{c}} \right) ;$$

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 ch \frac{\vec{w}_1 - \vec{w}_2}{c}.$$

L'opération désignée par le symbole $\otimes$ n'est pas un produit scalaire de quadrvecteurs, mais une multiplication formelle (qui peut être identifiée au produit de convolution des séries). Nous donnerons des précisions sur ce sujet un peu plus loin. L'usage des exponentielles de vecteurs pouvant dérouter, développons le calcul qui précède, pour faire apparaître clairement sa signification.

Sachant que $sh \frac{\vec{w}_i}{c} = ch \frac{w_i}{c} . th \frac{\vec{w}_i}{c} = ch \frac{w_i}{c} . \frac{\vec{v}_i}{c}$, nous pouvons écrire :

$$e^{\frac{\vec{w}_i}{c}} = ch \frac{w_i}{c} + sh \frac{\vec{w}_i}{c} = ch \frac{w_i}{c} + ch \frac{w_i}{c} . \frac{\vec{v}_i}{c} = ch \frac{w_i}{c} . \left(1 + \frac{\vec{v}_i}{c} \right) ;$$

$$e^{-\frac{\vec{w}_i}{c}} = ch \frac{w_i}{c} - sh \frac{\vec{w}_i}{c} = ch \frac{w_i}{c} - ch \frac{w_i}{c} . \frac{\vec{v}_i}{c} = ch \frac{w_i}{c} . \left(1 - \frac{\vec{v}_i}{c} \right).$$

Faisons la substitution dans le calcul de m :

$$\begin{aligned} m^2 &= \left(m_1 e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} + m_2 e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} \right) . \left(m_1 e^{-\frac{\vec{w}_1}{c}} + m_2 e^{-\frac{\vec{w}_2}{c}} \right) = ... \\ &= \left[m_1 . ch \frac{w_1}{c} . \left(1 + \frac{\vec{v}_1}{c} \right) + m_2 . ch \frac{w_2}{c} . \left(1 + \frac{\vec{v}_2}{c} \right) \right] . \left[m_1 . ch \frac{w_1}{c} . \left(1 - \frac{\vec{v}_1}{c} \right) + m_2 . ch \frac{w_2}{c} . \left(1 - \frac{\vec{v}_2}{c} \right) \right] \\ &= m_1^2 . ch^2 \frac{w_1}{c} . \left(1 + \frac{\vec{v}_1}{c} \right) . \left(1 - \frac{\vec{v}_1}{c} \right) + m_2^2 . ch^2 \frac{w_2}{c} . \left(1 + \frac{\vec{v}_2}{c} \right) . \left(1 - \frac{\vec{v}_2}{c} \right) ... \\ &... + m_1 . m_2 . ch \frac{w_1}{c} . ch \frac{w_2}{c} . \left[\left(1 + \frac{\vec{v}_1}{c} \right) . \left(1 - \frac{\vec{v}_2}{c} \right) + \left(1 + \frac{\vec{v}_2}{c} \right) . \left(1 - \frac{\vec{v}_1}{c} \right) \right] ; \\ m^2 &= m_1^2 . ch^2 \frac{w_1}{c} . \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) + m_2^2 . ch^2 \frac{w_2}{c} . \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2} \right) ... \\ &... + m_1 . m_2 . ch \frac{w_1}{c} . ch \frac{w_2}{c} . \left(1 - \frac{\vec{v}_2}{c} + \frac{\vec{v}_1}{c} - \frac{\vec{v}_1 . \vec{v}_2}{c^2} + 1 - \frac{\vec{v}_1}{c} + \frac{\vec{v}_2}{c} - \frac{\vec{v}_1 . \vec{v}_2}{c^2} \right) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c}.\left(1 - \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{c^2}\right) ; \\
m^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c}.\left(1 - \frac{v_1.v_2.cos\phi}{c^2}\right) ; \\
m^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c}.\left(1 - th\frac{w_1}{c}.th\frac{w_2}{c}.cos\phi\right) ; \\
m^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.\left(ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c} - sh\frac{w_1}{c}.sh\frac{w_2}{c}.cos\phi\right) .
\end{aligned}$$

Bien entendu, ϕ est l'angle formé par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Pour comprendre cette égalité, reportons-nous à la section sur la métrique hyperbolique de l'espace des rapidités. Nous avons écrit la loi des cosinus (ou théorème d'Al Kashi hyperbolique) de plusieurs manières, dont celle-ci :

$$\begin{aligned}
cos\alpha_3 &= \frac{ch(a_1) ch(a_2) - ch(a_3)}{sh(a_1) sh(a_2)} , \text{ qu'on peut écrire aussi :} \\
ch(a_3) &= ch(a_1).ch(a_2) - sh(a_1).sh(a_2).cos\alpha_3.
\end{aligned}$$

Nous avons noté a_1 et a_2 deux rapidités représentées par deux côtés d'un triangle dans l'espace hyperbolique des rapidités ; la rapidité composée :

$$a_3 = a_1 \oplus a_2$$

correspond au troisième côté du triangle. Autrement dit, avec nos notations actuelles :

$$ch\left(\frac{\vec{w}_1}{c} \oplus \frac{\vec{w}_2}{c}\right) = ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c} - sh\frac{w_1}{c}.sh\frac{w_2}{c}.cos\alpha_3.$$

Si nous remplaçons $\vec{w}_2$ par $-\vec{w}_2$, $sh\frac{w_2}{c}$ change de signe, ce qui donne :

$$ch\left(\frac{\vec{w}_1}{c} \ominus \frac{\vec{w}_2}{c}\right) = ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c} + sh\frac{w_1}{c}.sh\frac{w_2}{c}.cos\alpha_3.$$

Nous avons noté α_3 l'angle intérieur du triangle formé par ses deux premiers côtés ; mais dans les calculs qui précèdent ϕ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$, et il correspond donc à un angle extérieur du triangle (comme β dans la section sur la composition des vitesses non colinéaires), donc $cos\phi = -cos\alpha_3$. En définitive :

$$ch\left(\frac{\vec{w}_1}{c} \ominus \frac{\vec{w}_2}{c}\right) = ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c} - sh\frac{w_1}{c}.sh\frac{w_2}{c}.cos\phi.$$

Donc l'égalité :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.\left(ch\frac{w_1}{c}.ch\frac{w_2}{c} - sh\frac{w_1}{c}.sh\frac{w_2}{c}.cos\phi\right)$$

est rigoureusement équivalente à :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 ch \frac{\vec{w}_1 \ominus \vec{w}_2}{c}.$$

Nous savions déjà que cette dernière égalité était vraie lorsque $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont parallèles (ce qui est le cas lorsqu'on se place dans un repère lié au centre de gravité) ; nous venons de démontrer qu'elle est conservée dans tout changement de repère, quelle que soit la vitesse de l'observateur.

Si on pose $M = m ch \frac{\vec{w}}{c}$ (masse maupertuisienne) et $\frac{\vec{v}}{c} = th \frac{\vec{w}}{c} = \frac{sh \frac{\vec{w}}{c}}{ch \frac{\vec{w}}{c}}$, on a toujours, bien entendu :

$$\begin{cases} M = M_1 + M_2 ; \\ M \frac{\vec{v}}{c} = M_1 \frac{\vec{v}_1}{c} + M_2 \frac{\vec{v}_2}{c} . \end{cases}$$

C'est la traduction classique de l'égalité unique $m e^{\frac{\vec{w}}{c}} = m_1 e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} + m_2 e^{\frac{\vec{w}_2}{c}}$.

Reprenons encore la même thématique d'une manière légèrement différente, plus proche de la physique.

Sachant que $E = m.c^2.ch \frac{\vec{w}}{c}$ (resp. $E_1 = m_1.c^2.ch \frac{\vec{w}_1}{c}$ et $E_2 = m_2.c^2.ch \frac{\vec{w}_2}{c}$) et que $c.\vec{p} = m.c^2.sh \frac{\vec{w}}{c}$ (resp. $c.\vec{p}_1 = m_1.c^2.sh \frac{\vec{w}_1}{c}$ et $c.\vec{p}_2 = m_2.c^2.sh \frac{\vec{w}_2}{c}$), on peut écrire :

$$E^2 - c^2.\vec{p}^2 = m^2.c^4 \left(ch^2 \frac{\vec{w}}{c} - sh^2 \frac{\vec{w}}{c} \right) = m^2.c^4 ; \text{ donc :}$$

$$m^2.c^4 = E^2 - c^2.\vec{p}^2 \text{ (resp. } m_1^2.c^4 = E_1^2 - c^2.\vec{p}_1^2 \text{ et } m_2^2.c^4 = E_2^2 - c^2.\vec{p}_2^2).$$

Comme $E = E_1 + E_2$ et $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$:

$$\begin{aligned} m^2.c^4 &= E^2 - c^2.\vec{p}^2 = (E_1 + E_2)^2 - c^2.(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 ; \\ m^2.c^4 &= E_1^2 + 2.E_1.E_2 + E_2^2 - c^2.\vec{p}_1^2 - 2.c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2 - c^2.\vec{p}_2^2 ; \\ m^2.c^4 &= (E_1^2 - c^2.\vec{p}_1^2) + (E_2^2 - c^2.\vec{p}_2^2) + 2.(E_1.E_2 - c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2) ; \\ m^2.c^4 &= m_1^2.c^4 + m_2^2.c^4 + 2.(E_1.E_2 - c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2) ; \\ m^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2.\left(\frac{E_1}{c^2} \cdot \frac{E_2}{c^2} - \frac{\vec{p}_1}{c} \cdot \frac{\vec{p}_2}{c} \right) . \end{aligned}$$

Si nous remplaçons E_1 par $m_1.c^2.ch \frac{\vec{w}_1}{c}$, E_2 par $m_2.c^2.ch \frac{\vec{w}_2}{c}$, $\vec{p}_1$ par $m_1.c.sh \frac{\vec{w}_1}{c}$ et $\vec{p}_2$ par $m_2.c.sh \frac{\vec{w}_2}{c}$, nous obtenons :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.\left(ch \frac{\vec{w}_1}{c}.ch \frac{\vec{w}_2}{c} - sh \frac{\vec{w}_1}{c}.sh \frac{\vec{w}_2}{c} \right) .$$

Entre les parenthèses, nous reconnaissons une nouvelle fois l'expression déjà rencontrée (qui exprime la longueur du troisième côté d'un triangle hyperbolique, calculée selon le théorème d'Al Kashi) :

$$ch \frac{\vec{w}_1}{c} . ch \frac{\vec{w}_2}{c} - sh \frac{\vec{w}_1}{c} . sh \frac{\vec{w}_2}{c} = ch \frac{w_1}{c} . ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c} . sh \frac{w_2}{c} . \cos \phi = ch \left(\frac{\vec{w}_1}{c} \ominus \frac{\vec{w}_2}{c} \right).$$

Donc :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c} ;$$

$$m = \sqrt{m_1^2 + 2.m_1.m_2.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c} + m_2^2}.$$

C'est bien la même formule que nous avons obtenue en utilisant un formalisme différent.

Ceci permet de comprendre comment on peut calculer la masse "au repos" et la vitesse d'un ensemble formé de deux corps élémentaires en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Les calculs qui précèdent peuvent être considérés comme une démonstration partielle de l'invariance du produit scalaire des quadrivecteurs énergie-impulsion, démonstration que nous avons déjà vue dans la section sur les quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion. Nous disposons maintenant d'un formalisme plus adapté. Voici donc la démonstration la plus générale.

Pour un corps de masse au repos m_0 non nulle, nous avons vu que :

$$m_0 c^2 e^{\frac{\vec{w}}{c}} = m_0 c^2 ch \frac{\vec{w}}{c} + m_0 c^2 sh \frac{\vec{w}}{c} = E + c\vec{p}.$$

On peut écrire aussi :

$$E + c\vec{p} = m_0 c^2 ch \frac{\vec{w}}{c} . \left(1 + \frac{\vec{v}}{c} \right).$$

On peut identifier cette quantité au quadrivecteur énergie-impulsion : l'énergie E représente une composante (correspondant au temps du quadrivecteur d'espace-temps), et l'impulsion $c\vec{p}$ en comporte trois (correspondant aux dimensions spatiales).

Pour une particule de masse nulle se déplaçant à la vitesse de la lumière (un photon par exemple), on a : $E = h.\nu$ et $c.\vec{p} = h.\nu.\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire indiquant la direction de la particule. Le quadrivecteur peut s'écrire :

$$E + c\vec{p} = h.\nu . (1 + \vec{u}) .$$

Considérons deux quadrivecteurs, écrits sous forme générale : $q_1 = E_1 + c\vec{p}_1$ et $q_2 = E_2 + c\vec{p}_2$, et leur somme : $q = E + c\vec{p} = (E_1 + E_2) + c.(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$.

Selon la définition du produit scalaire des quadrivecteurs :

$$\begin{aligned} q_1.q_2 &= E_1.E_2 - c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2 ; \\ q_1^2 &= q_1.q_1 = E_1^2 - c^2.\vec{p}_1^2 \text{ (invariant) } ; \\ q_2^2 &= q_2.q_2 = E_2^2 - c^2.\vec{p}_2^2 \text{ (invariant) } ; \\ q^2 &= q.q = (E_1 + E_2)^2 - c^2.(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \text{ (invariant).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^2 &= (E_1^2 + 2.E_1.E_2 + E_2^2) - c^2.(\vec{p}_1^2 + 2.\vec{p}_1.\vec{p}_2 + \vec{p}_2^2) ; \\ q^2 &= (E_1^2 - c^2.\vec{p}_1^2) + (E_2^2 - c^2.\vec{p}_2^2) + 2.(E_1.E_2 - c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2) = q_1^2 + q_2^2 + 2.q_1.q_2. \end{aligned}$$

On a donc :

$$q_1.q_2 = \frac{1}{2}.(q^2 - q_1^2 - q_2^2).$$

Comme q_1^2 , q_2^2 et q^2 sont invariants (c'est-à-dire indépendants de la vitesse de l'observateur), alors le produit scalaire $q_1.q_2$ l'est aussi.

Cette démonstration s'applique aussi bien aux photons qu'aux particules massives.

Insistons sur le fait que l'invariance du produit scalaire des quadrivecteurs énergie-impulsion : $q_1.q_2 = E_1.E_2 - c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2 = E_1.E_2 - c^2.p_1.p_2.\cos\phi$ est directement reliée à l'égalité : $ch \frac{w_1 \ominus w_2}{c} = ch \frac{w_1}{c}.ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c}.sh \frac{w_2}{c}.\cos\phi$, donc au théorème d'Al Kashi hyperbolique.

Reprenons les calculs précédents avec trois corps :

$$\begin{cases} m_1^2.c^4 = E_1^2 - c^2.\vec{p}_1^2 ; \\ m_2^2.c^4 = E_2^2 - c^2.\vec{p}_2^2 ; \\ m_3^2.c^4 = E_3^2 - c^2.\vec{p}_3^2. \end{cases}$$

Sachant que $m^2.c^4 = E^2 - c^2.\vec{p}^2$, avec $E = E_1 + E_2 + E_3$ et que $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} m^2.c^4 &= (E_1 + E_2 + E_3)^2 - c^2.(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2 ; \\ m^2.c^4 &= E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + 2.(E_1.E_2 + E_2.E_3 + E_3.E_1) - c^2. \left[\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + \vec{p}_3^2 + 2.(\vec{p}_1.\vec{p}_2 + \vec{p}_2.\vec{p}_3 + \vec{p}_3.\vec{p}_1) \right] ; \\ m^2.c^4 &= (E_1^2 - c^2.\vec{p}_1^2) + (E_2^2 - c^2.\vec{p}_2^2) + (E_3^2 - c^2.\vec{p}_3^2) ... \\ &\dots + 2.(E_1.E_2 - c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2) + 2.(E_2.E_3 - c^2.\vec{p}_2.\vec{p}_3) + 2.(E_3.E_1 - c^2.\vec{p}_3.\vec{p}_1) ; \end{aligned}$$

$$m^2.c^4 = m_1^2.c^4 + m_2^2.c^4 + m_3^2.c^4 + 2.(E_1.E_2 - c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2) + 2.(E_2.E_3 - c^2.\vec{p}_2.\vec{p}_3) + 2.(E_3.E_1 - c^2.\vec{p}_3.\vec{p}_1).$$

Comme nous l'avons vu précédemment :

$$\begin{aligned} E_1.E_2 - c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2 &= m_1.m_2.c^4.ch\frac{\vec{w}_1}{c}.ch\frac{\vec{w}_2}{c} - m_1.m_2.c^4.sh\frac{\vec{w}_1}{c}.sh\frac{\vec{w}_2}{c} \dots \\ &= m_1.m_2.c^4.(ch\frac{\vec{w}_1}{c}.ch\frac{\vec{w}_2}{c} - sh\frac{\vec{w}_1}{c}.sh\frac{\vec{w}_2}{c}) = m_1.m_2.c^4.ch\frac{\vec{w}_1 \ominus \vec{w}_2}{c}. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} E_2.E_3 - c^2.\vec{p}_2.\vec{p}_3 &= m_2.m_3.c^4.ch\frac{\vec{w}_2 \ominus \vec{w}_3}{c} ; \\ E_3.E_1 - c^2.\vec{p}_3.\vec{p}_1 &= m_3.m_1.c^4.ch\frac{\vec{w}_3 \ominus \vec{w}_1}{c}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc (en divisant par c^4) :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2. \left(m_1.m_2.ch\frac{\vec{w}_1 \ominus \vec{w}_2}{c} + m_2.m_3.ch\frac{\vec{w}_2 \ominus \vec{w}_3}{c} + m_3.m_1.ch\frac{\vec{w}_3 \ominus \vec{w}_1}{c} \right).$$

Ceci se généralise à un ensemble de n corps de masses au repos m_i :

$$\begin{aligned} m^2 &= \sum_{i=1}^n m_i^2 + 2. \sum_{0 \leq i < j \leq n} m_i.m_j.ch\frac{\vec{w}_i \ominus \vec{w}_j}{c} ; \\ m^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i.m_j.ch\frac{\vec{w}_i \ominus \vec{w}_j}{c}, \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire aussi :

$$m^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i.m_j.ch\frac{\Delta\vec{w}_{i,j}}{c}.$$

Si on envisage des corps de masse au repos nulle, il faut écrire la formule sous cette forme plus générale :

$$m^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{E_i}{c^2} \cdot \frac{E_j}{c^2} - \frac{\vec{p}_i}{c} \cdot \frac{\vec{p}_j}{c} \right).$$

Pour des photons, on aura : $E_i = h.\nu_i$ et $\vec{p}_i = \frac{h.\nu_i}{c}.\vec{u}_i$, où $\vec{u}_i$ est un vecteur unitaire indiquant la direction du vecteur vitesse. La formule devient :

$$m^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{h.\nu_i}{c^2} \cdot \frac{h.\nu_j}{c^2} - \frac{h.\nu_i}{c^2} \cdot \frac{h.\nu_j}{c^2} \cdot \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j \right) = \frac{h^2}{c^4} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_i \cdot \nu_j \cdot (1 - \cos\phi_{i,j}).$$

Bien sûr, $\phi_{i,j}$ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}_i$ et $\vec{u}_j$.

On voit donc que la masse m dépend non seulement des énergies individuelles des photons, mais aussi des angles formés par leurs vecteurs vitesse les uns par rapport aux autres. Pour que m s'annule, il faut et il suffit que $\phi_{i,j}$ soit nul pour toutes les valeurs de i et de j , autrement dit que les vecteurs vitesse soient tous parallèles et de même sens. Un faisceau lumineux parfaitement ordonné n'a pas de masse, des rayonnements désordonnés en ont une.

Ceci nous conduit à considérer la masse non comme une mesure de l'énergie, mais plutôt comme une mesure du désordre de l'énergie (ou, si on préfère, de l'énergie désordonnée). Cette mesure du désordre fait penser, bien sûr, à l'entropie ; mais, contrairement à l'entropie, qui augmente toujours, la masse au repos, d'après ce qu'on croit savoir, est constante.

Une chose qu'il faut retenir, c'est que la masse est une propriété collective attachée à un ensemble de particules : aucune d'entre elles n'en est propriétaire ; donc la masse n'est localisée nulle part : elle est globale et non locale.

Que les particules en jeu soient des photons ou des particules massives, la masse résultante est donnée par :

$$m.c^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E_i.E_j - c^2.\vec{p}_i.\vec{p}_j)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (q_i.q_j)}$$

où $q_i.q_j$ est le produit scalaire des quadrivecteurs associés aux particules de rangs i et j .

Revenons maintenant sur la section concernant l'effet Doppler relativiste, pour apporter un éclairage nouveau.

Rappelons-nous : un rayonnement électromagnétique (photon) C , vu par un observateur A "immobile", avait pour longueur d'onde λ , pour période T et pour fréquence ν . Un autre observateur B lui attribue une longueur d'onde λ' , une période T' et une fréquence ν' . La distance entre A et B n'intervient pas ; on peut la considérer comme nulle. La rapidité de B par rapport à A est $\vec{w}$. Selon A , le vecteur vitesse du photon fait un angle α avec $\vec{w}$. Selon B , cet angle est β (différent de α en raison du phénomène d'aberration de la lumière). Il s'agit d'exprimer λ' , T' et ν' en fonction de λ , T et ν .

Une première approche consiste à considérer A , B et C comme les trois sommets d'un triangle dans l'espace hyperbolique des rapidités. On peut remarquer que C est un "point à l'infini". Nous avons étudié ce cas particulier dans la section "Autres formules de trigonométrie hyperbolique".

Mais nous allons plutôt utiliser, comme ci-dessus, la quantité $E_1.E_2 - c^2.\vec{p}_1.\vec{p}_2$, qui a la particularité d'être indépendante de la vitesse de l'observateur.

Nous allons donc calculer $E_B.E_C - c^2.\vec{p}_B.\vec{p}_C = E_B.E_C - c^2.p_B.p_C.\cos\phi$.

Selon l'observateur A :

$E_B = m_B.c^2.ch\frac{w}{c}$, $c.p_B = m_B.c^2.sh\frac{w}{c}$, $E_C = h.\nu$, $c.p_C = h.\nu$, donc :

$$E_B.E_C - c^2.p_B.p_C.\cos\phi = m_B.c^2.ch\frac{w}{c}.h.\nu - m_B.c^2.sh\frac{w}{c}.h.\nu.\cos\phi ;$$

$$E_B.E_C - c^2.p_B.p_C.\cos\phi = m_B.c^2.ch\frac{w}{c}.h.\nu.(1 - \frac{v}{c}.\cos\phi).$$

Pour l'observateur A , l'angle ϕ correspond à α , donc :

$$E_B.E_C - c^2.p_B.p_C.\cos\phi = m_B.c^2.h.\nu.\frac{1 - \frac{v}{c}.\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Changeons de point de vue et calculons la même quantité évaluée par B .

Comme B se considère immobile, on aura : $E'_B = m_B.c^2$ et $c.p'_B = 0$. D'autre part : $E'_C = h.\nu'$ et $c.p'_C = h.\nu'$. Donc :

$$E_B.E_C - c^2.p_B.p_C.\cos\phi = m_B.c^2.h.\nu'.$$

Si cette quantité est indépendante de l'observateur, alors on peut en déduire que :

$$m_B.c^2.h.\nu' = m_B.c^2.ch\frac{w}{c}.h.\nu.(1 - \frac{v}{c}.\cos\phi) ;$$

$$\nu' = \nu.\frac{1 - \frac{v}{c}.\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Comme la longueur d'onde est inversement proportionnelle à la fréquence, on en déduit que :

$$\lambda' = \lambda.\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}.\cos\alpha}.$$

C'est la formule que nous avons démontrée dans la section sur l'effet Doppler relativiste.

Voici maintenant un petit complément purement mathématique sur la multiplication des exponentielles de vecteurs. Distinguons bien deux types de multiplications : le produit scalaire noté ".", et la multiplication formelle, qui correspond au produit de convolution des séries, et que nous noterons $\otimes$.

Avec le produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \cdot e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= \left(ch \frac{w_1}{c} + sh \frac{w_1}{c} \right) \cdot \left(ch \frac{w_2}{c} + sh \frac{w_2}{c} \right) ; \\
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \cdot e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} ; \\
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \cdot e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} \cdot \cos \phi ; \\
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \cdot e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2} \cdot \cos \phi \right) .
\end{aligned}$$

Avec la multiplication formelle, on a :

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= \left(ch \frac{w_1}{c} + sh \frac{w_1}{c} \right) \otimes \left(ch \frac{w_2}{c} + sh \frac{w_2}{c} \right) ; \\
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} + ch \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} + sh \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} + sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} ; \\
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} + ch \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} + sh \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} + sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} ; \\
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(1 + \frac{v_2}{c} + \frac{v_1}{c} + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2} \right) .
\end{aligned}$$

Regroupons les scalaires à gauche, les vecteurs à droite :

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2} \right) + ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(\frac{v_1 + v_2}{c} \right) ; \\
e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2} \cdot \cos \phi \right) + ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(\frac{v_1 + v_2}{c} \right) .
\end{aligned}$$

Observons la partie scalaire :

$$ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2} \cdot \cos \phi \right) = ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} + sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} \cdot \cos \phi = ch \frac{\vec{w}_1 \oplus \vec{w}_2}{c} .$$

On aura reconnu ici le théorème d'Al Kashi hyperbolique. Attention : l'angle ϕ est un angle extérieur au triangle, alors que dans la section sur la métrique hyperbolique des rapidités nous avons utilisé l'angle intérieur, ce qui explique la différence de signe.

On peut alors se demander si la partie vectorielle ne serait pas égale à $sh \frac{\vec{w}_1 \oplus \vec{w}_2}{c}$; on aurait alors : $e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} = e^{\frac{\vec{w}_1 \oplus \vec{w}_2}{c}}$. Mais ce n'est pas le cas ; en effet, quand on divise la partie vectorielle par la partie scalaire, on obtient :

$$\frac{\frac{v_1 + v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2} \cdot \cos \phi}$$

alors qu'on devrait obtenir :

$$th \frac{\vec{w}_1 \oplus \vec{w}_2}{c} = \frac{\vec{v}_1}{c} \oplus \frac{\vec{v}_2}{c} = \frac{\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{c}}{1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \cdot \cos \phi}.$$

Rappelons que le vecteur $\vec{v}_2$ s'obtient, à partir de $\vec{v}_2$, en multipliant sa composante perpendiculaire à $\vec{v}_1$ par $\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$ (la composante parallèle à $\vec{v}_1$ restant inchangée). On pourra se reporter à la section sur la composition des vitesses dans l'espace.

Si on désire que la formule $e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} = e^{\frac{\vec{w}_1 \oplus \vec{w}_2}{c}}$ soit exacte, il faut travailler en associant la multiplication formelle $\otimes$ avec la composition des vitesses $\oplus$, en adoptant la définition :

$$e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} = ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \cdot \cos \phi \right) + ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} \cdot \left(\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{c} \right).$$

Dans le cas où les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires, on a $\vec{v}_2 = \vec{v}_2$, donc les deux définitions coïncident, et on a alors : $e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \otimes e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} = e^{\frac{\vec{w}_1 \oplus \vec{w}_2}{c}}$, mais ce n'est pas vrai dans le cas général.

Pour cette raison, il est plus intéressant de recourir une autre opération, notée $\odot$, que nous appellerons pseudo-produit scalaire, ainsi définie :

$$\begin{aligned} e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \odot e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= \left(ch \frac{w_1}{c} + sh \frac{\vec{w}_1}{c} \right) \odot \left(ch \frac{w_2}{c} + sh \frac{\vec{w}_2}{c} \right) ; \\ e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \odot e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} + sh \frac{\vec{w}_1}{c} \cdot sh \frac{\vec{w}_2}{c} ; \\ e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \odot e^{\frac{\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} + sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} \cdot \cos \phi = ch \frac{\vec{w}_1 \oplus \vec{w}_2}{c} ; \\ e^{\frac{\vec{w}_1}{c}} \odot e^{\frac{-\vec{w}_2}{c}} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot ch \frac{w_2}{c} - sh \frac{w_1}{c} \cdot sh \frac{w_2}{c} \cdot \cos \phi = ch \frac{\vec{w}_1 \ominus \vec{w}_2}{c}. \end{aligned}$$

Par rapport à la multiplication formelle que nous avons vue juste avant, nous avons simplement abandonné la partie vectorielle qui figurait dans le produit final.

On peut remarquer que ce pseudo-produit scalaire peut être identifié à celui qui a été défini dans la section sur les quadrvecteurs.

23 Petit formulaire sur les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques

Définitions :

- cosinus hyperbolique : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- sinus hyperbolique : $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- tangente hyperbolique : $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Propriétés fondamentales :

$$\cos(0) = 1$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(0) = 0$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$ch(0) = 1$$

$$ch(-x) = ch(x)$$

$$sh(0) = 0$$

$$sh(-x) = -sh(x)$$

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2 \cos(x). \sin(x)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x). \cos(y) - \sin(x). \sin(y)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x). \cos(y) + \sin(x). \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x). \cos(y) + \sin(y). \cos(x)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x). \cos(y) - \sin(y). \cos(x)$$

$$ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x) = 2 ch^2(x) - 1 = 1 + 2 sh^2(x)$$

$$sh(2x) = 2 ch(x).sh(x)$$

$$ch(x+y) = ch(x).ch(y) + sh(x).sh(y)$$

$$ch(x-y) = ch(x).ch(y) - sh(x).sh(y)$$

$$sh(x+y) = sh(x).ch(y) + sh(y).ch(x)$$

$$sh(x-y) = sh(x).ch(y) - sh(y).ch(x)$$

Dérivées :

$$\frac{d(\cos(x))}{dx} = -\sin(x)$$

$$\frac{d(\sin(x))}{dx} = \cos(x)$$

$$\frac{d(ch(x))}{dx} = sh(x)$$

$$\frac{d(sh(x))}{dx} = ch(x)$$

Développements en série :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Liens entre fonctions trigonométriques, exponentielles et hyperboliques :

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad (\text{où } i = \sqrt{-1})$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

$$ch(ix) = \cos(x)$$

$$sh(ix) = i \sin(x)$$

$$\cos(ix) = \cosh(x)$$

$$\sin(ix) = i \sinh(x)$$