Métriques diagonalisables et géodésiques

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, décembre 2015)

Table des matières

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

01) Gravitation relativiste : introduction

- Relativité restreinte :

02) Les vitesses en Relativité restreinte

- Physique quantique :

03) Physique quantique : généralités

04) Physique quantique : l'aventure collective

- Gravitation :

05) La relativité générale a-t-elle été prise en défaut ?

06) Gravitation relativiste : principes fondamentaux

07) Gravitation et critère de Schild

08) L'hypothèse du champ d'entraînement

2 Résumé

Nous nous proposons d'étudier ici les métriques susceptibles de traduire ce que nous savons de la gravitation, interprétée comme une courbure de l'espace-temps. Le but est de dégager les fondations mathématiques sur lesquelles viendront s'appuyer les documents suivants. Nous nous plaçons dans la situation la plus simple : celle d'un champ gravitationnel statique (indépendant du temps), à symétrie sphérique, produit par un corps central supposé ponctuel et immobile. Ce choix sera justifié plus tard par des considérations sur le vide quantique. Nous garderons en tête l'exemple du système solaire, avec son étoile centrale massive et son cortège de planètes de masses négligeables par rapport à celle du Soleil. Nous porterons une attention particulière à la métrique de Schwarzschild et à la métrique triviale de Ni, et nous nous attacherons à faire apparaître le plus clairement possible les atouts de ces deux métriques, dans la recherche d'une meilleure compréhension du problème de la gravitation, supposé à priori non résolu.

3 Coordonnées sphériques

Nous allons travailler en coordonnées sphériques ; les coordonnées d'un point de l'espace-temps seront donc : $(ct,\ r,\ \theta,\ \phi)$. Les trois coordonnées spatiales $(r,\ \theta,\ \phi)$ sont reliées aux coordonnées cartésiennes $(x,\ y,\ z)$ par les formules :

$$\begin{cases} x = r.sin\theta.cos\phi \ ; \\ \\ y = r.sin\theta.sin\phi \ ; \\ \\ z = r.cos\theta. \end{cases}$$

En différenciant ces égalités, nous obtenons :

$$\begin{cases} dx = dr.sin\theta.cos\phi + r.cos\theta.d\theta.cos\phi - r.sin\theta.sin\phi.d\phi \ ; \\ \\ dy = dr.sin\theta.sin\phi + r.cos\theta.d\theta.sin\phi + r.sin\theta.cos\phi.d\phi \ ; \\ \\ dz = dr.cos\theta - r.sin\theta.d\theta. \end{cases}$$

La distance élémentaire dl entre deux points très proches s'évalue ainsi :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \ ;$$

$$dl^2 = (sin\theta.cos\phi.dr + r.cos\theta.cos\phi.d\theta - r.sin\theta.sin\phi.d\phi)^2 ...$$

$$... + (sin\theta.sin\phi.dr + r.cos\theta.sin\phi.d\theta + r.sin\theta.cos\phi.d\phi)^2 ...$$

$$... + (cos\theta.dr - r.sin\theta.d\theta)^2 \ ;$$

$$dl^2 = (sin^2\theta.cos^2\phi + sin^2\theta.sin^2\phi + cos^2\theta).dr^2 ...$$

$$... + (r^2.cos^2\theta.cos^2\phi + r^2.cos^2\theta.sin^2\phi + r^2.sin^2\theta).d\theta^2 ...$$

$$... + (r^2.sin^2\theta.sin^2\phi + r^2.sin^2\theta.cos^2\phi).d\phi^2 ...$$

$$... + 2.(r.cos\theta.sin\theta.cos^2\phi + r.cos\theta.sin\theta.sin^2\phi - r.cos\theta.sin\theta).dr.d\theta ...$$

$$... + 2.(-r.sin^2\theta.cos\phi.sin\phi + r.sin^2\theta.cos\phi.sin\phi).dr.d\phi ...$$

$$... + 2.(-r^2.cos\theta.sin\theta.cos\phi.sin\phi + r^2.cos\theta.sin\theta.cos\phi.sin\phi).d\theta.d\phi.$$

Après simplification :

$$dl^2 = dr^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2.$$

4 Métriques diagonalisables

L'espace-temps euclidien de la relativité restreinte, ou espace-temps de Minkowski, est caractérisé par une "distance" élémentaire ds (intervalle spatio-temporel, ou intervalle d'univers), définie par :

$$ds^2 = c^2.dt^2 - dl^2.$$

On peut aussi l'exprimer, localement, en utilisant les coordonnées $(ct,\ x,\ y,\ z)$, où l'axe des x est radial (c'est l'axe reliant le "Soleil" à la "planète"), les deux autres axes étant perpendiculaires au premier ("tangentiels") et également perpendiculaires entre eux. La coordonnée x est donc égale à r. On a alors : $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; donc la métrique de Minkowski devient :

$$ds^2 = c^2.dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

On peut l'écrire aussi en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = c^2.dt^2 - \left(dr^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2\right).$$

Cette formule exprime la métrique euclidienne de l'espace-temps de Minkowski.

L'étude de la gravitation montre que cette formule doit être adaptée pour intégrer le champ gravitationnel, qui peut être interprété comme une courbure de l'espace-temps. D'après notre interprétation du critère de Schild, la spécificité de la gravitation est de nous obliger à distinguer les points de vue des différents observateurs en fonction de leur potentiel gravitationnel, et plus spécialement le point de vue de l'observateur local du point de vue de l'observateur distant.

Nous admettrons que la relativité restreinte est toujours valable localement, donc on peut raisonner localement (à une échelle infinitésimale) comme dans un espace-temps de Minkowski, ce qui signifie que :

$$ds^2 = c^2.dt_{loc}^2 - (dx_{loc}^2 + dy_{loc}^2 + dz_{loc}^2).$$

Mais nous ne pouvons pas nous contenter d'une équation valable seulement dans un domaine infinitésimal ; nous voulons une équation qui nous parle de l'espace-temps dans son ensemble : nous allons adopter le point de vue de l'observateur distant.

Dans le document précédent (voir les matrices de changement de potentiel) notre raisonnement nous avait conduit a ces relations :

$$\begin{cases} c.dt_{loc} = e^{-\frac{k}{r}}.c.dt_{dist}\ ; \\ \\ dx_{loc} = e^{\frac{k}{r}}.dx_{dist}\ ; \\ \\ dy_{loc} = e^{\frac{k}{r}}.dy_{dist}\ ; \\ \\ dz_{loc} = e^{\frac{k}{r}}.dz_{dist}. \end{cases}$$

Les coefficients $e^{-\frac{k}{r}}$ et $e^{\frac{k}{r}}$ sont le coefficient de dilatation du temps (ralentissement des horloges locales) et de dilatation de l'espace (raccourcissement des règles locales) dans le voisinage d'un corps massif, du point de vue de l'observateur distant.

La métrique correspondante est donc :

$$ds^2 = c^2.e^{-\frac{2k}{r}}.dt_{dist}^2 - e^{\frac{2k}{r}}.(dx_{dist}^2 + dy_{dist}^2 + dz_{dist}^2).$$

C'est la métrique triviale de Ni, qu'on peut écrire aussi :

$$ds^2 = c^2.e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}.dt_{dist}^2 - e^{-\frac{2.\Phi}{c^2}}.(dx_{dist}^2 + dy_{dist}^2 + dz_{dist}^2).$$

La première formulation est celle qu'on utilise dans le cas d'un champ à symétrie sphérique produit par un corps unique (supposé ponctuel) ; la seconde peut s'utiliser dans des situations plus diverses, à condition d'admettre le rôle fondamental du potentiel Φ dans la courbure de l'espace-temps.

Mais nous voulons faire ici une étude plus générale. Nous allons conserver notre raisonnement basé sur l'existence de coefficients de dilatation du temps et de l'espace, mais sans leur attribuer, à priori, les valeurs particulières qui figurent dans la métrique de Ni ; ce choix nous conduit à sélectionner les équations de la forme :

$$ds^2 = c^2.\alpha.dt_{dist}^2 - \beta.dx_{dist}^2 - \gamma.dy_{dist}^2 - \gamma.dz_{dist}^2.$$

Nous noterons : $dt_{dist} = dt$, $d_{dist} = dx = dr$, $dy_{dist} = dy$, $dz_{dist} = dz$; ce qui donne :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.(dy^2 + dz^2).$$

En coordonnées sphériques :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.\left(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2\right).$$

On doit comprendre que α, β et γ sont trois fonctions positives ne dépendant que de la seule variable r (dans le cas d'un champ à symétrie sphérique produit par un corps unique) ou de Φ (dans le cas général) ; elles sont indépendantes de θ et ϕ en raison de la symétrie sphérique. Leurs racines carrées sont les coefficients de dilatation du temps et de l'espace : $\sqrt{\alpha}$ pour le temps, $\sqrt{\beta}$ pour l'espace selon la direction radiale, $\sqrt{\gamma}$ pour l'espace selon les deux directions tangentielles (perpendiculaires à la direction radiale).

Les quatre coefficients : $g_{11} = \alpha$, $g_{22} = -\beta$, $g_{33} = -\gamma.r^2$ et $g_{44} = -\gamma.r^2.sin^2\ \theta$, définissent la métrique de l'espace-temps courbé par la gravité. Cette métrique peut être représentée sous forme de matrice (dans le cas présent, une matrice diagonale, pour des raisons de symétrie) :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma.r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma.r^2.sin^2\ \theta \end{pmatrix}.$$

La relativité restreinte étant toujours valable localement, un observateur local qui étudie le mouvement des mobiles dans son voisinage proche ne détectera aucune courbure (au premier ordre) ; ses observations seront en accord avec la matrice de Minkowski, qui lui servira de base de travail. La matrice que nous venons d'introduire ci-dessus (avec les trois coefficients α, β et γ, destinés à décrire une courbure) sera utilisée par un autre observateur situé loin de la scène (observateur distant). Ils voient la même scène, mais ne l'interprètent pas de la même façon, en termes d'espace et de temps. Cette distorsion est due au fait qu'ils ne sont pas situés dans un même potentiel gravitationnel.

Comme l'étude des espaces courbes nécessite l'utilisation du calcul tensoriel, qui est l'outil privilégié, nous devons apporter quelques précisions. Tout d'abord, les différentielles des coordonnées usuelles que nous utilisons (qu'elles soient cartésiennes ou sphériques) sont considérées comme des tenseurs contravariants, et se notent avec un indice placé en haut, à la manière d'un exposant. Pour les coordonnées sphériques, par exemple, il est d'usage d'écrire :

$$\begin{cases} dx^1 = c.dt; \\ \\ dx^2 = r; \\ \\ dx^3 = r.d\theta; \\ \\ dx^4 = r.sin\theta.d\phi. \end{cases}$$

Il faudra prendre garde de ne pas confondre les indices placés en haut (contravariants) avec des exposants !

Quant aux coefficients de la métrique (g_{11},...), nous les avons écrits avec des indices placés en bas, car ils sont covariants ; mais on peut aussi utiliser leur version contravariante, qui est la suivante :

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} g^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma.r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma.r^2.sin^2\ \theta} \end{pmatrix}.$$

Les métriques qui peuvent s'exprimer ainsi sont les métriques diagonalisables ; ce sont celles que nous allons étudier ici.

5 Métriques isotropes : définition

Si le coefficient de dilatation de l'espace est identique quelle que soit la direction, on a $\gamma = \beta$ (autrement dit $g_{22} = -\beta$, $g_{33} = -\beta.r^2$ et $g_{44} = -\beta.r^2.sin^2\ \theta$), et la métrique devient :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.\left(dr^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2\right),$$

ou, plus simplement :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dl^2.$$

On aura compris que dl désigne une longueur élémentaire de direction quelconque, évaluée par l'observateur distant.

Dans ce cas, nous parlerons de métrique isotrope.

On a alors :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta.r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta.r^2.sin^2\ \theta \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la métrique de Ni est isotrope ; celle de Schwarzschild ne l'est pas.

Le grand intérêt des métriques isotropes vient du fait que la distance radiale r peut être éliminée au profit de Φ ; ceci ouvre la porte à une théorie basée uniquement sur le potentiel Φ. Il suffit que α et β soient des fonctions de Φ et non de r.

6 Métriques radiales : définition

Si la dilatation de l'espace ne concerne que la direction radiale, on a $\gamma = 1$ (autrement dit $g_{33} = -r^2$ et $g_{44} = -r^2.sin^2\ \theta$), et la métrique devient :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \left(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2\right).$$

Dans ce cas, nous parlerons de métrique radiale.

On a alors :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2.sin^2\ \theta \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la métrique de Schwarzschild est isotrope ; celle de Ni ne l'est pas.

7 Métriques homogènes : définition

Si les coefficients α et β sont égaux (autrement dit $g_{22} = -g_{11}$), la métrique devient :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \alpha.dr^2 - \gamma.\left(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2\right).$$

Dans ce cas, nous parlerons de métrique homogène.

On a alors :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma.r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma.r^2.sin^2\ \theta \end{pmatrix}.$$

Les métriques de Schwarzschild et de Ni ne sont pas homogènes.

8 Métriques symétriques : définition

Si les coefficients α et β sont inverses ($\beta = \frac{1}{\alpha}$, donc $g_{22} = -\frac{1}{g_{11}}$), la métrique devient :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \frac{1}{\alpha}.dr^2 - \gamma.\left(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2\right).$$

Dans ce cas, nous parlerons de métrique symétrique.

On a alors :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma.r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma.r^2.sin^2\ \theta \end{pmatrix}.$$

Les métriques de Schwarzschild et de Ni ne sont toutes les deux symétriques.

9 Métriques pré-relativistes : définition

Si $\alpha = e^{-\frac{2k}{r}}$, la métrique devient :

$$ds^2 = e^{-\frac{2k}{r}}.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.\left(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2\right).$$

Dans ce cas, nous parlerons de métrique pré-relativiste.

On a alors :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2k}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma.r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma.r^2.sin^2\ \theta \end{pmatrix}.$$

La métrique de Ni est pré-relativiste, celle de Schwarzschild ne l'est pas.

Dès que nous avons cherché à interpréter le critère de Schild, nous avons rencontré cette condition sur le coefficient de dilatation du temps : $\sqrt{\alpha} = e^{-\frac{k}{r}}$; c'est donc le pilier principal de notre travail qui nous a aiguillé vers la métrique de Ni. Mais nous avons fait ensuite appel à d'autres hypothèses, comme la loi d'harmonisation dynamique des règles et des horloges, dont la validité sera discutée plus loin.

10 Lagrangien

En gravitation newtonienne, le lagrangien est égal à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du mobile :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}.m.v^2 - m.\Phi.$$

On considère que L est une fonction du temps t, des cordonnées spatiales x_1, x_2 et x_3 du mobile, et des composantes v_1, v_2 et v_3 de sa vitesse. Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}\ (i = 1, 2, 3).$$

Remplaçons L par $\frac{1}{2}.m.v^2 - m.\Phi$, où $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, et où Φ est le potentiel newtonien, fonction de x_1, x_2 et x_3 (mais indépendant de v).

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}.m.(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)\right)}{\partial v_i} = m.v_i\ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(m.v_i\right) = m.\frac{dv_i}{dt} \ ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -m.\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

On a donc, selon les équations de Lagrange :

$$m.\frac{dv_i}{dt} = -m.\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \ (i = 1, 2, 3) \ ;$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\bigtriangledown}\Phi.$$

Ce calcul classique n'a pas beaucoup de sens en relativité, non seulement à cause de l'expression de l'énergie cinétique, qui n'est pas relativiste, mais aussi parce-que l'évaluation de toutes les quantités qui y figurent (sauf Φ) varient en fonction de l'observateur. On pourrait donc penser que cette approche newtonienne est très éloignée de la réalité. Remarquons quand même, pour ceux qui seraient "choqués" par l'expression de l'énergie cinétique ($E_c = \frac{1}{2}.m.v^2$), que cette énergie n'intervient ici que par sa dérivée par rapport à v_i, qui est $\frac{dE_c}{dv_i} = \frac{dL}{dv_i} = m.v_i = p_i$ (composante de l'impulsion). On pourrait donc formuler les équations classiques de Lagrange directement sous leur seconde forme :

$$\frac{dp_i}{dt} = -m.\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \ ;$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -m.\vec{\bigtriangledown}\Phi.$$

Tout ceci est très simple et parfaitement cohérent en mécanique newtonienne ; mais nous sommes partis de l'égalité : $L = E_c - E_p = \frac{1}{2}.m.v^2 - m.\Phi$, qui n'a aucun sens en gravitation relativiste. En effet, dans ce contexte, l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p ne sont pas séparables, car elles se combinent selon une formule du type $E = m_0.c^2.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}$. En revanche, il est possible de séparer l'impulsion de l'énergie, en utilisant une formule du type : $cp = m_0.c^2.sh\frac{w}{c}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}} = m_0.c.v.ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$. On a alors (en utilisant les formules dérivées de la métrique de Ni, que nous reprendrons et développerons plus loin) :

$$\begin{cases} E = E_{dist} = m_0.c^2.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} \ ; \\ \\ p_{dist}.v_{dist} = m_0.c.sh\frac{w}{c}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.v_{loc}.e^{\frac{2.\Phi}{c^2}} = m_0.v^2.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}. \end{cases}$$

En relativité restreinte, le potentiel Φ n'intervient pas, et on a alors :

$$\begin{cases} E = m_0.c^2.ch\frac{w}{c} \ ; \\ \\ p.v = m_0.v^2.ch\frac{w}{c}. \end{cases}$$

Dans ce cas, on peut remarquer que :

$$p.v - E = -m_0.c^2.ch\frac{w}{c}.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -m_0.c^2.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \;;$$

$$p.v - E = -m_0.c^2.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Pour $v << c$:

$$pv - E \approx -m_0.c^2.\left(1 - \frac{1}{2}.\frac{v^2}{c^2}\right) = -m_0.c^2 + \frac{1}{2}.m_0.v^2.$$

Comme le lagrangien est défini à une constante près, on peut supprimer, si on le désire, le terme $-m_0.c^2$, et il reste $\frac{1}{2}.m_0.v^2$, qui est le lagrangien de la mécanique newtonienne (pour $\phi = 0$). On va donc poser, en relativité restreinte :

$$L = p.v - E = -m_0.c^2.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Comme $ds^2 = c^2.dt^2 - dl^2$, on a $\frac{ds}{c.dt} = \sqrt{1 - \frac{dl^2}{c^2.dt^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. On a donc :

$$L = -m_0.c.\frac{ds}{dt}.$$

On peut poser : $S = -m_0.c.s$, et on a alors :

$$L = \frac{dS}{dt}.$$

Cette quantité S (définie à une constante près) est appelée action.

Par rapport à l'approche newtonienne, l'avantage est qu'on fait intervenir ici l'invariant lorentzien ds. A partir du moment où on se place dans le cadre de la relativité restreinte, il est indispensable de baser toutes les notions fondamentales sur des invariants lorentziens.

Revenons maintenant au contexte gravitationnel, en réintroduisant le potentiel Φ ; il vient :

$$L = p_{dist}.v_{dist} - E_{dist} = m_0.v_{loc}^2.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} - m_0.c^2.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} \;;$$

$$L = -m_0.c^2.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.$$

N'oublions pas que $v = v_{loc}$.

Pour Φ suffisamment petit et $v << c$, nous avons d'une part $e^{\frac{\Phi}{c^2}} \approx 1 + \frac{\Phi}{c^2}$ et d'autre part $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}.\frac{v^2}{c^2}$; nous obtenons :

$$L \approx -m_0.c^2.\left(1 - \frac{1}{2}.\frac{v^2}{c^2}\right).\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Développons, en négligeant les termes en $\frac{v^2}{c^2}.\frac{\Phi}{c^2}$:

$$L \approx -m_0.c^2 + \frac{1}{2}.m_0.v^2 - m_0.\Phi.$$

Nous retrouvons, au premier ordre en $\frac{v^2}{c^2}$ et en Φ, et à une constante près ($-m_0.c^2$), le lagrangien de la gravitation newtonienne.

Dans l'espace-temps courbe, la relativité restreinte est toujours valable localement, donc on a :

$$ds^2 = c^2.dt_{loc}^2 - dt_{loc}^2 = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{dl_{loc}^2}{c^2.dt_{loc}^2}\right) = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \;;$$

$$\frac{ds}{c.dt_{loc}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Comme $dt = dt_{dist} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.dt_{loc}$, on a :

$$\frac{ds}{c.dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$L = -m_0.c^2.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.e^{\frac{\Phi}{c^2}} = -m_0.c.\frac{ds}{dt}.$$

La formule du lagrangien utilisée en relativité restreinte est toujours valable en gravitation relativiste, à condition de préciser que dt est évalué par un observateur distant (ou par tout autre observateur immobile, n'accompagnant pas le mobile) :

$$L = -m_0.c.\frac{ds}{dt}.$$

Comme précédemment, on peut toujours poser : $dS = -m_0.c.ds$, ce qui entraîne : $L = \frac{dS}{dt}$.

Si on désire utiliser cette formule pour calculer les équations des géodésiques, on écrit que $L.dt = -m_0.c.ds$. La quantité $\int L.dt = -m_0.c.\int dS$ doit être minimale sur toute la trajectoire (propriété fondamentale du lagrangien) ; autrement dit, $\int ds$ doit être maximale. C'est cette propriété que nous utiliserons dans les paragraphes d'introduction aux géodésiques : une géodésique est une trajectoire qui maximise le temps propre.

On peut remarquer que toutes les formules que nous venons de voir, concernant aussi bien la gravitation newtonienne que la relativité restreinte ou la gravitation relativiste, attribuent un rôle particulier au temps. Mais on sait qu'en relativité générale, en raison de la covariance totale des équations, toute propriété liée au temps doit pouvoir se transposer, automatiquement, aux coordonnées d'espace. De brillants mathématiciens, comme Elie Cartan, on travaillé sur un lagrangien dégagé de la notion de temps. Leurs calculs sont irréprochables, mais s'appuient sur les idées d'Einstein, donc sur la covariance généralisée, considérée comme un dogme. Ceci coupe un peu plus les théories de la gravitation de la physique quantique, dans laquelle le temps a un rôle bien particulier.

Dans cette conception du lagrangien, on n'aura plus : $dS = L.dt$, mais $dS = L.dt.dx.dy.dz$. On est alors conduit à faire une intégration sur tout l'espace-temps. Mais la cohérence du raisonnement exige que $dt.dx.dy.dz$ soit un invariant (qu'on peut appeler le volume élémentaire d'espace-temps).

En relativité restreinte, $dV = dt.dx.dy.dz$ est bien un invariant. Effectivement, si la distance spatio-temporelle entre deux événements est $(dt,\ dx,\ dy,\ dz)$ pour un premier observateur, alors, pour un second observateur se déplaçant à la vitesse v par rapport au premier, selon l'axe des x, ce sera $(dt',\ dx',\ dy',\ dz')$, avec $dt' = \frac{dt}{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $dx' = dx.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$, $dy' = dy$, $dz' = dz$; il en résulte qu'on a bien $dt'.dx'.dy'.dz' = dt.dx.dy.dz$. Plus rigoureusement, ceci vient du fait que le déterminant de la matrice de Lorentz est égal à 1.

Dans la métrique de Schwarzschild, le coefficient de dilatation du temps, dû au potentiel gravitationnel, est $\sqrt{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{2.k}{r}}$, et les coefficients de dilatation de l'espace sont $\sqrt{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2.k}{r}}}$ (selon la direction radiale), et $\sqrt{\gamma} = 1$ (selon les deux directions tangentielles) ; leur produit est :

$$\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}.\sqrt{\gamma}.\sqrt{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{2.k}{r}}.\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2.k}{r}}}.1.1 = 1.$$

Donc, dans la métrique de Schwarzschild, le volume élémentaire d'espace-temps est conservé par la matrice de changement de potentiel ; et ceci doit être vrai, plus généralement, en relativité générale. Et ce n'est pas par hasard : c'est parce-que, selon le principe d'équivalence fort, le champ gravitationnel doit pouvoir être "effacé" par une accélération adéquate, autrement dit la matrice de changement de potentiel doit être équivalente à une matrice de Lorentz convenablement choisie ; donc la conservation du volume élémentaire d'espace-temps doit s'appliquer non seulement à la matrice de Lorentz, mais aussi à la matrice de changement de potentiel. On pourrait dire (même si à l'origine ce choix a été formulé différemment) que cette matrice de changement de potentiel a été imaginée, intentionnellement, dans le but de la rendre interchangeable avec une matrice de Lorentz.

Mais ceci n'est pas vrai pour d'autres métriques. Par exemple, en métrique de Ni, on a : $\sqrt{\alpha} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ et $\sqrt{\beta} = \sqrt{\gamma} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$, donc $\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}.\sqrt{\gamma}.\sqrt{\gamma} = e^{-\frac{2.\Phi}{c^2}}$. Le volume élémentaire d'espace-temps n'est pas conservé par les matrices de changement de potentiel. Ceci vient du fait que cette métrique ne respecte pas le principe d'équivalence fort : une matrice de changement de potentiel ne peut pas être "effacée" par une matrice de Lorentz. Ce sont des matrices de nature différente, l'une ayant une signification physique (car le potentiel est lié à l'énergie), l'autre purement cinématique (ou, mieux : mathématique).

On peut contourner le problème en remplaçant le lagrangien par une densité lagrangienne. On fait alors intervenir le facteur $\sqrt{-g}$, où g est le déterminant de la métrique.

Si on choisit d'exprimer une métrique diagonalisable de manière localement cartésienne, on obtient :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $g = \alpha.(-\beta).(-\gamma).(-\gamma) = -\alpha.\beta.\gamma^2$, donc $\sqrt{-g} = \sqrt{\alpha.\beta}.\gamma$.

Si la métrique est symétrique ($\alpha.\beta = 1$), on obtient : $\sqrt{-g} = \gamma$.

Par exemple, dans le cas de la métrique de Schwarzschild, on a $\sqrt{-g} = 1$; dans le cas de la métrique de Ni, on a $\sqrt{-g} = e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} = e^{\frac{2.k}{r}}$.

Une autre idée est de faire intervenir le scalaire de Ricci R, puisqu'il est invariant par tout changement de référentiel. On peut alors définir l'action d'Einstein-Hilbert S_{EH} :

$$S_{EH} = \frac{c^3}{16.\pi.G}.\int d^4x.\sqrt{-g}.R,$$

où $d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ (c'est un volume spatio-temporel élémentaire, exprimé selon l'usage du calcul tensoriel : $x^0 = c.t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$).

Le grand mérite de Hilbert est d'avoir démontré qu'à partir de cette définition de l'action il est possible de retrouver précisément l'équation d'Einstein (celle de la relativité générale).

Ce travail mathématique très remarquable a été vu comme une consécration de la covariance totale, et une justification de la formule souvent employée : "le temps n'existe pas en relativité générale" ; pour Einstein, c'est la cerise sur le gâteau ! Merci Hilbert !

Dans la recherche de nouvelles théories de la gravitation, la mode actuelle est d'imaginer un lagrangien L et d'en déduire l'action à partir de la formule : $dS = L.dt.dx.dy.dz$, par intégration. Par exemple, on peut remplacer R par $f(R)$, où f est une fonction quelconque. Si R est un invariant (identique dans tous les référentiels), il en sera de même de $f(R)$. On pourra donc tester l'action suivante :

$$S = \frac{c^3}{16.\pi.G}.\int d^4x.\sqrt{-g}.f(R).$$

Cette démarche suppose qu'on recherche une théorie respectant le principe d'équivalence fort et la covariance totale, et qu'on souhaite que le temps y joue un rôle identique aux trois coordonnées d'espace.

C'est précisément ce que nous ne voulons pas faire. Effectivement, la relativité restreinte nous a appris que la dimension temporelle et les dimensions spatiales se combinent d'une manière très particulière et très originale, basée sur la transformation de Lorentz, qui montre à la fois leurs liens très étroits et leurs rôles complémentaires, mais différents. Nous refusons d'en conclure qu'on peut se permettre de tout mettre dans le même sac ! Nous l'avons expliqué dans le document sur les principes fondamentaux.

Nous verrons plus loin que, dans la métrique de Schwarzschild, on a $R = 0$ dans le vide (donc "presque partout", si la matière est répartie de manière discrète).

Dans la métrique de Ni, on verra que $R = -\frac{2.k^2}{r^4}.e^{-\frac{2.k}{r}}$, donc :

$$R.\sqrt{-g} = -\frac{2.k^2}{r^4}.e^{-\frac{2.k}{r}}.e^{\frac{2.k}{r}} = -\frac{2.k^2}{r^4}.$$

Cette quantité est indépendante de l'observateur ; c'est l'expression d'une courbure purement spatiale. On peut remarquer que $\frac{k^2}{r^4}$ est le carré de $\frac{k}{r^2}$, qui est le module du vecteur $\frac{k}{r^2}.\frac{\vec{r}}{r}$, qui nous rappelle la force gravitationnelle de Newton, et qui pourrait s'identifier au flux d'information dont nous parlerons plus loin (principalement dans le document "gravitation et vide quantique"). Nous n'avons pas de raison de lui chercher une autre interprétation.

Dans la section sur les géodésiques en coordonnées polaires, nous appliquerons le principe suivant : Le calcul des géodésiques revient à rechercher les trajectoires qui maximisent le temps propre $\int ds$. Nous allons donc utiliser le lagrangien et l'action utilisés en relativité restreinte, tout simplement parce-que toutes les métriques que nous étudions sont censées respecter localement la relativité restreinte. Ce lagrangien est un outil qui permet de calculer comment va se déplacer un mobile, connaissant d'une part sa vitesse et sa position initiales, et d'autre part la courbure de l'espace-temps en chaque point ; mais il ne nous permettra jamais de calculer comment la matière, ou l'énergie, courbe l'espace-temps. Nous n'essaierons pas de construire un lagrangien plus général prenant en compte ce second aspect de la gravitation.

11 Géodésiques en coordonnées polaires

Nous allons travailler sur un modèle de type "système solaire". Toute la masse est supposée concentrée en un point (le Soleil, confondu avec l'origine du repère). Le but étant d'étudier la trajectoire d'une planète, qui est plane, nous pouvons éliminer une dimension spatiale ; nous travaillerons donc en dimension trois (une dimension temporelle et deux spatiales). Nous utiliserons des coordonnées polaires ; si nous souhaitons rétablir la dimension spatiale escamotée, nous passerons aux coordonnées sphériques. La métrique dans le voisinage du Soleil s'écrira :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.d\theta^2.$$

Les trois coefficients α, β et γ ne dépendent que de r. Les trois coordonnées sont : $x^1 = c.t$, $x^2 = r$, $x^3 = \theta$. Les indices placés en haut ne sont pas des exposants, mais des indices contravariants, selon la notation tensorielle. On notera g_{ij} les coefficients de la matrice de la métrique (supposée diagonale).

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma.r^2 \end{pmatrix}.$$

Le calcul des géodésiques revient à rechercher les trajectoires qui maximisent le temps propre $\int ds$.

Il existe deux méthodes principales pour calculer ces géodésiques : la première (la plus ancienne) est la méthode des variations ; elle s'inspire directement du calcul infinitésimal de Newton et Leibniz, qu'elle utilise d'une manière très astucieuse ; elle a été mise au point par Lagrange et Euler, au $XVIII^{ème}$ siècle, et perfectionnée par Hamilton au $XIX^{ème}$. La seconde fait appel à des notions plus abstraites (mais très rigoureuses) du calcul tensoriel, et plus précisément aux symboles de Christoffel et à la notion de transport parallèle.

Les équations ainsi obtenues peuvent s'écrire de manière abrégée sous la forme suivante :

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\ \frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{1}{2}\ \frac{dx^i}{ds}\ \frac{dx^j}{ds}\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Cette égalité est écrite ici en notation tensorielle respectant la convention d'Einstein. Rappelons cette convention : les indices i, j, k, qu'ils soient en position basse ou haute, peuvent être égaux à 1, 2 ou 3 ; il ne s'agit pas d'exposants !

Dans un même monôme, un indice figurant à la fois en position basse et en position haute est un indice de sommation, appelé indice muet ; c'est le cas de i dans le membre de gauche, de i et j dans celui de droite. L'indice k, au contraire, se trouve seulement en position basse (ou haute) dans un même monôme ; c'est un indice libre. Il a la même valeur dans les deux membres. Il en résulte que la formule ci-dessus résume en réalité trois égalités (une pour chaque valeur de k), de la forme :

$$\frac{d}{ds}\left(\sum_{i=1}^{3} g_{ik}\ \frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{1}{2}\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{dx^i}{ds}\ \frac{dx^j}{ds}\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

En réalité, la matrice de la métrique étant diagonale, g_{ik} s'annule pour $i \neq k$ et g_{ij} s'annule pour $j \neq i$. Nous allons supprimer les termes qui s'annulent. Dans le membre de gauche, il reste un seul monôme tel que $i = k$, et dans le membre de droite trois monômes tels que $j = i$. La formule ci-dessus s'écrit donc :

$$\frac{d}{ds}\left(g_{kk}\ \frac{dx^k}{ds}\right) = \frac{1}{2}\ \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2\ \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k},$$

ou encore, en séparant les trois égalités :

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{d}{ds}\left(g_{11}\ \dfrac{dx^1}{ds}\right) = \dfrac{1}{2}\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\dfrac{dx^i}{ds}\right)^2\ \dfrac{\partial g_{ii}}{\partial x^1}\ ; \\[2ex] 2)\ \dfrac{d}{ds}\left(g_{22}\ \dfrac{dx^2}{ds}\right) = \dfrac{1}{2}\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\dfrac{dx^i}{ds}\right)^2\ \dfrac{\partial g_{ii}}{\partial x^2}\ ; \\[2ex] 3)\ \dfrac{d}{ds}\left(g_{33}\ \dfrac{dx^3}{ds}\right) = \dfrac{1}{2}\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\dfrac{dx^i}{ds}\right)^2\ \dfrac{\partial g_{ii}}{\partial x^3}. \end{cases}$$

Rappelons que, dans le cas présent, on a : $x^1 = c.t$, $x^2 = r$, $x^3 = \theta$.
En faisant les substitutions dans les trois équations, il vient :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d}{ds}\left(g_{11}.\frac{c.dt}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial g_{11}}{c.\partial t} + \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial g_{22}}{c.\partial t} + \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial g_{33}}{c.\partial t}\ ; \\ 2)\ \frac{d}{ds}\left(g_{22}.\frac{dr}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial g_{11}}{\partial r} + \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial g_{22}}{\partial r} + \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial g_{33}}{\partial r}\ ; \\ 3)\ \frac{d}{ds}\left(g_{33}.\frac{d\theta}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta}. \end{cases}$$

De plus, on a vu que $g_{11} = \alpha$, $g_{22} = -\beta$, $g_{33} = -\gamma.r^2$, ce qui nous donne :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d}{ds}\left(\alpha.\frac{c.dt}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial \alpha}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial \beta}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{c.\partial t}\ ; \\[2ex] 2)\ -\frac{d}{ds}\left(\beta.\frac{dr}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{\partial r}\ ; \\[2ex] 3)\ -\frac{d}{ds}\left(\gamma.r^2.\frac{d\theta}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial \beta}{\partial \theta} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{\partial \theta}. \end{cases}$$

On doit comprendre que ces équations décrivent le mouvement d'une particule-test, qui est guidée par le champ gravitationnel, ou si on préfère par la courbure, à laquelle elle obéit sans la modifier. Le repère de référence est celui d'un observateur distant immobile.

Comme nous étudions un champ statique (indépendant du temps), à symétrie circulaire (indépendant de θ), les dérivées de α, β et γ par rapport à $c.t$ et par rapport à θ sont nulles ; la première et la troisième équations se simplifient donc :

$$\begin{cases} 1) \ \frac{d}{ds}\left(\alpha.\frac{c.dt}{ds}\right) = 0 \ ; \\ \\ 3) \ \frac{d}{ds}\left(\gamma.r^2 \ \frac{d\theta}{ds}\right) = 0. \end{cases}$$

La première égalité signifie que la quantité $\alpha.\frac{c.dt}{ds}$ (autrement dit : $\alpha.\frac{c.dt_{dist}}{ds}$) est constante sur la géodésique. Elle exprime (à une constante multiplicative près) la conservation d'une quantité que nous appellerons : énergie. Nous noterons (pour une particule, ou une planète, de masse au repos m_0) :

$$E = m_0.c^2.\alpha.\frac{c.dt}{ds}.$$

Cette quantité sera constante, à condition que le champ soit statique : $\frac{d\Phi}{dt} = 0$.

Nous utiliserons aussi l'énergie réduite $\overline{E}$, ainsi définie :

$$\overline{E} = \frac{E}{m_0.c^2} = \alpha.\frac{c.dt}{ds}$$

La troisième signifie que la quantité $\gamma.r^2.\frac{d\theta}{ds}$ est, elle aussi, constante. C'est (à une constante multiplicative près) la conservation du moment cinétique. Nous noterons :

$$\mu = m_0.c.\gamma.r^2.\frac{d\theta}{ds}.$$

Cette quantité sera constante, à condition que la métrique soit à symétrie sphérique : $\frac{d\Phi}{d\theta} = 0$.

Nous utiliserons aussi le moment cinétique réduit $\overline{\mu}$, ainsi défini :

$$\overline{\mu} = \frac{\mu}{m_0} = \gamma.r^2.\frac{c.d\theta}{ds}.$$

Si nous notons $dy = r.d\theta$ un déplacement infinitésimal selon une direction transversale, perpendiculaire au rayon vecteur joignant le Soleil à la planète, alors on peut définir l'impulsion réduite de la planète, selon cette même direction, de la façon suivante :

$$\overline{p}_y = \gamma.\frac{c.dy}{ds}.$$

Le moment cinétique réduit est donné par :

$$\overline{\mu} = r.\overline{p}_y = r.\gamma.\frac{c.dy}{ds} = \gamma.r^2.\frac{c.d\theta}{ds},$$

avec $dy = r.d\theta$.

De la même façon, introduisons l'impulsion réduite selon la direction radiale :

$$\overline{p}_r = \beta.\frac{c.dr}{ds}.$$

Examinons maintenant la seconde équation des géodésiques :

$$-\frac{d}{ds}\left(\beta.\frac{dr}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{d\alpha}{dr} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{d\beta}{dr} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{d\left(\gamma.r^2\right)}{dr}\ ;$$

remplaçons $\beta.\frac{dr}{ds}$ par $c.\overline{p}_r$ et $d\theta$ par $\frac{dy}{r}$:

$$-\frac{d\overline{p}_r}{c.ds} = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{d\alpha}{dr} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{d\beta}{dr} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{r.ds}\right)^2.\left(r^2.\frac{d\gamma}{dr} + 2.\gamma.r\right)\ ;$$

$$-\frac{d\overline{p}_r}{c.ds} = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{d\alpha}{dr} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{d\beta}{dr} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\left(\frac{d\gamma}{dr} + 2.\frac{\gamma}{r}\right)\ ;$$

$$-\frac{d\overline{p}_r}{c.ds} = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{d\alpha}{dr} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{d\beta}{dr} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{d\gamma}{dr} - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\gamma}{r}\ ;$$

$$\frac{d\overline{p}_r}{c.ds} = -\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{d\alpha}{dr} - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{d\beta}{dr} - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{d\gamma}{dr}\right] + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\gamma}{r}.$$

Jusqu'ici, nous n'avons fait aucune hypothèse sur α, β et γ (fonctions de r, ou de Φ). Les équations obtenues sont très générales.

Faisons encore une petite remarque sur les liens entre le temps propre $d\tau = \frac{1}{c}.ds$ d'un mobile inertiel, se déplaçant sur une géodésique, et les évaluations qui en sont faites par l'observateur local : dt_{loc} et par l'observateur distant : $dt = dt_{dist}$.

On sait que :

$$ds^2 = c^2.d\tau^2 = c^2.dt_{loc}^2 - dl_{loc}^2 = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{dl_{loc}^2}{dt_{loc}^2}\right) = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\ ;$$

$$c.d\tau = c.dt_{loc}.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c.dt_{loc}}{ch\frac{w}{c}},\quad \text{donc :}$$

$$dt_{loc} = ch\frac{w}{c}.d\tau.$$

D'autre part :

$$dt_{loc} = \sqrt{\alpha}.dt_{dist}, \quad \text{donc :}$$

$$dt_{dist} = \frac{ch\frac{w}{c}}{\sqrt{\alpha}}.d\tau.$$

De plus :

$$\overline{E} = \alpha.\frac{c.dt_{dist}}{ds} = \alpha.\frac{dt_{dist}}{d\tau} = \alpha.\frac{ch\frac{w}{c}}{\sqrt{\alpha}} \;;$$

$$\overline{E} = \sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}.$$

Puisque $ch\frac{w}{c} = \frac{\overline{E}}{\sqrt{\alpha}}$, l'égalité précédente peut s'écrire :

$$dt_{dist} = \frac{\overline{E}}{\alpha}.d\tau.$$

Imaginons par exemple que l'observateur distant observe une planète tournant autour d'une étoile sur une orbite elliptique ($\overline{E} < 1, \quad \overline{E} = c^{te}$). Alors si $d\tau$ désigne la pérstriorde d'une horloge située sur la planète, pour l'observateur distant la période dt_{dist} de la même horloge va varier en fonction de α, donc en fonction du potentiel Φ.

De la même façon, nous pouvons comparer dl_{mob} (longueur d'une règle transportée par l'observateur mobile inertiel sur sa géodésique, orientée dans la direction du mouvement) avec dt_{loc} et dt_{dist}.

Les règles et horloges de ce mobile sont reliées à chaque instant avec celles des observateurs locaux qu'il croise sur son chemin ; ces liens s'expriment par la transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} c.dt_{loc} \\ dl_{loc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & sh\frac{w}{c} \\ sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c.dt_{mob} \\ dl_{mob} \end{pmatrix}.$$

Considérons la règle de longueur dl_{mob} transportée par le mobile, parallèle à son vecteur vitesse. Bien entendu, lorsque l'observateur mobile évalue la longueur de sa règle, il observe ses extrémités simultanément, selon sa simultanéité subjective, ce qui signifie que $dt_{mob} = 0$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} c.dt_{loc} \\ dl_{loc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & sh\frac{w}{c} \\ sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dl_{mob} \end{pmatrix} \;;$$

$$dl_{loc} = ch\frac{w}{c}.dl_{mob}.$$

Puisque $\overline{E} = \sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}$, on a : $ch\frac{w}{c} = \frac{\overline{E}}{\sqrt{\alpha}}$, donc :

$$dl_{loc} = \frac{\overline{E}}{\sqrt{\alpha}}.dl_{mob}.$$

D'autre part, nous voudrions comparer dl_{dist} avec dl_{loc}. Si l'orientation de la règle est radiale, on a : $dl_{loc} = \sqrt{\beta}.dl_{dist}$; si elle est tangentielle (perpendiculaire au rayon), on a : $dl_{loc} = \sqrt{\gamma}.dl_{dist}$.

Dans le cas d'une métrique isotrope ($\beta = \gamma$), et dans ce cas seulement, on a, dans la direction du mouvement : $dl_{loc} = \sqrt{\beta}.dl_{dist}$, donc $dl_{dist} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.dl_{loc}$; et par conséquent :

$$dl_{dist} = \frac{\overline{E}}{\sqrt{\alpha}.\sqrt{\beta}}.dl_{mob}.$$

Si, de plus, la métrique est symétrique ($\alpha.\beta = 1$), on obtient :

$$dl_{dist} = \overline{E}.dl_{mob}.$$

Si la règle transportée par le mobile est de longueur constante dans son propre repère ($dl_{mob} = c^{te}$), alors elle apparaîtra aussi de longueur constante dans le repère de l'observateur distant : $dl_{dist} = \overline{E}.dl_{mob} = c^{te}$.

Si, de plus, la trajectoire est une orbite d'évasion ($\overline{E} = 1$), alors :

$$dl_{dist} = dl_{mob}.$$

Dans ce cas, chaque règle transportée par le mobile, dans la direction, est évaluée de la même manière par les deux observateurs : l'observateur lié au mobile et l'observateur distant.

Revenons à l'exemple de l'observateur distant observant une planète en orbite elliptique autour d'une étoile ($\overline{E} < 1, \quad \overline{E} = c^{te}$). Alors la "longueur" de la planète (correspondant au diamètre mesuré parallèlement à son vecteur vitesse) sera constante pour l'observateur distant comme pour l'observateur mobile. Bien sûr il ne s'agit pas de la longueur apparente, qui est affectée par l'effet de perspective, mais de sa longueur "réelle" dans le repère distant. Supposons que l'énergie de cette planète diminue en raison de collisions ou de frottements. Alors elle va changer d'orbite, et sa "longueur" va être réduite proportionnellement à son énergie.

Mais nous parlons déjà d'un cas particulier, puisque ceci n'est vrai que pour les métriques isotropes et symétriques.

12 Cas particuliers

La dernière équation des géodésiques ne peut se simplifier que dans certains cas particuliers.

Si la métrique est isotrope ($\beta = \gamma$), elle devient (en posant $dl^2 = dr^2 + dy^2$) :

$$\frac{d\overline{p}_r}{c.ds} = -\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{d\alpha}{dr} - \left(\frac{dl}{ds}\right)^2.\frac{d\beta}{dr}\right] + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\beta}{r}.$$

Comme $c.dt = c.dt_{dist} = \frac{c.dt_{loc}}{\sqrt{\alpha}}$ et $dl = dl_{dist} = \frac{dl_{loc}}{\sqrt{\beta}}$, on obtient :

$$\frac{d\overline{p}_r}{c.ds} = -\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{c.dt_{loc}}{ds}\right)^2.\frac{d\alpha}{\alpha.dr} - \left(\frac{dl_{loc}}{ds}\right)^2.\frac{d\beta}{\beta.dr}\right] + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\beta}{r}.$$

Supposons que la métrique soit, en plus, symétrique : $\alpha.\beta = 1$. On a alors : $d(\alpha.\beta) = \alpha.d\beta + \beta.d\alpha = 0$, donc $\frac{d\beta}{\beta} = -\frac{d\alpha}{\alpha}$; l'équation devient :

$$\frac{d\overline{p}_r}{c.ds} = -\frac{1}{2}.\frac{d\alpha}{\alpha.dr}.\left[\left(\frac{c.dt_{loc}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dl_{loc}}{ds}\right)^2\right] + \frac{dy^2}{ds^2}.\frac{\beta}{r}.$$

Remarquons que $c^2.dt_{loc}^2 + dl_{loc}^2 = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 + \frac{dl_{loc}^2}{c^2.dt_{loc}^2}\right) = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$ et que $ds^2 = c^2.dt_{loc}^2 - dl_{loc}^2 = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$; d'où la simplification :

$$\frac{d\overline{p}_r}{c.ds} = -\frac{1}{2}.\frac{d\alpha}{\alpha.dr}.\frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{dy^2}{ds^2}.\frac{\beta}{r}.$$

Le dernier terme : $\frac{dy^2}{ds^2}.\frac{\beta}{r}$ est associé à l'accélération centrifuge.

Nous savons que $dy_{loc} = \sqrt{\beta}.dy_{dist} = \sqrt{\beta}.dy$; donc $dy^2.\beta = dy_{loc}^2$; d'autre part, $ds^2 = c^2.dt_{loc}^2 - dl_{loc}^2 = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{dl_{loc}^2}{c^2.dt_{loc}^2}\right) = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{c^2.dt_{loc}^2}{ch^2\frac{w}{c}}$ et $ds = \frac{c.dt_{loc}}{ch\frac{w}{c}} = \frac{\sqrt{\alpha}.c.dt}{ch\frac{w}{c}}$; donc l'accélération centrifuge s'écrit :

$$\frac{dy^2}{ds^2}.\frac{\beta}{r} = \frac{dy_{loc}^2.ch^2\frac{w}{c}}{c^2.dt_{loc}^2.r} = \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{ch^2\frac{w}{c}}{r} \;;$$

l'équation devient donc :

$$\frac{ch\frac{w}{c}.d\overline{p}_r}{\sqrt{\alpha}.c^2.dt} = -\frac{1}{2}.\frac{d\alpha}{\alpha.dr}.\frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{ch^2\frac{w}{c}}{r} \;;$$

$$\frac{d\overline{p}_r}{dt} = -\frac{c^2.\sqrt{\alpha}}{ch\frac{w}{c}}.\left[\frac{1}{2}.\frac{d\alpha}{\alpha.dr}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).ch^2\frac{w}{c} - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{ch^2\frac{w}{c}}{r}\right] \;;$$

$$\frac{d\overline{p}_r}{dt} = -c^2.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}.\left[\frac{1}{2}.\frac{d\alpha}{\alpha.dr}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{1}{r}\right].$$

Multiplions les deux membres par m_0 pour passer de $\overline{p}_r$ à p_r :

$$\frac{dp_r}{dt} = -m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}.\left[\frac{1}{2}.\frac{d\alpha}{\alpha.dr}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{1}{r}\right].$$

Rappelons que $m_0.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = m_{dist}$ (masse de la planète évaluée par l'observateur distant).

$$\frac{dp_r}{dt} = -m_{dist}.c^2.\left[\frac{1}{2}.\frac{d\alpha}{\alpha.dr}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{1}{r}\right] \ ;$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -m_{dist}.c^2.\frac{d\alpha}{2.\alpha.dr}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{m_{dist}.v_y^2}{r}.$$

Dans cette formule, $\frac{m_{dist}.v_y^2}{r}$ correspond à la "force" centrifuge ; elle s'exprime ici exactement comme dans la gravitation newtonienne, mais la masse m est évaluée par l'observateur distant, tandis que la vitesse v_y est une vitesse locale.

D'autre part, $-m_{dist}.c^2.\frac{d\alpha}{2.\alpha.dr}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$ correspond à la force gravitationnelle de la théorie de Newton, qui s'exprime ainsi : $-\frac{G.M.m}{r^2}$. Cherchons à savoir si ces deux expressions peuvent se rapprocher, au moins quand $v << c$.

Comme le facteur $\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$ tend vers 1 quand $\frac{v}{c}$ tend vers 0, négligeons-le. Sa signification sera analysée plus loin. Nous voulons savoir si on peut avoir :

$$-m_{dist}.c^2.\frac{d\alpha}{2.\alpha.dr} = -\frac{G.M.m_{dist}}{r^2} \ ;$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{2.G.M}{c^2}.\frac{dr}{r^2} \ ;$$

$$d(Log\alpha) = \frac{2.G.M}{c^2}.d\left(-\frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$Log\alpha = -\frac{2.G.M}{r.c^2} + cte.$$

Comme α tend vers 1, et $Log\ \alpha$ vers 0, quand r tend vers l'infini, la constante est nécessairement nulle. On a donc :

$$\alpha = e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}} = e^{-\frac{2.k}{r}}.$$

Ceci signifie que la métrique doit être pré-relativiste.

Rappelons que notre raisonnement s'appuie sur deux hypothèses : la métrique doit être isotrope ($\beta = \gamma$) et symétrique ($\alpha.\beta = 1$). Dans ces conditions, nous constatons que, pour avoir une convergence raisonnable avec la théorie de Newton pour de faibles valeurs de la vitesse, la métrique doit être, en plus, pré-relativiste.

La métrique est alors celle de Ni.

Prenons donc $\alpha = e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}} = e^{-\frac{2.k}{r}} = e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}$; on a alors $d\alpha = \frac{2.d\Phi}{c^2}.e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}$ et $\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{2.d\Phi}{c^2}$. En faisant la substitution dans la formule précédente, on obtient :

$$\frac{dp_r}{dt} = -m_{dist}.\frac{d\Phi}{dr}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{m_{dist}.v_y^2}{r}.$$

On peut s'intéresser aussi à la composante $\overline{p}_y$ de l'impulsion. Nous avons vu que $\overline{\mu} = r.\overline{p}_y = c^{te}$, donc $\overline{p}_y = \frac{\overline{\mu}}{r}$, ce qui entraîne :

$$\frac{d\overline{p}_y}{dt} = -\frac{\overline{\mu}}{r^2}.\frac{dr}{dt} = -\frac{\overline{\mu}}{r^2}.v_{rdist} = -\frac{\overline{\mu}}{r^2}.\alpha.v_r.$$

13 Géodésiques en coordonnées localement cartésiennes

Il est très étonnant de voir que les théories de la gravitation de Newton et d'Einstein, basées sur des concepts totalement étrangers, donnent des résultats qui se rapprochent d'une manière spectaculaire. Essayons de voir jusqu'à quel point ce rapprochement entre les théories basées sur les géodésiques et la théorie de Newton, qui donne le premier rôle à l'accélération centrale, peut être poussé.

Jusqu'ici, nous avons utilisé des coordonnées polaires, qui sont bien adaptées pour étudier le champ à symétrie sphérique produit par un corps isolé dans l'espace. Mais il s'agit de conditions particulières qui ne seront pas toujours réalisées. Nous considérons maintenant un champ quelconque (et non à symétrie sphérique), et nous souhaitons étudier ce que deviennent les équations précédentes dans un repère localement cartésien ; l'avantage de cette approche est de nous dégager de l'accélération centrifuge (un artefact lié aux coordonnées polaires). Pour se fixer les idées, on pourra imaginer qu'on étudie ce que devient une métrique à symétrie sphérique suffisamment loin du centre pour que les distorsions dues à la courbure soient très atténuées. Mais, attention : c'est une simplification qui peut nous induire en erreur ; c'est le modèle précédent, avec les coordonnées polaires, qui doit rester la référence pour les métriques à symétrie sphérique.

Reprenons la même métrique générale (dans laquelle nous avions supprimé la troisième dimension spatiale) :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.d\theta^2,$$

dans laquelle α, β et γ sont des fonctions de r, ou, si on préfère, du potentiel Φ.

Ecrivons-la sous la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dx^2 - \gamma.dy^2.$$

Nous avons donc remplacé dr par dx (déplacement selon l'axe radial) et $r.d\theta$ par dy (déplacement perpendiculaire à l'axe radial).

Les équations des géodésiques s'écrivent :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d}{ds}\left(\alpha.\frac{c.dt}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dx}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\partial\gamma}{c.\partial t}\ ; \\ \\ 2)\ -\frac{d}{ds}\left(\beta.\frac{dx}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dx}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\partial\gamma}{\partial x}\ ; \\ \\ 3)\ -\frac{d}{ds}\left(\gamma.\frac{dy}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dx}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\partial\gamma}{\partial y}. \end{cases}$$

Nous allons remplacer $\alpha.\frac{c.dt}{ds}$ par $\overline{E}$, $\beta.\frac{dx}{ds}$ par $\frac{\overline{p}_x}{c}$ et $\gamma.\frac{dy}{ds}$ par $\frac{\overline{p}_y}{c}$.

Donnons quelques précisions sur l'impulsion :

$$\frac{\overline{p}_x}{c} = \beta.\frac{dx_{dist}}{ds} = \beta.\frac{dx_{dist}}{\sqrt{c^2.dt_{loc}^2 - dx_{loc}^2 - dy_{loc}^2}} = \beta.\frac{dx_{dist}}{\sqrt{c^2.dt_{loc}^2 - dl_{loc}^2}}\ ;$$

$$\frac{\overline{p}_x}{c} = \beta.\frac{dx_{dist}}{c.dt_{loc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \beta.\frac{\frac{dx_{loc}}{\sqrt{\beta}}}{c.dt_{loc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\beta}.ch\frac{w}{c}.\frac{v_x}{c};$$

$$p_x = m_0.\overline{p}_x = m_0.c.\sqrt{\beta}.ch\frac{w}{c}.\frac{v_x}{c}\ ;$$

$$p_x = m_0.\sqrt{\beta}.ch\frac{w}{c}.v_x.$$

C'est la composante de l'impulsion parallèle à l'axe des x (c'est-à-dire au rayon vecteur joignant le "Soleil" à la "planète").

De même :

$$\overline{p}_y = \sqrt{\gamma}.ch\frac{w}{c}.v_y;$$

$$p_y = m_0.\sqrt{\gamma}.ch\frac{w}{c}.v_y.$$

C'est la composante de l'impulsion perpendiculaire à ce rayon vecteur.

On aura compris que les vitesses v, v_x, v_y, comme la rapidité w, sont évaluées localement.

Jusqu'ici, notre calcul s'applique à toutes les métriques vérifiant : $ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dx^2 - \gamma.dy^2$. Nous n'avons fait aucune hypothèse complémentaire.

Mais on peut déjà remarquer que, pour une métrique isotrope ($\beta = \gamma$), l'impulsion vectorielle s'exprime ainsi :

$$c.\vec{p} = m_0.c^2.\sqrt{\beta}.ch\frac{w}{c}.\frac{\vec{v}}{c} = m_0.c^2.\sqrt{\beta}.sh\frac{\vec{w}}{c}.$$

Bien entendu, rien ne prouve que, dans la réalité, on ait effectivement $\beta = \gamma$; mais cette condition est nécessaire si on souhaite que l'impulsion $\vec{p}$ possède une véritable signification physique simple, comme l'énergie E, en lien avec le potentiel Φ. Nous reparlerons de ce cas particulier plus loin ; continuons à développer le cas général.

Dans la section sur les géodésiques en coordonnées polaires, nous avons vu apparaître le moment cinétique : $\overline{\mu} = \gamma.r^2.\frac{d\theta}{c.ds}$. On peut remarquer que $r.d\theta = dy_{dist}$; on a donc : $\overline{\mu} = \gamma.r^2.\frac{d\theta}{c.ds} = r.\left(\gamma.\frac{dy_{dist}}{c.ds}\right) = r.\overline{p_y}$.

Revenons aux équations des géodésiques :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d\overline{E}}{ds} = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dx}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\partial\gamma}{c.\partial t}\ ; \\ 2)\ -\frac{d\overline{p}_x}{c.ds} = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dx}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\partial\gamma}{\partial x}\ ; \\ 3)\ -\frac{d\overline{p}_y}{c.ds} = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dx}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\frac{\partial\gamma}{\partial y}. \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de chaque égalité par $\frac{ds}{c.dt}$:

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d\overline{E}}{c.dt} = \frac{1}{2}.\frac{c.dt}{ds}.\frac{\partial\alpha}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\frac{dx}{ds}.\frac{dx}{c.dt}.\frac{\partial\beta}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\frac{dy}{ds}.\frac{dy}{c.dt}.\frac{\partial\gamma}{c.\partial t}\ ; \\ 2)\ -\frac{d\overline{p}_x}{c^2.dt} = \frac{1}{2}.\frac{c.dt}{ds}.\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{1}{2}.\frac{dx}{ds}.\frac{dx}{c.dt}.\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{1}{2}.\frac{dy}{ds}.\frac{dy}{c.dt}.\frac{\partial\gamma}{\partial x}\ ; \\ 3)\ -\frac{d\overline{p}_y}{c^2.dt} = \frac{1}{2}.\frac{c.dt}{ds}.\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{1}{2}.\frac{dx}{ds}.\frac{dx}{c.dt}.\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{1}{2}.\frac{dy}{ds}.\frac{dy}{c.dt}.\frac{\partial\gamma}{\partial y}. \end{cases}$$

En supposant que α, β et γ soient des fonctions du potentiel Φ, on peut remplacer $\frac{\partial\alpha}{c.\partial t}$ par $\frac{d\alpha}{d\Phi}.\frac{\partial\Phi}{c.\partial t}$, et de même pour les autres dérivées partielles :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d\overline{E}}{c.dt} = \left[\frac{1}{2}.\frac{c.dt}{ds}.\frac{d\alpha}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dx}{ds}.\frac{dx}{c.dt}.\frac{d\beta}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dy}{ds}.\frac{dy}{c.dt}.\frac{d\gamma}{d\Phi}\right].\frac{\partial\Phi}{c.\partial t}\ ; \\ 2)\ \frac{d\overline{p}_x}{c^2.dt} = -\left[\frac{1}{2}.\frac{c.dt}{ds}.\frac{d\alpha}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dx}{ds}.\frac{dx}{c.dt}.\frac{d\beta}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dy}{ds}.\frac{dy}{c.dt}.\frac{d\gamma}{d\Phi}\right].\frac{\partial\Phi}{\partial x}\ ; \\ 3)\ \frac{d\overline{p}_y}{c^2.dt} = -\left[\frac{1}{2}.\frac{c.dt}{ds}.\frac{d\alpha}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dx}{ds}.\frac{dx}{c.dt}.\frac{d\beta}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dy}{ds}.\frac{dy}{c.dt}.\frac{d\gamma}{d\Phi}\right].\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \end{cases}$$

Posons :

$$\lambda = \frac{1}{2}.\frac{c.dt}{ds}.\frac{d\alpha}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dx}{ds}.\frac{dx}{c.dt}.\frac{d\beta}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dy}{ds}.\frac{dy}{c.dt}.\frac{d\gamma}{d\Phi}.$$

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d\overline{E}}{c.dt} = \lambda.\frac{\partial\Phi}{c.\partial t}\ ; \\ \\ 2)\ \frac{d\overline{p}_x}{c^2.dt} = -\lambda.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\ ; \\ \\ 3)\ \frac{d\overline{p}_y}{c^2.dt} = -\lambda.\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \end{cases}$$

Nous savons que $E = m_0.c^2.\overline{E}$ et que $\vec{p} = m_0.\vec{\overline{p}}$. Ceci nous conduit à :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{dE}{c.dt} = m_0.c^2.\lambda.\frac{\partial\Phi}{c.\partial t}\ ; \\ \\ 2)\ \frac{c.dp_x}{c.dt} = -m_0.c^2.\lambda.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\ ; \\ \\ 3)\ \frac{c.dp_y}{c.dt} = -m_0.c^2.\lambda.\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \end{cases}$$

$$\frac{d}{c.dt}\begin{pmatrix} E \\ \\ c.p_x \\ \\ c.p_y \\ \\ c.p_z \end{pmatrix} = m_0.c^2.\lambda.\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{c.\partial t} \\ \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix},$$

ce qu'on peut simplifier ainsi :

$$\frac{d}{c.dt}\begin{pmatrix} E \\ \\ c.\vec{p} \end{pmatrix} = m_0.c^2.\lambda.\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{c.\partial t} \\ \\ -\vec{\bigtriangledown}\Phi \end{pmatrix},$$

où le nabla $\vec{\bigtriangledown}$ désigne le gradient tridimensionnel (purement spatial).

Comme le vecteur gradient, dans un domaine infinitésimal, pointe dans une direction déterminée, on peut adapter les axes de coordonnées pour que l'axe des x soit dirigé selon ce gradient ; on aura alors :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d\overline{E}}{c.dt} = \lambda.\frac{\partial\Phi}{c.\partial t}\ ; \\ \\ 2)\ \frac{c.d\overline{p}_x}{c.dt} = -\lambda.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\ ; \\ \\ 3)\ \frac{c.d\overline{p}_y}{c.dt} = 0\ ; \\ \\ 4)\ \frac{c.d\overline{p}_y}{c.dt} = 0. \end{cases}$$

On voit donc que le coefficient λ ne concerne que les deux premières lignes : l'énergie et la composante de l'impulsion dirigée selon le gradient (la ligne de plus forte pente).

On peut aussi définir le nabla quadridimensionnel comme le quadrigradient signé :

$$\vec{\bigtriangledown} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{c.\partial t} \\ \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \; ;$$

dans ce cas, on pourra écrire :

$$\frac{d}{c.dt} \begin{pmatrix} E \\ \\ c.\vec{p} \end{pmatrix} = -m_0.c^2.\lambda.\vec{\bigtriangledown}\Phi.$$

On peut considérer que l'énergie et l'impulsion caractérisent la trajectoire d'une particule-test observée par l'observateur distant. L'énergie, l'impulsion, les durées et les longueurs sont toutes évaluées par cet observateur, mais elles pourraient tout aussi bien être évaluées par n'importe quel autre observateur immobile.

La formule que nous avons obtenue est, à première vue, d'une grande simplicité ; elle ressemble beaucoup à celle de la gravitation newtonienne. Tous les problèmes viennent du facteur λ, qui n'est pas une constante !

Si la métrique est à symétrie sphérique, on a $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$ (car dy et dz sont perpendiculaires au rayon vecteur reliant le "Soleil" à la "planète"), donc $\frac{d\overline{p}_y}{c.dt} = 0$ et $\frac{d\overline{p}_z}{c.dt} = 0$.

Si la métrique est indépendante du temps, on a : $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$, donc $\frac{dE}{dt} = 0$.

Etudions la quantité :

$$\lambda = \frac{1}{2}.\frac{c.dt}{ds}.\frac{d\alpha}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dx}{ds}.\frac{dx}{c.dt}.\frac{d\beta}{d\Phi} - \frac{1}{2}.\frac{dy}{ds}.\frac{dy}{c.dt}.\frac{d\gamma}{d\Phi}.$$

Dans cette expression, dt, dx et dy sont évalués par l'observateur distant. Adaptons-la à l'observateur local :

$dt = dt_{dist} = \frac{dt_{loc}}{\sqrt{\alpha}}$, $dx = dx_{dist} = \frac{dx_{loc}}{\sqrt{\beta}}$, $dy = dy_{dist} = \frac{dy_{loc}}{\sqrt{\gamma}}$, donc :

$$\lambda = \frac{1}{2.\sqrt{\alpha}}.\frac{c.dt_{loc}}{ds}.\frac{d\alpha}{d\Phi} - \frac{\sqrt{\alpha}}{2.\beta}.\frac{dx_{loc}}{ds}.\frac{dx_{loc}}{c.dt_{loc}}.\frac{d\beta}{d\Phi} - \frac{\sqrt{\alpha}}{2.\gamma}.\frac{dy_{loc}}{ds}.\frac{dy_{loc}}{c.dt_{loc}}.\frac{d\gamma}{d\Phi}.$$

On sait que $ds = \sqrt{c^2.dt_{loc}^2 - dx_{loc}^2 - dy_{loc}^2} = \sqrt{c^2.dt_{loc}^2 - dl_{loc}^2}$;

$$ds = c.dt_{loc}.\sqrt{1 - \frac{dl_{loc}^2}{c^2.dt_{loc}^2}} = c.dt_{loc}.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c.dt_{loc}}{ch\frac{w}{c}}.$$

Faisons la substitution :

$$\lambda = \frac{1}{2.\sqrt{\alpha}}.ch\frac{w}{c}.\frac{d\alpha}{d\Phi} - \frac{\sqrt{\alpha}}{2.\beta}.ch\frac{w}{c}.\left(\frac{dx_{loc}}{c.dt_{loc}}\right)^2.\frac{d\beta}{d\Phi} - \frac{\sqrt{\alpha}}{2.\gamma}.ch\frac{w}{c}.\left(\frac{dy_{loc}}{c.dt_{loc}}\right)^2.\frac{d\gamma}{d\Phi}\ ;$$

$$\lambda = \frac{1}{2}.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}.\left[\frac{d\alpha}{\alpha.d\Phi} - \frac{v_x^2}{c^2}.\frac{d\beta}{\beta.d\Phi} - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{d\gamma}{\gamma.d\Phi}\right]\ ;$$

$$\lambda = \frac{1}{2}.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}.\left[\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} - \frac{v_x^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \beta)}{d\Phi} - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \gamma)}{d\Phi}\right].$$

On a donc :

$$m_0.c^2.\lambda = m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}.\frac{1}{2}.\left[\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} - \frac{v_x^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \beta)}{d\Phi} - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \gamma)}{d\Phi}\right]\ ;$$

$$m_0.c^2.\lambda = m_{dist}.\frac{c^2}{2}.\left[\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} - \frac{v_x^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \beta)}{d\Phi} - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \gamma)}{d\Phi}\right]\ ;$$

$$\frac{d}{c.dt}\begin{pmatrix} E \\ \\ c\ p_x \\ \\ c\ p_y \end{pmatrix} = m_{dist}.\frac{c^2}{2}.\left[\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} - \frac{v_x^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \beta)}{d\Phi} - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \gamma)}{d\Phi}\right].\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{c.\partial t} \\ \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d}{c.dt}\begin{pmatrix} E \\ \\ c.\vec{p} \end{pmatrix} = m_{dist}.\frac{c^2}{2}.\left[\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} - \frac{v_x^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \beta)}{d\Phi} - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \gamma)}{d\Phi}\right].\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{c.\partial t} \\ \\ -\vec{\bigtriangledown}\Phi \end{pmatrix}.$$

Comme nous étudions dans ce document les métriques statiques, diagonalisables, à symétrie sphérique, nous admettrons (provisoirement) que $\frac{\partial\Phi}{c.\partial t} = 0$. La formule ci-dessus s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{dE}{c.dt} = 0\ ; \\ \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = -m_{dist}.\frac{c^2}{2}.\left[\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} - \frac{v_x^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \beta)}{d\Phi} - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \gamma)}{d\Phi}\right].\vec{\bigtriangledown}\Phi. \end{cases}$$

Ces formules sont très générales. En particulier, pour l'observateur distant (ou tout autre observateur immobile), la dérivée de l'impulsion de la particule-test par rapport au temps est toujours proportionnelle au gradient du potentiel (pour toutes les métriques à symétrie sphérique diagonalisables). Mais le coefficient de proportionnalité n'est pas une constante, et il dépend de la métrique.

14 Cas particuliers

Nous sommes partis d'une métrique diagonalisable, nous avons étudié les géodésiques qui en résultent (étudiées dans le repère d'un observateur distant), et maintenant nous cherchons à savoir dans quelle mesure les trajectoires ainsi définies peuvent être considérées comme découlant d'une accélération (ou pseudo-accélération) dérivant du potentiel Φ.

Nous voyons un obstacle : la variation de l'impulsion $\frac{d\vec{p}}{dt}$ dépend de l'orientation de la vitesse $\vec{v}$ du mobile, puisque les composantes v_x et v_y sont affectées de coefficients différents. Ceci signifie que l'accélération subie par une particule-test va dépendre de l'orientation de son vecteur vitesse. Pour corriger cette anomalie, nous devons faire en sorte que les coefficients soient égaux ; pour que cette condition soit réalisée, on doit nécessairement avoir : $\beta = \gamma$, donc la métrique doit être isotrope. C'est ce que nous avons déjà dit précédemment. Dans la suite, cette condition sera supposée réalisée.

En posant : $v_x^2 + v_y^2 = v^2$, nous pouvons donc écrire :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -m_{dist}.\frac{c^2}{2}.\left[\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} - \frac{v^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \beta)}{d\Phi}\right].\vec{\bigtriangledown}\Phi.$$

Nous venons de voir que la première condition pour rapprocher une théorie de la gravitation basée sur la métrique de l'espace-temps (telle que nous l'avons présentée) d'une théorie basée sur une accélération dérivant d'un potentiel est de choisir une métrique isotrope ($\beta = \gamma$). Mais nous voudrions aller plus loin. Cherchons à savoir si cette formule peut admettre d'autres simplifications.

Pour commencer, peut-on faire disparaître le terme en $\frac{v^2}{c^2}$? Pour cela, il faudrait que β soit une constante ; comme $\beta \to 1$ à l'infini, cette constante ne peut être que 1.

Peut-on avoir, de plus, $\frac{c^2}{2}.\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} = 1$? Pour cela, on doit avoir : $d(Log\ \alpha) = \frac{2.d\Phi}{c^2}$, ce qui entraîne : $Log(\alpha) = \frac{2.\Phi}{c^2} + k$, et $\alpha = e^{\frac{2.\Phi}{c^2}+k} = K.e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}$.

La constante K doit être égale à 1, car α doit tendre vers 1 quand Φ tend vers 0.

La métrique serait alors définie par : $\alpha = e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}$, et $\beta = \gamma = 1$.

C'est une métrique pré-relativiste, isotrope et homogène.

Malheureusement, d'après le formalisme post-newtonien paramétrisé, cette métrique ne remplit pas toutes les conditions pour passer les principaux tests classiques de la gravitation. Ce qui réduit beaucoup son intérêt !

Le formalisme post-newtonien paramétrisé sera présenté à la fin de ce document.

Il n'existe donc aucune métrique de la forme $ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dx^2 - \gamma.dy^2$ qui puisse être interprétée rigoureusement (dans le repère de l'observateur distant) en termes de force (ou d'accélération, au sens classique) dérivant d'un potentiel, comme c'est le cas dans la théorie de Newton. Il y a nécessairement une différence quelque-part...

Théorème

Considérons une métrique à symétrie sphérique de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.(dy^2 + dz^2),$$

où α, β et γ sont des fonctions du potentiel newtonien $\Phi = -\frac{G.M}{r}$.

Alors, quelles que soient les trois fonctions α, β et γ, la métrique (supposée éligible, c'est-à-dire compatible avec la limite newtonienne et avec les grands tests classiques) ne pourra en aucun cas respecter la règle suivante :

$$\frac{d}{c.dt}\begin{pmatrix} E \\ c\ p_x \\ c\ p_y \\ c\ p_z \end{pmatrix} = m_{dist}.\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{c.\partial t} \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Si elle avait été vraie, cette égalité aurait été bien commode, car les quantités figurant dans les deux membres sont lorentziennes, ce qui aurait permis des changements de repères particulièrement faciles, comme en relativité restreinte. Mais elle est fausse ! On pouvait s'y attendre, car la courbure de l'espace-temps par la gravité introduit nécessairement une distorsion par rapport à la relativité restreinte.

Nous allons donc nous poser maintenant cette autre question : l'égalité que nous avons obtenue pourrait-elle traduire l'action d'une pseudo-force (ou pseudo-accélération) dérivant d'un potentiel ?

Si nous choisissons une métrique symétrique ($\alpha.\beta = 1$), nous aurons $Log\ \alpha + Log\ \beta = 0$, donc $d(Log\ \beta) = -d(Log\ \alpha)$, et, par conséquent :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -m_{dist}.\frac{c^2}{2}.\left[\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} + \frac{v^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi}\right].\vec{\nabla}\Phi\ ;$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -m_{dist}.\frac{c^2}{2}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi}.\vec{\bigtriangledown}\Phi.$$

Si, de plus, la métrique est pré-relativiste ($\alpha = e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}$) alors $\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} = \frac{2}{c^2}$, donc :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -m_{dist}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).\vec{\bigtriangledown}\Phi.$$

La métrique considérée est alors celle de Ni.

On peut préciser la valeur de λ pour cette métrique. On a $\alpha = e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}$, donc $Log\ \alpha = \frac{2.\Phi}{c^2}$, $\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} = \frac{2}{c^2}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{\alpha}$, donc $Log\ \beta = Log\ \gamma = -Log\ \alpha = -\frac{2.\Phi}{c^2}$, $\frac{d(Log\ \beta)}{d\Phi} = \frac{d(Log\ \gamma)}{d\Phi} = -\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} = -\frac{2}{c^2}$; substituons dans la dernière expression de λ :

$$\lambda = \frac{1}{2}.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}.\left[\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi} - \frac{v_x^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \beta)}{d\Phi} - \frac{v_y^2}{c^2}.\frac{d(Log\ \gamma)}{d\Phi}\right] \ ;$$

$$\lambda = \frac{1}{2}.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}.\frac{d(Log\ \alpha)}{d\Phi}.\left[1+\frac{v_x^2}{c^2}+\frac{v_y^2}{c^2}\right] = \frac{1}{2}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.ch\frac{w}{c}.\frac{2}{c^2}.\left[1+\frac{v^2}{c^2}\right] \ ;$$

$$\lambda = \frac{1}{c^2}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.ch\frac{w}{c}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).$$

En reportant dans l'expression matricielle des géodésiques, on obtient :

$$\frac{d}{c.dt}\begin{pmatrix} E \\ c.p_x \\ c.p_y \\ c.p_z \end{pmatrix} = m_0.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.ch\frac{w}{c}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{c.\partial t} \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \ ;$$

$$\frac{d}{c.dt}\begin{pmatrix} E \\ c.p_x \\ c.p_y \\ c.p_z \end{pmatrix} = m_{dist}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{c.\partial t} \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \ ;$$

Si on se limite à l'impulsion, on peut remarquer que :

$$m_{dist}.\vec{\bigtriangledown}\Phi = m_0.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_{dist}} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_{dist}} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z_{dist}} \end{pmatrix} = m_0.ch\frac{w}{c}.\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.\partial x_{dist}} \\ \frac{\partial\Phi}{e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.\partial y_{dist}} \\ \frac{\partial\Phi}{e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.\partial z_{dist}} \end{pmatrix} \ ;$$

$$m_{dist}.\vec{\bigtriangledown}\Phi = m_0.ch\frac{w}{c}.\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_{loc}} \\ \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y_{loc}} \\ \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z_{loc}} \end{pmatrix} = m_{loc}.\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi.$$

On note $m_{loc} = m_0.ch\frac{w}{c}$ (masse maupertusienne locale), et $\vec{\bigtriangledown}_{dist} = \vec{\bigtriangledown}$ (gradient évalué par l'observateur distant).

Rappelons-nous ces formules de changement de potentiel : $dp_{dist} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.dp_{loc}$ et $dt_{dist} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.dt_{loc}$; elles entraînent que $\frac{dp_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{dp_{loc}}{dt_{loc}}$; donc $\vec{F}_{dist} = \vec{F}_{loc}$.

Finalement :

$$\frac{d\vec{p}_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{d\vec{p}_{loc}}{dt_{loc}} = -m_{dist}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).\vec{\bigtriangledown}_{dist}\Phi = -m_{loc}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi \ ;$$

$$\frac{d\vec{p}_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{d\vec{p}_{loc}}{dt_{loc}} = -m_0.ch\frac{w}{c}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi \ ;$$

$$\frac{d\overline{\vec{p}}}{dt} = -ch\frac{w}{c}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi.$$

Le facteur $\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$ peut surprendre. Pourtant, il ne peut pas être éliminé. D'ailleurs, nous l'avons déjà rencontré dans le modèle à symétrie sphérique, en coordonnées polaires. Quelle est sa signification ?

Pour l'expliquer, reprenons les égalités :

$$\begin{cases} E = m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = m_0.c^2.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.ch\frac{w}{c} \ ; \\ \\ c.\vec{p} = m_0.c^2.\sqrt{\beta}.sh\frac{\vec{w}}{c} = m_0.c^2.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.sh\frac{\vec{w}}{c}, \end{cases}$$

qu'on peut écrire aussi :

$$\begin{cases} \overline{E} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}.ch\frac{w}{c} \ ; \\ \\ \overline{\vec{p}} = c.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.sh\frac{\vec{w}}{c}. \end{cases}$$

Nous allons différencier ces deux égalités ;

$$\begin{cases} d\overline{E} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}.d\left(ch\frac{w}{c}\right) + ch\frac{w}{c}.d\left(e^{\frac{\Phi}{c^2}}\right) \ ; \\ \\ d\overline{\vec{p}} = c.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) + c.sh\frac{\vec{w}}{c}.d\left(e^{-\frac{\Phi}{c^2}}\right). \end{cases}$$

Nous notons $d\vec{w}$ la variation vectorielle de $\vec{w}$, dw_1 sa composante longitudinale (parallèle à $\vec{w}$) et dw_2 sa composante transverse (perpendiculaire à $\vec{w}$).

On a alors :

$$d\left(ch\frac{w}{c}\right) = sh\frac{w}{c}.d\frac{w_1}{c} = sh\frac{\vec{w}}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c} \ ;$$

$$d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) = ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c} + d\frac{\vec{w}_2}{c}$$

(voir la section su l'éspace des impulsions, dans le document sur les vitesses en relativité restreinte) ; il s'ensuit que :

$$\begin{cases} d\overline{E} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}.\left(sh\frac{\vec{w}}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c}\right) + ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.d\frac{\Phi}{c^2} \ ; \\ d\vec{\overline{p}} = c.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.\left(ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c} + d\frac{\vec{w}_2}{c}\right) - c.sh\frac{\vec{w}}{c}.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.d\frac{\Phi}{c^2} \ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\overline{E} = ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}.\left(\frac{\vec{v}}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c} + d\frac{\Phi}{c^2}\right) \ ; \\ d\vec{\overline{p}} = c.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.\left(ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c} + d\frac{\vec{w}_2}{c} - sh\frac{\vec{w}}{c}.d\frac{\Phi}{c^2}\right). \end{cases}$$

Nous savons que dans le contexte d'un champ gravitationnel statique l'énergie de la particule-test est constante, donc $d\overline{E} = 0$, ce qui entraîne :

$$d\frac{\Phi}{c^2} = -\frac{\vec{v}}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c}.$$

Reprenons l'expression de $d\vec{\overline{p}}$ et remplaçons $d\frac{\Phi}{c^2}$ par $-\frac{\vec{v}}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c}$:

$$d\vec{\overline{p}} = c.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.\left(ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c} + d\frac{\vec{w}_2}{c} + sh\frac{\vec{w}}{c}.\left(\frac{\vec{v}}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c}\right)\right).$$

Comme $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $d\vec{w}_1$ sont parallèmes, on a : $sh\frac{\vec{w}}{c}.\left(\frac{\vec{v}}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c}\right) = \frac{v^2}{c^2}.ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c}$, donc :

$$d\vec{\overline{p}} = c.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.\left(ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c} + d\frac{\vec{w}_2}{c} + \frac{v^2}{c^2}.ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c}\right) \ ;$$

$$d\vec{\overline{p}} = c.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.\left[\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w}_1}{c} + d\frac{\vec{w}_2}{c}\right].$$

Divisons les deux membres par $dt = dt_{dist} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.dt_{loc}$:

$$\frac{d\vec{\overline{p}}}{dt} = \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right).ch\frac{w}{c}.\frac{d\vec{w}_1}{dt_{loc}} + \frac{d\vec{w}_2}{dt_{loc}} \ ;$$

$$\frac{d\vec{\overline{p}}}{dt} = \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{d\vec{w}_1}{dt_{loc}} + \frac{d\vec{w}_2}{dt_{loc}}.$$

On peut faire plusieurs remarques sur cette formule. D'abord, le potentiel n'intervient pas : on a $\frac{d\vec{\overline{p}}}{dt} = \frac{d\vec{\overline{p}}_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{d\vec{\overline{p}}_{loc}}{dt_{loc}}$. Donc la force est invariante : elle se calcule de la même façon dans tous les repères immobiles.

Le facteur $ch\frac{w}{c}$ ne doit pas nous étonner, car il est déjà présent dans la formule de relativité restreinte : $d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) = ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w_1}}{c} + d\frac{\vec{w_2}}{c}$, qu'on peut écrire aussi :

$$\frac{d\vec{\overline{p}}}{dt} = c.\frac{d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right)}{dt} = ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w_1}}{dt} + d\frac{\vec{w_2}}{dt}.$$

On dit quelquefois qu'en relativité restreinte les mobiles ne réagissent pas de la même façon aux forces longitudinales (parallèles à leur vecteur vitesse) qu'aux forces transversales (perpendiculaires à ce vecteur). Certains préfèrent attribuer aux mobiles deux masses inertes différentes : une masse inerte longitudinale et une masse inerte transversale. On peut se contenter de dire que la différence de vitesse entre le mobile et l'observateur (ou le repère de référence) crée une illusion, une distorsion qui s'annule quand cette vitesse est nulle : pour $v = 0$, on a $ch\frac{w}{c} = 1$, donc $\frac{d\vec{\overline{p}}}{dt} = d\frac{\vec{w_1}}{dt} + d\frac{\vec{w_2}}{dt}$.

Mais dans notre formule tirée de la gravitation, on voit un autre facteur : $1 + \frac{v^2}{c^2}$. Si on relit attentivement le calcul qui a été proposé ci-dessus, on voit clairement que ce facteur apparaît quand on impose la condition : $\frac{d\overline{E}}{dt} = 0$. Or, pourquoi, dans une métrique statique, l'énergie d'une particule-test serait-elle toujours constante ? C'est parce-que l'énergie E inclut l'énergie potentielle. Le concept d'énergie potentielle a été introduit par Newton pour assurer la conservation de l'énergie totale $E = E_c + E_p$; mais ce n'est pas seulement une astuce destinée à sauver un principe fondamental : le rôle de l'énergie potentielle est central en gravitation, même si on le réinterprète en l'attribuant à la courbure de l'espace-temps. En définitive, c'est cette courbure qui permet d'assurer la conservation de l'énergie : $\frac{d\overline{E}}{dt} = 0$, et c'est parce-que $\frac{d\overline{E}}{dt} = 0$ que le facteur $1 + \frac{v^2}{c^2}$ figure dans notre équation. Dans le raisonnement que nous venons de faire, nous avons été obligés de nous appuyer sur cette hypothèse : $\frac{d\overline{E}}{dt} = 0$, alors que dans l'étude des géodésiques c'est à la fin que nous avons obtenu cette égalité : $\frac{d\overline{E}}{dt} = 0$, comme conclusion. Ce qui signifie qu'elle était déjà contenue dans la métrique, ou plus exactement dans cette hypothèse : la métrique est statique. Pour toute métrique statique, la particule-test possède une énergie conservative, mais son expression varie selon la métrique. De même, le coefficient λ change selon la métrique, et le facteur $1 + \frac{v^2}{c^2}$ est spécifiquement lié à la métrique de Ni.

On peut proposer une autre démonstration de la formule ci-dessus. A partir des mêmes expressions de l'énergie réduite $\overline{E} = e^{\frac{\Phi}{c^2}}.ch\frac{w}{c}$ et de l'impulsion réduite $\vec{\overline{p}} = c.e^{-\frac{\Phi}{c^2}}.sh\frac{\vec{w}}{c}$, on tire :

$$\overline{E}.\vec{\overline{p}} = c.ch\frac{w}{c}.sh\frac{\vec{w}}{c}.$$

Sachant que $\overline{E} = c^{te}$, on différencie cette égalité de la façon suivante :

$$\overline{E}.d\vec{\overline{p}} = c.ch\frac{w}{c}.d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) + c.sh\frac{\vec{w}}{c}.d\left(ch\frac{w}{c}\right)\ ;$$

$$\overline{E}.d\vec{\overline{p}} = c.ch\frac{w}{c}.\left(ch\frac{w}{c}.d\frac{\vec{w_1}}{c} + d\frac{\vec{w_2}}{c}\right) + c.sh\frac{\vec{w}}{c}.\left(sh\frac{\vec{w}}{c}.d\frac{\vec{w_1}}{c}\right) \;\; ;$$

$$\overline{E}.d\vec{\overline{p}} = ch\frac{w}{c}.\left[ch\frac{w}{c}.d\vec{w}_1 + d\vec{w}_2 + \frac{\vec{v}}{c}.\left(sh\frac{\vec{w}}{c}.d\vec{w}_1\right)\right].$$

Comme $\vec{v}$, $sh\frac{\vec{w}}{c}$ et $d\vec{w}_1$ sont parallèles, on peut remplacer $\frac{\vec{v}}{c}.\left(sh\frac{\vec{w}}{c}.d\vec{w}_1\right)$ par $\frac{v^2}{c^2}.ch\frac{w}{c}.d\vec{w}_1$, ce qui donne :

$$\overline{E}.d\vec{\overline{p}} = ch\frac{w}{c}.\left(ch\frac{w}{c}.d\vec{w}_1 + d\vec{w}_2 + \frac{v^2}{c^2}.ch\frac{w}{c}.d\vec{w}_1\right) \;\; ;$$

$$\overline{E}.d\vec{\overline{p}} = ch\frac{w}{c}.\left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).ch\frac{w}{c}.d\vec{w}_1 + d\vec{w}_2\right].$$

Remplaçons $\overline{E}$ par $e^{\frac{\Phi}{c^2}}.ch\frac{w}{c}$:

$$e^{\frac{\Phi}{c^2}}.ch\frac{w}{c}.d\vec{\overline{p}} = ch\frac{w}{c}.\left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).ch\frac{w}{c}.d\vec{w}_1 + d\vec{w}_2\right] \;\; ;$$

$$e^{\frac{\Phi}{c^2}}.d\vec{\overline{p}} = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).ch\frac{w}{c}.d\vec{w}_1 + d\vec{w}_2.$$

Sachant que $e^{\frac{\Phi}{c^2}}.dt_{dist} = dt_{loc}$, divisons le membre de gauche par $e^{\frac{\Phi}{c^2}}.dt_{dist}$ et le membre de droite par dt_{loc} :

$$\frac{d\vec{\overline{p}}_{dist}}{dt_{dist}} = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).ch\frac{w}{c}.\frac{d\vec{w}_1}{dt_{loc}} + \frac{d\vec{w}_2}{dt_{loc}}.$$

Nous retrouvons bien la même formule.

Rapprochons-la de celle que nous avons vue précédemment :

$$\frac{d\vec{\overline{p}}_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{d\vec{\overline{p}}_{loc}}{dt_{loc}} = -ch\frac{w}{c}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi.$$

Comme $\vec{F} = m_0.\frac{d\vec{\overline{p}}_{dist}}{dt_{dist}} = m_0.\frac{d\vec{\overline{p}}_{loc}}{dt_{loc}}$, on a :

$$\vec{F} = m_0.ch\frac{w}{c}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{d\vec{w}_1}{dt_{loc}} + m_0.\frac{d\vec{w}_2}{dt_{loc}} = -m_0.ch\frac{w}{c}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi.$$

La force $\vec{F}$ est nécessairement orientée selon le gradient, mais pas la pseudo-accélération $\frac{d\vec{w}}{dt}$.

Si la vitesse du mobile est aussi orientée parallèlement au gradient, on a $d\vec{w}_2 = \vec{0}$ et $d\vec{w} = d\vec{w}_1$; dans ce cas :

$$\vec{F} = m_0.ch\frac{w}{c}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{d\vec{w}_1}{dt_{loc}} = -m_0.ch\frac{w}{c}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi.$$

Si on désire adapter formule $\vec{F} = m.\vec{\gamma}$ de Newton, on peut définir une "masse inerte longitudinale" m_l :

$$m_l = m_0.ch\frac{w}{c}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

On a alors :

$$\vec{F_1} = m_l.\vec{\Gamma}_1 = -m_l.\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi$$

et

$$\frac{d\vec{w}_1}{dt_{loc}} = -\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi.$$

Si la vitesse du mobile est aussi orientée perpendiculairement au gradient, on a $d\vec{w}_1 = \vec{0}$ et $d\vec{w} = d\vec{w}_2$; dans ce cas :

$$\vec{F_2} = m_0.\frac{d\vec{w}_2}{dt_{loc}} = -m_0.ch\frac{w}{c}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi.$$

Adaptons formule $\vec{F} = m.\vec{\gamma}$ de Newton, en définissant une "masse inerte transversale" m_t :

$$m_t = m_0.$$

On a alors :

$$\vec{F_2} = m_t.\vec{\Gamma}_2 = -m_l.\vec{\bigtriangledown}_{loc}\Phi.$$

Pour $v = 0$, on a $m_l = m_t = m_0$, et les deux formules s'identifient.

Quand on étudie la gravitation de Newton, on considère tout naturellement le champ gravitationnel comme un champ d'accélérations ($\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, où dt correspond au temps absolu). Si on veut respecter la relativité restreinte, on doit admettre que la notion d'accélération n'est pas adaptée : on doit la remplacer par la pseudo-accélération ($\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$, où dt correspond au temps local) : en chaque point, à chaque instant, est associé un vecteur $\vec{\Gamma}$, qui définit de manière évidente la variation de rapidité d'une particule-test initialement immobile. Mais si cette particule est en mouvement, la pseudo-accélération doit être adaptée en fonction de la vitesse, comme si la "masse longitudinale" se dissociait de la "masse transversale".

Nous constatons que les formules reliant les variations de la rapidité au gradient du potentiel sont plus compliquées que les formules reliant les variations de l'impulsion au gradient du potentiel. Ceci vient du fait que l'espace des rapidités est hyperbolique, alors que l'espace des impulsions est euclidien. En introduisant les pseudo-forces basées sur les pseudo-accélérations, elles-mêmes introduites grâce aux variations de rapidité, nous n'avions pas anticipé cette évidence : les pseudo-forces sont de vraies forces, qui peuvent être définies comme la dérivée de l'impulsion par rapport au temps, dans l'espace des impulsions, qui est euclidien.

Il peut être intéressant d'introduire une autre forme de pseudo-accélération :

$$\vec{\Gamma}' = \frac{d\bar{\vec{p}}}{dt} = d\left(sh\frac{\vec{w}}{c}\right) \qquad \text{au lieu de} \quad \vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}.$$

Mais nous préférons considérer $\vec{\Gamma}'$ comme une force réduite.

Le passage de $\vec{\Gamma}$ à $\vec{\Gamma}'$, ou de $\vec{w}$ à $\bar{\vec{p}}$, nous fait passer de l'espace hyperbolique des rapidités à l'espace euclidien des impulsions (voir document sur les vitesses en relativité restreinte). Le grand intérêt des impulsions est que leurs variations sont directement reliées au gradient du potentiel ; ce qui replace l'énergie-impulsion au centre du phénomène gravitationnel. La relativité restreinte a montré que le cadre général de la physique est un espace-temps de Minkowski ayant des propriétés bien particulières (il est Lorentzien) ; mais les propriétés de l'énergie-impulsion sont étroitement imbriquées avec celles de l'espace et du temps, de sorte que certains parlent aujourd'hui d'un "espace-temps-énergie". Dans ce cadre, la force (réduite ou non) a une place privilégiée. On pourrait considérer le champ gravitationnel comme un champ de pseudo-forces réduites (plutôt que de pseudo-accélérations) dérivant d'un potentiel.

Dans le document sur les vitesses en relativité restreinte, nous avons rappelé quelques définitions, valables dans un espace-temps de Minkowski :

- le quadrivecteur position d'une particule est défini par :

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} c.t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ;$$

- le quadrivecteur vitesse de cette particule est défini par :

$$\tilde{U} = \frac{d\tilde{r}}{d\tau} = ch\frac{w}{c}.\begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad ;$$

- son quadrivecteur accélération est défini par :

$$\tilde{A} = \frac{d\tilde{U}}{d\tau} \ ;$$

- son quadrivecteur énergie-impulsion est égal à :

$$\tilde{I} = m_0.c.\tilde{U} \ ;$$

- le quadrivecteur force est égal à :

$$\tilde{f} = m_0.c.\tilde{A}.$$

Dans l'étude de la gravitation, on doit faire plusieurs adaptations. L'une d'elles est particulièrement importante : alors qu'en relativité restreinte le quadrivecteur accélération s'obtient en dérivant la quadrivitesse par rapport au temps propre τ de la particule (on ne peut pas faire autrement : dans ce contexte, τ est le seul temps invariant par changement de repère), en gravitation, l'accélération gravitationnelle n'est pas liée à une particule mais à un point de l'espace-temps, et la dérivation doit se faire par rapport au temps local t_{loc}. Ceci peut s'interpréter en disant que toute particule-test va échanger, non pas avec une autre particule bien déterminée, mais avec le champ gravitationnel dans lequel elle est plongée. Mais on peut pousser plus loin cette interprétation, en considérant que le champ lui-même n'est rien d'autre qu'une somme de toutes les possibilités d'échanges avec toutes les particules de l'Univers : c'est un résumé des interactions possibles de la particule avec son environnement. Et c'est cet environnement qui définit l'immobilité gravitationnelle locale et le temps local t_{loc}. Nous en avons parlé dans le document sur le champ d'entraînement, et nous en reparlerons, par exemple dans le document sur la gravitation et le vide quantique.

La seconde différence par rapport aux forces usuelles est que la force gravitationnelle courbe l'espace-temps, ce qui annule les variations d'énergie de la particule-test, tout en modifiant les variations de l'impulsion, la signature de cet effet étant, dans le cas de la métrique de Ni, le facteur $1 + \frac{v^2}{c^2}$.

Au sujet de ce facteur $1 + \frac{v^2}{c^2}$, voici encore une idée que nous présentons ici avec la plus grande prudence : on pourrait se représenter le champ gravitationnel comme une sorte de fonction d'onde de la forme $\Psi(w) = ch\frac{w}{c} + i.sh\frac{w}{c}$, dont le carré de la norme est :

$$||\Psi(w)||^2 = \Psi(w).\Psi^*(w) = \left(ch\frac{w}{c} + i.sh\frac{w}{c}\right).\left(ch\frac{w}{c} - i.sh\frac{w}{c}\right) = ch^2\frac{w}{c} + sh^2\frac{w}{c} \ ;$$

$$||\Psi(w)||^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

On pourrait alors se demander, en pensant aux idées de Max Born, si ce coefficient $\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ne pourrait pas exprimer la probabilité d'interaction entre la particule-test et le champ. Mais ceci n'est rien de plus qu'une conjecture...

15 L'expérience de Pound et Rebka

Lorsque nous avons parlé du critère de Schild, nous avons expliqué pourquoi la relativité de l'évaluation de l'énergie implique la relativité de l'évaluation du temps ; nous avons basé notre explication sur la formule $E = h.\nu$. Nous allons apporter un éclairage complémentaire, basé sur l'expérience de Pound et Rebka.

Cette expérience était destinée à répondre à la question : quel est l'effet de la gravitation sur la lumière ? Modifie-t-elle son énergie, son impulsion, sa fréquence, sa longueur d'onde ? Cette question s'est posée avec une acuité particulière après la parution de la relativité générale, mais elle se posait déjà avant.

Voici le dispositif : au pied d'une tour, un rayonnement de fréquence parfaitement connue est envoyé verticalement vers le sommet de la tour. Au dernier étage, le rayonnement est intercepté et sa fréquence est mesurée. Pour être plus précis, disons que des atomes dans un état bien déterminé vont être excités à condition que le rayonnement, à l'arrivée, ait une fréquence bien précise, très légèrement différente de la fréquence de départ. Le dispositif est donc conçu pour mettre en évidence une variation de la fréquence, si minime soit-elle, entre le départ et l'arrivée de l'onde.

S'il s'agissait d'un projectile matériel (une balle par exemple), la théorie de Newton permettrait de faire le calcul sans difficulté : en s'élevant, la balle perd de la vitesse, donc de l'énergie cinétique. Mais, pour Newton, la conservation de l'énergie implique que toute perte d'énergie cinétique est compensée par un gain d'une autre forme d'énergie, en l'occurence de l'énergie potentielle. On peut, par exemple, considérer que la variation de l'énergie cinétique est déterminée par le travail de la force $\vec{F} = -\frac{G.M.m}{r^2}.\vec{u}$ (action), tandis que la variation de l'énergie potentielle est déterminée par le travail de la force opposée (réaction) : $-\vec{F} = \frac{G.M.m}{r^2}.\vec{u}$ (M étant la masse de la Terre, m celle de la balle, r la distance des centres, $\vec{u}$ un vecteur unitaire vertical dirigé vers le zénith). Ces deux variations s'équilibrent exactement. Mais si un intervenant extérieur saisissait la balle en plein vol pour l'immobiliser, alors cet équilibre serait rompu : la balle serait soudain privée de son énergie cinétique, mais conserverait son énergie potentielle. Cette façon de présenter le problème doit cependant être considérée avec prudence, car ces deux "forces" $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ sont en réalité de nature différente : la première agit sur l'énergie cinétique et l'impulsion de la balle, la seconde seulement sur son énergie potentielle. L'"impulsion potentielle" n'existe pas !

Que se passe-t-il dans le cas d'un rayonnement lumineux ? Perd-il de l'énergie en s'élevant du niveau du sol jusqu'au sommet de la tour ?

Première réponse : non, c'est impossible, pour deux raisons.
a) L'énergie totale du rayonnement ne peut pas varier sur son parcours : si son énergie cinétique diminue, son énergie potentielle augmente d'autant. Donc, d'après la formule $E = h.\nu$, sa fréquence ne doit pas changer non plus.
b) Si vous suivez le tour de France à la télévision, vous voyez que la distance (spatiale) qui sépare deux coureurs se réduit quand la route se met à monter, et augmente dans les descentes, sans que l'écart (temporel) soit modifié. Si, dans une course contre la montre (en plaine ou en montagne) deux coureurs roulent exactement à la même vitesse, des chronométreurs échelonnés sur le parcours enregistreront tous le même écart temporel (même si la distance spatiale varie).

Si plusieurs coureurs, régulièrement espacés, représentent les maxima de l'onde, les chronométreurs enregistreront tous le même écart, donc la même fréquence. Il est absolument impossible que la fréquence de l'onde varie entre le sol et le sommet de la tour, même en supposant qu'elle puisse accélérer ou relentir en fonction de l'altitude.

Seconde réponse : le rayonnement va perdre de l'énergie à cause de la gravité. D'ailleurs, l'expérience de Pound et Rebka le prouve : la fréquence a bien diminué entre le sol et le sommet de la tour !

Ce paradoxe apparent n'est pas très difficile à résoudre : toutes les réponses sont justes, mais pas pour le même observateur.

La première réponse sera celle d'un observateur unique (par exemple un "observateur distant"), qui situe les événements sur son échelle des temps personnelle, établie d'après son chronomètre propre (ou d'après les informations fournies par des chronométreurs qui lui servent de relais, et qui se sont synchronisés avec lui).

La seconde réponse fait intervenir deux observateurs différents, travaillant indépendamment l'un de l'autre : l'un au pied de la tour (celui qui envoie le rayonnement), l'autre au sommet (celui qui le reçoit). Et ces deux observateurs utilisent des chronomètres qui ne tournent pas à la même vitesse.

Soyons encore plus précis. Nous avons dit que le "chronomètre" utilisé par nos physiciens était constitué d'atomes ayant une fréquence de vibration propre. Cette fréquence peut-elle varier quand on transporte ces atomes du pied de la tour jusqu'à son sommet ? La réponse est oui. En effet, leur énergie potentielle a varié pendant le parcours, donc leur fréquence propre aussi, car la fréquence est reliée à l'énergie, non seulement dans le cas de la lumière, mais pour tous les autres phénomènes ondulatoires. La gravité perturbe donc nécessairement les chronomètres et autres horloges.

Le physicien situé au pied de la tour va dire : "la fréquence du rayonnement n'a pas varié sur son parcours, mais mon collègue qui se trouve au sommet la sous-estime, parce-qu'il utilise un chronomètre qui tourne trop vite" ; inversement, celui qui est au sommet va dire : "la fréquence du rayonnement est constante, mais mon collègue qui se trouve au sol la surestime, parce-qu'il utilise un chronomètre qui tourne trop lentement".

Donc, quand nous disons que l'énergie et la fréquence ont varié, il faut comprendre que c'est parce-que nous avons changé d'informateur : nous avons demandé au physicien situé au pied de la tour de faire pour nous les mesures au pied de la tour, et au physicien installé au sommet de faire les mesures au sommet. Si nous avions désigné un informateur unique, il nous aurait donné une réponse unique et non ambiguë.

16 Récapitulation sur le critère de Schild

Dans le document : "Gravitation et critère de Schild", nous avons expliqué longuement le paradoxe de Schild, et nous avons proposé une façon simple de le contourner. Le paradoxe de Schild se base principalement sur l'expérience de Pound et Rebka : un rayonnement électromagnétique, dirigé de bas en haut dans le champ de gravité de la Terre, perd de l'énergie ; sa fréquence diminue et sa longueur d'onde augmente. Il doit en être de même pour un rayonnement qui s'éloigne du Soleil. Nous imaginons un "observateur local", immobile par rapport au Soleil, situé dans son champ gravitationnel, à la distance r du centre, et un "observateur distant", également immobile par rapport au Soleil, mais situé "à l'infini", ou du moins assez loin pour que le champ gravitationnel soit négligeable. Le paradoxe de Schild fait apparaître des contradictions entre les points de vue de ces observateurs. Pour résoudre ce paradoxe, nous avons proposé une solution mathématiquement très simple : l'observateur local et l'observateur distant utilisent des règles et des horloges de référence qui sont différentes, et dont le rapport dépend du potentiel gravitationnel.

Supposons que l'observateur local, situé au point P dans le champ gravitationnel du Soleil S, mesure un intervalle d'univers élémentaire, dans son voisinage, et lui attribue les coordonnées cdt_{loc}, dx_{loc}, dy_{loc}, dz_{loc}, où dx représente un distance élémentaire radiale (dirigée selon le rayon $[SP]$), et dy et dz les distances élémentaires selon deux directions perpendiculaires au rayon $[SP]$. Les coordonnées attribuées au même intervalle d'univers par l'observateur distant seront : cdt_{dist}, dx_{dist}, dy_{dist}, dz_{dist}. Nous posons alors :

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{cdt_{loc}}{cdt_{dist}} \ ; \\ \\ \beta' = \frac{dx_{loc}}{dx_{dist}} \ ; \\ \\ \gamma' = \frac{dy_{loc}}{dy_{dist}} = \frac{dz_{loc}}{dz_{dist}}. \end{cases}$$

Nous dirons que α' est le coefficient de dilatation du temps, β' le coefficient de dilatation de l'espace dans la direction radiale, γ' le coefficient de dilatation de l'espace dans toutes les directions perpendiculaires au rayon.

Nous supposons que la relativité restreinte est valable dans le voisinage de l'observateur local.

En coordonnées sphériques, la métrique de Minkowski, dans le repère de l'observateur local, s'écrit :

$$ds^2 = c^2.dt_{loc}^2 - dx_{loc}^2 - \left(dy_{loc}^2 + dz_{loc}^2\right) \ ;$$

$$ds^2 = \alpha'^2.c^2.dt^2_{dist} - \beta'^2.dx^2_{dist} - \gamma'^2.\left(dy^2_{dist} + dz^2_{dist}\right) \;;$$

Posons : $\alpha'^2 = \alpha$, $\alpha'^2 = \alpha$, $\alpha'^2 = \alpha$; la métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2_{dist} - \beta.dx^2_{dist} - \gamma.\left(dy^2_{dist} + dz^2_{dist}\right).$$

Nous avons posé : $dt = dt_{dist}$, $dx = dx_{dist}$, $dy = dy_{dist}$, $dz = dz_{dist}$; nous écrirons donc :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dx^2 - \gamma.\left(dy^2 + dz^2\right),$$

ou encore, avec les coordonnées sphériques habituelles :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.\left(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2\right).$$

C'est la formule générale que nous avons utilisée jusqu'ici.

Adopter la solution qui a été proposée pour résoudre le paradoxe de Schild revient à admettre que :
- le coefficient de dilatation du temps est : $\alpha' = \sqrt{\alpha}$;
- le coefficient de dilatation de l'espace selon la direction radiale est : $\beta' = \sqrt{\beta}$;
- le coefficient de dilatation de l'espace selon les directions perpendiculaires au rayon est : $\gamma' = \sqrt{\gamma}$.

De plus, ces quantités doivent être positives.

Dans ce qui suit, nous adopterons cette optique et nous utiliserons, sans le préciser, la solution que nous avons proposée pour résoudre le paradoxe de Schild. Ceci nous conduira à une interprétation des métriques qui est incompatible avec la relativité générale. Il faut donc bien mesurer l'importance de ce choix.

17 Energie et moment cinétique : les formules fondamentales

Répétons que nous raisonnons dans le cadre de notre interprétation particulière du paradoxe de Schild, interprétation qui s'appuie sur la distinction entre le point de vue distant et le point de vue local.

Sur une portion élémentaire de la trajectoire de la planète, on a : $ds^2 = c^2.dt^2_{loc} - dl^2_{loc}$ (où dl_{loc} est la distance parcourue par la planète pendant le temps dt_{loc}, évaluée par un observateur local), donc :

$$ds^2 = c^2.dt^2_{loc}.\left(1 - \frac{dl^2_{loc}}{c^2.dt^2_{loc}}\right) = c^2.dt^2_{loc}.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \;;$$

$$ds = c.dt_{loc}.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Comme toujours, nous notons v la vitesse de la planète évaluée par un observateur local immobile par rapport au Soleil. Nous notons w la rapidité correspondante.

Dans la section sur les géodésiques, nous avons vu que $E = m_0.c^2.\alpha.\frac{c.dt_{dist}}{ds}$ (le champ étant supposé statique). Nous avions alors ignoré la troisième dimension spatiale, car le but était d'étudier l'orbite d'une planète autour du Soleil ; nous avions donc choisi de nous placer dans le plan de cette orbite. Nous reconduisons ici la même simplification.

De plus, nous venons de voir (en admettant notre solution du paradoxe de Schild) que $dt = dt_{dist}$, et que $\sqrt{\alpha}.dt_{dist} = dt_{loc}$; par conséquent :

$$E = m_0.c^2.\alpha.\frac{c.dt_{dist}}{ds} = m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.\frac{c.dt_{loc}}{ds} = m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ ;$$

$$E = m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = c^{te} \ ;$$

$$\mu = m_0.c.\gamma.r^2.\frac{d\theta}{ds} = m_0.c.\gamma.r^2.\frac{d\theta}{c.dt_{loc}.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ ;$$

$$\mu = m_0.\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}.r^2.\frac{d\theta}{dt_{dist}}.ch\frac{w}{c} = c^{te}.$$

$$\begin{cases} E = m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = c^{te} \ ; \\ \mu = m_0.\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}.r^2.\frac{d\theta}{dt_{dist}}.ch\frac{w}{c} = c^{te}. \end{cases}$$

Dans la section sur les géodésiques, nous avons parlé de l'énergie réduite $\overline{E}$ et du moment cinétique réduit $\overline{\mu}$; nous avions obtenu :

$$\overline{E} = \frac{E}{m_0.c^2} = \alpha.\frac{c.dt}{ds} \ ;$$

$$\overline{\mu} = \frac{\mu}{m_0} = \gamma.r^2.\frac{c.d\theta}{ds}.$$

Nous pouvons compléter ces égalités :

$$\begin{cases} \overline{E} = \alpha.\frac{c.dt}{ds} = \sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = c^{te} \ ; \\ \overline{\mu} = \gamma.r^2.\frac{d\theta}{c.ds} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}.r^2.\frac{d\theta}{dt}.ch\frac{w}{c} = c^{te}. \end{cases}$$

On peut aussi combiner les formules de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\overline{\mu}}{\overline{E}} = \frac{\gamma}{\alpha}.r^2.\frac{d\theta}{dt} = c^{te} \ ; \\ \\ \overline{\mu}.\overline{E} = \gamma.r^2.ch^2\frac{w}{c}.\frac{d\theta}{dt} = c^{te}. \end{cases}$$

Dans ces formules, il est sous-entendu que $E = E_{dist}$, $\mu = \mu_{dist}$, $t = t_{dist}$. Ces quantités sont évaluées par un observateur immobile par rapport au Soleil, mais situé "à l'infini" (c'est-à-dire non soumis à son influence gravitationnelle). La seule quantité évaluée par l'observateur local (également immobile par rapport au Soleil, mais soumis à son influence gravitationnelle, comme la planète qu'il s'agit d'étudier) est la rapidité w (ou, si on préfère, la vitesse v).

18 Vitesse de libération dans le cas général

Revenons à une métrique quelconque, pré-relativiste ou non. Nous pouvons utiliser les formules fondamentales concernant l'énergie ; on pourra se reporter à la section portant sur ce thème.

D'après l'égalité :

$$E = m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = c^{te},$$

il est clair que le produit $\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}$ est constant sur la trajectoire.
Dire que la vitesse est égale à la vitesse de libération (ou d'évasion) v_l signifie que $v \to 0$ quand $r \to \infty$. Donc $ch\frac{w}{c}$ tend vers 1. Mais α tend aussi vers 1 ; ceci vient du fait que $dt_{loc} = \sqrt{\alpha}.dt_{dist}$ (si notre façon de résoudre la paradoxe de Schild est correcte, bien sûr) ; comme le point de vue de l'observateur local se confond avec celui de l'observateur distant à l'infini, $\alpha \to 1$ quand $r \to \infty$.

On a donc nécessairement : $\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = 1$, non seulement à l'infini, mais sur toute la trajectoire. Notons : $w = w_l$ (rapidité de libération, variable en fonction de r, comme α).

$$\sqrt{\alpha}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_l^2}{c^2}}} = 1 \ ;$$

$$1 - \frac{v_l^2}{c^2} = \alpha \ ;$$

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1-\alpha}.$$

On voit donc que c'est α, et lui seul, qui régit, de manière très simple, la vitesse de libération. On voit aussi qu'un problème va se poser pour les métriques qui acceptent des valeurs de α supérieures à 1 ou inférieures à 0.

Retenons que :

$$\sqrt{\alpha} = \frac{1}{ch\frac{w_l}{c}}.$$

19 Chute libre radiale dans le cas général

Nous voulons étudier la trajectoire d'une particule-test de masse m tombant en ligne droite vers un corps massif de masse M.
Dans ce cas, la métrique se réduit à :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2.$$

Parmi les équations des géodésiques, seule celle qui traduit la conservation de l'énergie nous sera utile :

$$\alpha.\frac{c.dt}{ds} = \overline{E}.$$

L'équation de la métrique peut s'écrire :

$$1 = \alpha.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2 - \beta.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.$$

La conservation de l'énergie donne :

$$\frac{c.dt}{ds} = \frac{\overline{E}}{\alpha}.$$

Faisons la substitution dans l'équation précédente :

$$1 = \alpha.\left(\frac{\overline{E}}{\alpha}\right)^2 - \beta.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{\overline{E}^2}{\alpha} - \beta.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \;;$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{\frac{\overline{E}^2}{\alpha} - 1}{\beta} \;;$$

$$ds = -\frac{dr}{\sqrt{\frac{\frac{\overline{E}^2}{\alpha}-1}{\beta}}} = -\sqrt{\frac{\beta}{\frac{\overline{E}^2}{\alpha} - 1}}.dr = -\sqrt{\frac{\alpha.\beta}{\overline{E}^2 - \alpha}}.dr.$$

Le signe négatif est justifié par le sens de parcours de la trajectoire.

D'autre part, on a :

$$c.dt = \frac{\overline{E}}{\alpha}.ds = -\frac{\overline{E}}{\alpha}.\sqrt{\frac{\alpha.\beta}{\overline{E}^2 - \alpha}}.dr = -\overline{E}.\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.\frac{dr}{\sqrt{\overline{E}^2 - \alpha}}.$$

On pourra donc utiliser les formules :

$$1)\ ds = -\sqrt{\frac{\alpha.\beta}{\overline{E}^2 - \alpha}}.dr\ ;$$

$$2)\ c.dt = -\overline{E}.\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.\frac{dr}{\sqrt{\overline{E}^2 - \alpha}}.$$

On a, d'une part :

$$ds^2 = \frac{\alpha.\beta}{\overline{E}^2 - \alpha}.dr^2,$$

et, d'autre part :

$$ds^2 = c^2.dt_{loc}^2 - dl_{loc}^2 = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{dl_{loc}^2}{c^2.dt_{loc}^2}\right) = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\ ;$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\alpha.\beta}{\overline{E}^2 - \alpha}.dr^2 = c^2.dt_{loc}^2.\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\ ;$$

$$\frac{dr^2}{c^2.dt_{loc}^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{\overline{E}^2 - \alpha}{\alpha.\beta}.$$

Comme $dr = dr_{dist} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.dr_{loc} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.dl_{loc}$, on a :

$$\frac{dr^2}{c^2.dt_{loc}^2} = \frac{1}{\beta}.\frac{dl_{loc}^2}{c^2.dt_{loc}^2} = \frac{1}{\beta}.\frac{v^2}{c^2},$$ donc l'égalité ci-dessus devient :

$$\frac{1}{\beta}.\frac{v^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{\overline{E}^2 - \alpha}{\alpha.\beta}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).\left(\frac{\overline{E}^2}{\alpha} - 1\right)\ ;$$

$$\frac{v^2}{c^2}.\left(1 + \frac{\overline{E}^2}{\alpha} - 1\right) = \frac{\overline{E}^2}{\alpha} - 1\ ;$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\frac{\overline{E}^2}{\alpha} - 1}{\frac{\overline{E}^2}{\alpha}} = 1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}\ ;$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}\ ;$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}\ ;$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{\alpha}{\overline{E}^2}\ ;$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\overline{E}}\ ;$$

$$ch\frac{w}{c}=\frac{\overline{E}}{\sqrt{\alpha}}\ ;$$

$$\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}=\overline{E}.$$

Ces six formules sont toutes interdépendantes ; nous les avons rangées ici dans un ordre logique, qui est l'ordre suivi dans notre démonstration. Mais nous contatons que la sixième était déjà connue : nous l'avions rencontrée dans la section sur l'énergie. Donc nous aurions pu la prendre comme point de départ de notre calcul, ce qui nous aurait permis de démontrer les cinq autres formules très facilement, dans un ordre exactement inverse.

Dans toutes ces formules, seul le premier coefficient de la métrique (α) intervient.

Dans le cas des métriques symétriques (comme celles de Schwarzschild et de Ni), on a $\alpha.\beta=1$; les deux premières formules s'écrivent alors :

$$1)\ ds=-\frac{dr}{\sqrt{\overline{E}^2-\alpha}}\ ;$$

$$2)\ c.dt=-\frac{\overline{E}}{\alpha}.\frac{dr}{\sqrt{\overline{E}^2-\alpha}}.$$

Toutes les autres formules (listées ci-dessus) restent valables.

Si la particule parcourt une trajectoire d'évasion inversée (ce qui signifie que $r\to+\infty$ et $v\to 0$ lorsque $t\to-\infty$), on a $\overline{E}=1$, et nos égalités deviennent :

$$1)\ ds=-\frac{dr}{\sqrt{1-\alpha}}\ ;$$

$$2)\ c.dt=-\frac{1}{\alpha}.\frac{dr}{\sqrt{1-\alpha}}.$$

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\alpha}\ ;$$

$$\frac{v^2}{c^2}=1-\alpha\ ;$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\alpha\ ;$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\sqrt{\alpha}\ ;$$
$$ch\frac{w}{c}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ ;$$
$$\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}=1.$$

On reconnaît la vitesse d'évasion (et la rapidité associée).

Nous utiliserons ces formules quand nous étudierons le problème de l'horizon des trous noirs.

N'oublions pas que v désigne une vitesse locale. Pour l'observateur distant, la vitesse correspondante est :

$$v_{dist}=\frac{dr_{dist}}{dt_{dist}}=\frac{\frac{dr_{loc}}{\sqrt{\beta}}}{\frac{dt_{loc}}{\sqrt{\alpha}}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}.v_{loc}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}.v.$$

Dans le cas des métriques symétriques (comme celles de Schwarzschild et de Ni), on a $\beta=\frac{1}{\alpha}$, donc :

$$v_{dist}=\alpha.v.$$

Sur une trajectoire d'évasion inversée ($\overline{E}=1$), ou non inversée (puisque nous avons choisi arbitrairement le sens de parcours), on aura donc :

$$\frac{v_{dist}}{c}=\alpha.\frac{v}{c}=\alpha.\sqrt{1-\alpha}.$$

Avec la métrique de Ni, nous obtenons :

$$\frac{v_{loc}}{c}=\frac{v}{c}=\sqrt{1-\alpha}=\sqrt{1-e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}}}\ ;$$
$$\frac{v_{dist}}{c}=\alpha.\frac{v}{c}=\alpha.\sqrt{1-\alpha}=e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}}.\sqrt{1-e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}}}.$$

Avec la métrique de Schwarzschild, nous obtenons :

$$\frac{v_{loc}}{c}=\frac{v}{c}=\sqrt{1-\alpha}=\sqrt{1-\left(1-\frac{2.G.M}{r.c^2}\right)}=\sqrt{\frac{2.G.M}{r.c^2}}\ ;$$
$$\frac{v_{dist}}{c}=\alpha.\frac{v}{c}=\alpha.\sqrt{1-\alpha}=\left(1-\frac{2.G.M}{r.c^2}\right).\sqrt{\frac{2.G.M}{r.c^2}}.$$

Dans le cas particulier de la métrique de Schwarzschild, nous voyons apparaître une double curiosité : lorsque r tend vers $\frac{2.G.M}{c^2}$ (rayon de Schwarzschild), $\frac{2.G.M}{r.c^2}$ tend vers 1, donc v_{loc} tend vers c et v_{dist} tend vers 0.

Nous en reparlerons au sujet des trous noirs.

20 Accélération dérivant d'un potentiel

Continuons l'étude de la chute libre radiale sur une trajectoire d'évasion inversée $(\overline{E} = 1)$; on note :

$$v = -\frac{dr_{loc}}{dt_{loc}} = -\frac{\sqrt{\beta}.dr_{dist}}{\sqrt{\alpha}.dt_{dist}} = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.\frac{dr}{dt}.$$

Sur cette trajectoire, on a, à tout instant :

$$v = v_l = c.\sqrt{1-\alpha} \ ;$$

et, par conséquent :

$$\frac{dv}{d\alpha} = -\frac{c}{2}.\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} = -\frac{c^2}{2.v} = \frac{c^2.dt_{loc}}{2.dr_{loc}} \ ;$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dr}.\frac{dr}{dt} = \frac{c^2.dt_{loc}}{2.dr_{loc}}.\frac{d\alpha}{dr}.\frac{dr}{dt}.$$

Sachant que $dt = \frac{dt_{loc}}{\sqrt{\alpha}}$ et que $dr = \frac{dr_{loc}}{\sqrt{\beta}}$, on tire :

$$\frac{\sqrt{\alpha}.dv}{dt_{loc}} = \frac{c^2.dt_{loc}}{2.dr_{loc}}.\frac{\sqrt{\beta}.d\alpha}{dr_{loc}}.\frac{\sqrt{\alpha}.dr_{loc}}{\sqrt{\beta}.dt_{loc}} \ ;$$

et, après simplifications :

$$\frac{dv}{dt_{loc}} = \frac{c^2}{2}.\frac{d\alpha}{dr_{loc}}.$$

L'accélération (locale) $\frac{dv}{dt_{loc}}$ peut-elle dériver d'un potentiel Φ ? Pour cela, on doit avoir :

$$\frac{dv}{dt_{loc}} = \frac{d\Phi}{dr_{loc}}.$$

(Attention aux signes : penser au sens de parcours de la trajectoire !)

Ces deux égalités entraînent :

$$\frac{d\Phi}{dr_{loc}} = \frac{c^2}{2}.\frac{d\alpha}{dr_{loc}} \ ;$$

$$d\Phi = \frac{c^2}{2}.d\alpha \ ;$$

$$\alpha = \frac{2.\Phi}{c^2} + cte.$$

Quand r tend vers l'infini, le coefficient de dilatation du temps tend vers 1 et le potentiel tend vers 0, donc la constante est égale à 1 ; ce qui donne :

$$\alpha = 1 + \frac{2.\Phi}{c^2}.$$

Si $\Phi = -\frac{G.M}{r}$, comme en gravitation newtonienne, on obtient :

$$\alpha = 1 - \frac{2.G.M}{r.c^2} = 1 - \frac{2.k}{r}.$$

C'est le coefficient α de la métrique de Schwarzschild.

On pourrait dire que la métrique de Schwarzschild est conçue sur mesure pour que l'accélération au sens classique ($\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}_{loc}}{dt_{loc}}$) soit égale à $\frac{d\Phi}{dr_{loc}}$, comme chez Newton. Mais ceci n'a rien de relativiste ! Le corps en chute libre va tout naturellement accélérer en tombant vers le corps central, comme l'aurait prévu Newton, et rien ne pourra empêcher sa vitesse d'égaler ou de dépasser celle de la lumière, comme le redoutait Laplace...

Le calcul que nous venons de faire concerne une trajectoire radiale d'évasion, avec $\overline{E} = 0$. Que se passe-t-il lorsque $\overline{E} \neq 0$?

Imaginons donc un autre corps en chute libre radiale, mais ayant une vitesse initiale différente (donc une énergie réduite différente de 1).

Au lieu d'utiliser l'égalité : $v = v_l = c.\sqrt{1-\alpha}$, nous allons prendre :

$$v = v_l = c.\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}.$$

On a alors :

$$\frac{dv}{d\alpha} = c.\left(-\frac{1}{\overline{E}^2}\right).\frac{1}{2.\sqrt{1-\frac{\alpha}{\overline{E}^2}}} = -\frac{c^2}{2.\overline{E}^2.v} = \frac{c^2.dt_{loc}}{2.\overline{E}^2.dr_{loc}} \ ;$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dr}.\frac{dr}{dt} = \frac{c^2.dt_{loc}}{2.\overline{E}^2.dr_{loc}}.\frac{d\alpha}{dr}.\frac{dr}{dt} \ ;$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}.dv}{dt_{loc}} = \frac{c^2.dt_{loc}}{2.\overline{E}^2.dr_{loc}}.\frac{\sqrt{\beta}.d\alpha}{dr_{loc}}.\frac{\sqrt{\alpha}.dr_{loc}}{\sqrt{\beta}.dt_{loc}} \ ;$$

$$\frac{dv}{dt_{loc}} = \frac{c^2}{2.\overline{E}^2}.\frac{d\alpha}{dr_{loc}}.$$

Mais nous venons de voir que $d\alpha = \frac{2.d\Phi}{c^2}$; donc :

$$\frac{dv}{dt_{loc}} = \frac{1}{\overline{E}^2}.\frac{d\Phi}{dr_{loc}}$$

On s'aperçoit que l'accélération subie par ce second mobile est différente de celle du premier, en raison du facteur $\frac{1}{\overline{E}^2}$: plus l'énergie (réduite) est grande (autrement dit : plus la vitesse initiale est élevée), moins le mobile accélère.

Faut-il s'en étonner ? Pas du tout ! Reportons-nous à l'expérience de pensée de l'ascenseur d'Einstein, évoquée dans le document "Principes fondamentaux" : deux objets sont en chute libre dans un ascenseur à des vitesses différentes ; une traction exercée sur le cable de l'ascenseur va modifier sa vitesse, et par conséquent les vitesses des deux mobiles par rapport à lui ; mais, en raison de la règle de composition des vitesses en relativité restreinte, les deux mobiles ne vont pas subir la même accélération, du point de vue d'un observateur immobile à l'intérieur de l'ascenseur. Mais ils vont subir la même "pseudo-accélération" $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}_{loc}}{dt_{loc}}$.

On voit donc qu'il est impossible de modéliser le champ gravitationnel comme un champ d'accélérations $\vec{\gamma}$ au sens classique. Mais ne pourrait-on pas le modéliser comme un champ de pseudo-accélérations $\vec{\Gamma}$?

21 Pseudo-accélération dérivant d'un potentiel

Etudions maintenant la pseudo-accélération $\frac{dw}{dt}$, en nous plaçant toujours sur une trajectoire d'évasion inversée ; partons de l'égalité : $\frac{v}{c} = th\frac{w}{c}$:

$$\frac{dv}{dt} = c.\frac{d\left(th\frac{w}{c}\right)}{dt} = c.\frac{1}{ch^2\frac{w}{c}}.\frac{dw}{c.dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{dw}{dt}.$$

Puisque $v = v_l = c.\sqrt{1-\alpha}$, on a : $\frac{v^2}{c^2} = 1 - \alpha$, et $1 - \frac{v^2}{c^2} = \alpha$, donc :

$$\frac{dv}{dt} = \alpha.\frac{dw}{dt} \ ;$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\alpha}.\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\alpha}.\frac{c^2}{2}.\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.\frac{d\alpha}{dr} \ ;$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{c^2}{2.\sqrt{\alpha.\beta}}.\frac{d\alpha}{dr}.$$

Comme $dt = dt_{dist} = \frac{dt_{loc}}{\sqrt{\alpha}}$ et $dr = dr_{dist} = \frac{dr_{loc}}{\sqrt{\beta}}$, on peut écrire aussi :

$$\frac{dw}{dt_{loc}} = \frac{c^2}{2}.\frac{d\alpha}{\alpha.dr_{loc}}.$$

Si nous voulons que cette pseudo-accélération (locale) dérive du potentiel Φ, nous devons avoir :

$$\frac{dw}{dt_{loc}} = \frac{d\Phi}{dr_{loc}}.$$

(Attention au signe : penser au sens de parcours.)

Ces deux égalités entraînent :

$$\frac{d\Phi}{dr_{loc}} = \frac{c^2}{2}.\frac{d\alpha}{\alpha.dr_{loc}} \ ;$$

$$\frac{2}{c^2}.d\Phi = \frac{d\alpha}{\alpha} = d\left(Log\ \alpha\right) \ ;$$

$$\frac{2.\Phi}{c^2} = Log\ \alpha + cte.$$

Quand r tend vers l'infini, le coefficient de dilatation du temps tend vers 1 et le potentiel tend vers 0, donc la constante est nulle ; ce qui entraîne :

$$\frac{2.\Phi}{c^2} = Log\ \alpha \ ;$$

$$\alpha = e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}.$$

Si $\Phi = -\frac{G.M}{r}$, comme en gravitation newtonienne, on obtient :

$$\alpha = e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}} = e^{-\frac{2.k}{r}}.$$

Ce coefficient α est celui de la métrique de Ni, et de toutes les métriques pré-relativistes.

Pour que la pseudo-accélération dérive d'un potentiel Φ, la métrique doit être pré-relativiste.

Si on suit le parcours d'un mobile en chute libre radiale tombant vers le corps central, sa vitesse (locale) ne dépassera jamais celle de la lumière. C'est la première condition pour qu'une théorie de la gravitation soit relativiste, et c'est pourquoi nous parlons de métriques pré-relativistes. Curieusement, la métrique de Schwarzschild n'est pas pré-relativiste ; mais la relativité générale ne suit pas notre interprétation du critère de Schild.

Le raisonnement peut se faire aussi sur une trajectoire radiale quelconque, avec $\overline{E} \neq 1$.

Partons par exemple de l'égalité $\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = \overline{E} = c^{te}$; passons aux logarithmes :

$$Log\ \sqrt{\alpha} + Log\ ch\frac{w}{c} = c^{te} \ ;$$

puis différentions les deux membres :

$$d\left(Log\ \sqrt{\alpha}\right) + d\left(Log\ ch\frac{w}{c}\right) = 0 \ ;$$

$$\frac{d\left(\sqrt{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{d\left(ch\frac{w}{c}\right)}{ch\frac{w}{c}} = 0 \ ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\frac{d\alpha}{2.\sqrt{\alpha}} + \frac{sh\frac{w}{c}.d\frac{w}{c}}{ch\frac{w}{c}} = 0 \ ;$$

$$\frac{d\alpha}{2.\alpha} + \frac{v}{c}.d\frac{w}{c} = 0 \ ;$$

$$\frac{d\alpha}{2.\alpha} + \frac{dr_{loc}}{c.dt_{loc}}.d\frac{w}{c} = 0 \ ;$$

$$\frac{c^2.d\alpha}{2.\alpha} + \frac{dr_{loc}}{dt_{loc}}.dw = 0 \ ;$$

$$\frac{dw}{dt_{loc}} = -\frac{c^2}{2.\alpha}.\frac{d\ \alpha}{dr_{loc}}.$$

Ici nous rejoignons le calcul précédent ; le résultat est donc identique. Ceci signifie que la pseudo-accélération est indépendante de $\overline{E}$, donc tous les corps en chute libre subissent la même pseudo-accélération, quelle que soit leur énergie (donc leur vitesse initiale).

22 Chute libre radiale et impulsion

Nous allons continuer l'étude de la chute libre radiale, mais en focalisant notre attention sur l'impulsion du mobile.

Nous avions défini la composante radiale de l'impulsion par :

$$p_x = m_0.\overline{p}_x = m_0.\sqrt{\beta}.ch\frac{w}{c}.v_x.$$

Si la vitesse est radiale, on a $v_x = v$ et $p_x = p$. On écrira :

$$\overline{p} = \sqrt{\beta}.ch\frac{w}{c}.v = c.\sqrt{\beta}.sh\frac{w}{c}.$$

Nous allons supposer que $\alpha.\beta = 1$ (métrique symétrique). Dans ce cas, on a :

$$\overline{p} = \frac{c.sh\frac{w}{c}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Dans les généralités sur la chute libre radiale, nous avons démontré les égalités : $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}$ et $ch\frac{w}{c} = \frac{\overline{E}}{\sqrt{\alpha}}$; ce qui entraîne :

$$sh\frac{w}{c} = \frac{v}{c}.ch\frac{w}{c} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}.\frac{\overline{E}}{\sqrt{\alpha}}.$$

On a donc :

$$\overline{p} = \frac{c}{\sqrt{\alpha}}.\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}.\frac{\overline{E}}{\sqrt{\alpha}} \ ;$$

$$\overline{p} = c.\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}.\frac{\overline{E}}{\alpha}.$$

Dérivons par rapport à t :

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = c.\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}.\left(-\frac{\overline{E}.d\alpha}{\alpha^2.dt}\right) + c.\frac{\overline{E}}{\alpha}.\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}}.\left(-\frac{d\alpha}{\overline{E}^2.dt}\right)\ ;$$

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = -c.\left[\frac{\overline{E}}{\alpha^2}.\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}} + \frac{1}{2.\overline{E}.\alpha}.\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}}\right].\frac{d\alpha}{dt}\ ;$$

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = -\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}}}.\left[\frac{\overline{E}}{\alpha^2}.\left(1 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}\right) + \frac{1}{2.\overline{E}.\alpha}\right].\frac{d\alpha}{dt}\ ;$$

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = -\frac{c^2}{v}.\left[\frac{\overline{E}}{\alpha^2} - \frac{1}{\overline{E}.\alpha} + \frac{1}{2.\overline{E}.\alpha}\right].\frac{d\alpha}{dt}\ ;$$

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = -\frac{c^2}{v}.\left[\frac{\overline{E}}{\alpha^2} - \frac{1}{2.\overline{E}.\alpha}\right].\frac{d\alpha}{dt}\ ;$$

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = -\frac{c^2}{v}.\frac{\overline{E}}{2.\alpha^2}.\left[2 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2}\right].\frac{d\alpha}{dt}.$$

Dans les généralités sur la chute libre radiale, nous avons vu que $\frac{\alpha}{\overline{E}^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$; il s'ensuit que $2 - \frac{\alpha}{\overline{E}^2} = 2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 + \frac{v^2}{c^2}$; donc :

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = -\frac{c^2}{v}.\frac{\overline{E}}{2.\alpha^2}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{d\alpha}{dt}.$$

Comme $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dr}.\frac{dr}{dt} = \frac{d\alpha}{dr}.v_{dist} = \frac{d\alpha}{dr}.\alpha.v_{loc} = \frac{d\alpha}{dr}.\alpha.v$, on obtient :

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = -\frac{c^2}{v}.\frac{\overline{E}}{2.\alpha^2}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{d\alpha}{dr}.\alpha.v = -c^2.\overline{E}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{d\alpha}{2.\alpha.dr}.$$

Supposons qu'en plus d'être symétrique, la métrique soit aussi pré-relativiste, ce qui signifie que : $\alpha = e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}$.

On a alors : $d\alpha = 2.e^{\frac{2.\Phi}{c^2}}.d\left(\frac{\Phi}{c^2}\right) = 2.\alpha.d\left(\frac{\Phi}{c^2}\right)$, donc $\frac{d\alpha}{2.\alpha} = d\left(\frac{\Phi}{c^2}\right)$; faisons la substitution dans l'égalité précédente :

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = -c^2.\overline{E}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{d\frac{\Phi}{c^2}}{dr}.$$

En multipliant les deux membres par m_0, on obtient :

$$m_0.\frac{d\overline{p}}{dt} = -m_0.\overline{E}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{d\Phi}{dr}.$$

Sachant que $\overline{E} = \sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}$ et que $m_{dist} = \frac{E}{c^2} = m_0.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}$, on écrira :

$$\frac{dp}{dt} = -m_{dist}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{d\Phi}{dr}.$$

Nous retrouvons le résultat déjà obtenu dans la section sur les géodésiques en version localement cartésienne ; nous retrouvons surtout le facteur $1 + \frac{v^2}{c^2}$ sur lequel nous avions fait une longue digression.

Si $\Phi = -\frac{G.M_{dist}}{r}$ (potentiel newtonien), alors $\frac{d\Phi}{dr} = \frac{G.M_{dist}}{r^2}$, et :

$$\frac{dp}{dt} = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{G.M_{dist}.m_{dist}}{r^2}.$$

Nous savons que les masses se transforment de la même manière que les distances par changement de potentiel ; donc la quantité $\frac{G.M_{dist}.m_{dist}}{r^2}$ (dans laquelle $r = r_{dist}$, rappelons-le) est en réalité indépendante du potentiel dans lequel est plongé l'observateur. Autrement dit, n'importe quel observateur peut jouer le rôle d'observateur distant.

23 Vitesse circulaire dans le cas général

Nous appelons vitesse circulaire la vitesse d'un mobile de masse négligeable se déplaçant sur une orbite circulaire de rayon r autour du corps massif central de masse M (le Soleil par exemple). Cette vitesse dépend de r et de M.

Pour calculer cette vitesse, il est commode d'utiliser la deuxième équation des géodésiques :

$$2)\quad -\frac{d}{ds}\left(\beta.\frac{dr}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{\partial r}.$$

Comme r est supposé constant, la dérivée $\frac{dr}{ds}$ est identiquement nulle, et l'équation devient :

$$0 = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{\partial r}\ ;$$

$$\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r} = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{\partial r}\ ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\left(\frac{ds}{c.dt}\right)^2 = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}}\ ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{c.dt}\right)^2 = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}}\ ;$$

$$\left(\frac{r.d\theta}{c.dt}\right)^2 = \frac{r^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}}\ ;$$

$$\left(\frac{v_{dist}}{c}\right)^2 = \frac{r^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}}.$$

Cette formule permet de calculer la vitesse circulaire évaluée par l'observateur distant. Pour calculer la vitesse évaluée par un observateur local immobile, on utilise le coefficient de dilatation du temps : $\sqrt{\alpha}$, et le coefficient de dilatation de l'espace dans le sens du déplacement : $\sqrt{\gamma}$.

On a : $dl_{loc} = \sqrt{\gamma}.dl_{dist}$ (déplacement élémentaire du mobile) et $dt_{loc} = \sqrt{\alpha}.dt_{dist}$, donc $v_{loc} = \frac{dl_{loc}}{dt_{loc}} = \frac{\sqrt{\gamma}.dl_{dist}}{\sqrt{\alpha}.dt_{dist}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}}.v_{dist}$, donc l'égalité ci-dessus donne :

$$\left(\frac{v_{loc}}{c}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}.\frac{r^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}}.$$

24 Aphélie et périhélie dans le cas général

Nous allons étudier l'aphélie et le périhélie d'une orbite elliptique, en appliquant les formules fondamentales de l'énergie et du moment cinétique :

$$\begin{cases} \overline{E} = \alpha.\frac{c.dt}{ds} = \sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = c^{te}\ ; \\ \overline{\mu} = \gamma.r^2.\frac{c.d\theta}{ds} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}.r^2.\frac{d\theta}{dt}.ch\frac{w}{c} = c^{te}. \end{cases}$$

A l'aphélie et au périhélie, la vitesse de la planète est perpendiculaire au rayon vecteur joignant le centre du Soleil à la planète. Dans ce cas, on a :

$$\frac{r.d\theta}{c.dt} = \frac{v_{dist}}{c} = \frac{dl_{dist}}{c.dt}.$$

D'après notre interprétation du critère de Schild :

$$dt = dt_{dist} = \frac{dt_{loc}}{\alpha'} = \frac{dt_{loc}}{\sqrt{\alpha}}\ ;$$

$$dl_{dist} = \frac{dl_{loc}}{\gamma'} = \frac{dl_{loc}}{\sqrt{\gamma}}.$$

La première égalité est valable en tout point de l'orbite ; la seconde n'est valable qu'à l'aphélie et au périhélie, car elle suppose que dl soit perpendiculaire au rayon vecteur.

$$\frac{r.d\theta}{c.dt} = \frac{dl_{dist}}{c.dt} = \frac{dl_{loc}}{\sqrt{\gamma}}.\frac{\sqrt{\alpha}}{c.dt_{loc}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}.\frac{v_{loc}}{c} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}.\frac{v}{c}.$$

Ceci nous permet d'adapter la formule du moment cinétique à l'aphélie et au périhélie :

$$\overline{\mu} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}.r.\left(\frac{r.d\theta}{dt}\right).ch\frac{w}{c} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}.r.\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}.v\right).ch\frac{w}{c} = \sqrt{\gamma}.r.c.sh\frac{w}{c}.$$

Nous allons donc utiliser les formules sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \overline{E} = \sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = c^{te} \ ; \\ \\ \overline{\mu} = \sqrt{\gamma}.r.c.sh\frac{w}{c} = c^{te}. \end{cases}$$

Nous allons noter r_1, v_1, w_1, α_1, γ_1 les valeurs de r, v, w, α et γ à l'aphélie, et r_2, v_2, w_2, α_2, γ_2 leurs valeurs au périhélie.

On aura alors :

$$\overline{E} = \sqrt{\alpha_1}.ch\frac{w_1}{c} = \sqrt{\alpha_2}.ch\frac{w_2}{c} \ ;$$
$$\overline{\mu} = \sqrt{\gamma_1}.r_1.c.sh\frac{w_1}{c} = \sqrt{\gamma_2}.r_2.c.sh\frac{w_2}{c}.$$

On peut espérer que ces égalités vont permettre, au moins dans certains cas, de calculer $(r_2,\ v_2)$ connaissant $(r_1,\ v_1)$. En tout cas, elles établissent un lien entre les caractéristiques orbitales à l'aphélie et au périhélie.

La façon la plus simple de préparer le calcul consiste à éliminer w_2 en écrivant que $ch^2\frac{w_2}{c} - sh^2\frac{w_2}{c} = 1$:

$$ch\frac{w_2}{c} = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\alpha_2}}.ch\frac{w_1}{c} \ ;$$

$$sh\frac{w_2}{c} = \frac{\sqrt{\gamma_1}.r_1}{\sqrt{\gamma_2}.r_2}.sh\frac{w_1}{c} \ ;$$

$$ch^2\frac{w_2}{c} - sh^2\frac{w_2}{c} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.ch^2\frac{w_1}{c} - \frac{\gamma_1.r_1^2}{\gamma_2.r_2^2}.sh^2\frac{w_1}{c} = 1 \ ;$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.\frac{1}{1-\frac{v_1^2}{c^2}} - \frac{\gamma_1.r_1^2}{\gamma_2.r_2^2}.\frac{\frac{v_1^2}{c^2}}{1-\frac{v_1^2}{c^2}} = 1 \ ;$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\gamma_1.r_1^2}{\gamma_2.r_2^2}.\frac{v_1^2}{c^2} = 1 - \frac{v_1^2}{c^2} \ ;$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} - \frac{\gamma_1.r_1^2}{\gamma_2.r_2^2}.\frac{v_1^2}{c^2} = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \ ;$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}{1-\frac{\gamma_1.r_1^2}{\gamma_2.r_2^2}} = \frac{\gamma_2.r_2^2.(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_2.(\gamma_1.r_1^2-\gamma_2.r_2^2)}.$$

Cette formule est censée nous permettre de répondre à cette question : r_1 (rayon à l'aphélie) étant fixé, quelle doit être la vitesse v_1 pour que le périhélie se situe à un rayon r_2 choisi ?

Nous reviendrons sur cette problématique quand nous étudierons les métriques de Schwarzschild et de Ni.

Bien sûr, on a aussi :

$$\frac{v_2^2}{c^2} = \frac{\gamma_1.r_1^2.(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1.(\gamma_1.r_1^2 - \gamma_2.r_2^2)}.$$

Nous aurions pu aborder la question de l'aphélie et du périhélie en partant le l'équation de la métrique :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.d\theta^2, \text{ ou :}$$

$$1 = \alpha.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2 - \beta.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \gamma.r^2.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.$$

A l'aphélie et au périhélie, on a $\frac{dr}{ds} = 0$, ce qui permet de simplifier l'équation :

$$1 = \alpha.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2 - \gamma.r^2.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.$$

Sachant que $\overline{E} = \alpha.\frac{c.dt}{ds}$ et que $\overline{\mu} = \gamma.r^2.\frac{d\theta}{ds}$, on écrira :

$$1 = \frac{1}{\alpha}.\left(\alpha.\frac{c.dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{\gamma.c^2.r^2}.\left(\gamma.r^2.\frac{c.d\theta}{ds}\right)^2 \;;$$

$$1 = \frac{\overline{E}^2}{\alpha} - \frac{\overline{\mu}^2}{\gamma.c^2.r^2} \;;$$

$$\overline{\mu}^2 = \gamma.c^2.r^2.\left(\frac{\overline{E}^2}{\alpha} - 1\right) \;;$$

$$\overline{E}^2 = \alpha.\left(1 + \frac{\overline{\mu}^2}{\gamma.c^2.r^2}\right).$$

Ces égalités ne sont valables qu'en deux points de l'orbite elliptique : l'aphélie et le périhélie. Reprenons les notations précédentes :

$$\overline{\mu}^2 = \gamma_1.c^2.r_1^2.\left(\frac{\overline{E}^2}{\alpha_1} - 1\right) = \gamma_2.c^2.r_2^2.\left(\frac{\overline{E}^2}{\alpha_2} - 1\right);$$

$$\overline{E}^2.\left(\frac{\gamma_1.r_1^2}{\alpha_1} - \frac{\gamma_2.r_2^2}{\alpha_2}\right) = \gamma_1.r_1^2 - \gamma_2.r_2^2 \;;$$

$$\overline{E}^2 = \frac{\gamma_1.r_1^2 - \gamma_2.r_2^2}{\frac{\gamma_1.r_1^2}{\alpha_1} - \frac{\gamma_2.r_2^2}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1.\alpha_2.\left(\gamma_1.r_1^2 - \gamma_2.r_2^2\right)}{\alpha_2.\gamma_1.r_1^2 - \alpha_1.\gamma_2.r_2^2}.$$

$$\overline{E}^2 = \alpha_1.\left(1 + \frac{\overline{\mu}^2}{\gamma_1.c^2.r_1^2}\right) = \alpha_2.\left(1 + \frac{\overline{\mu}^2}{\gamma_2.c^2.r_2^2}\right) \ ;$$

$$\overline{\mu}^2.\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1.c^2.r_1^2} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2.c^2.r_2^2}\right) = \alpha_2 - \alpha_1 \ ;$$

$$\overline{\mu}^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\frac{\alpha_1}{\gamma_1.c^2.r_1^2} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2.c^2.r_2^2}} = \frac{c^2.\gamma_1.r_1^2.\gamma_2.r_2^2.(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_2.\gamma_1.r_1^2 - \alpha_1.\gamma_2.r_2^2}.$$

Calculons encore le quotient :

$$\frac{\overline{\mu}^2}{\overline{E}^2} = \frac{c^2.\gamma_1.r_1^2.\gamma_2.r_2^2.(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1.\alpha_2.(\gamma_1.r_1^2 - \gamma_2.r_2^2)}.$$

Rappelons-nous que $\overline{E} = \sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c}$ et que $\overline{\mu} = \sqrt{\gamma}.r.c.sh\frac{w}{c}$ (à l'aphélie et au périhélie) ; ce qui entraîne :

$$\frac{v_1}{c} = \frac{sh\frac{w_1}{c}}{ch\frac{w_1}{c}} = \frac{\overline{\mu}}{\sqrt{\gamma_1}.c.r_1}.\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\overline{E}} \ ;$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1.c^2.r_1^2}.\frac{\overline{\mu}^2}{\overline{E}^2} \ ;$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1.c^2.r_1^2}.\frac{c^2.\gamma_1.r_1^2.\gamma_2.r_2^2.(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1.\alpha_2.(\gamma_1.r_1^2 - \gamma_2.r_2^2)} = \frac{\gamma_2.r_2^2.(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_2.(\gamma_1.r_1^2 - \gamma_2.r_2^2)}.$$

De même :

$$\frac{v_2^2}{c^2} = \frac{\gamma_1.r_1^2.(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1.(\gamma_1.r_1^2 - \gamma_2.r_2^2)}.$$

Nous retrouvons les formules démontrées précédemment.

On peut calculer facilement le quotient :

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\alpha_1.\gamma_2.r_2^2}{\alpha_2.\gamma_1.r_1^2}.$$

Rappelons-nous que, pour un déplacement dl perpendiculaire au rayon vecteur :

$$dl_{dist} = \frac{dl_{loc}}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{et} \quad dt_{dist} = \frac{dt_{loc}}{\sqrt{\alpha}} \ ;$$

ce qui entraîne que :

$$v_{dist} = \frac{dl_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{dl_{loc}.\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}.dt_{loc}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}.v_{loc} \ ;$$

$$v_{1dist}^2 = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}.v_{1loc}^2 \quad \text{et} \quad v_{2dist}^2 = \frac{\alpha_2}{\gamma_2}.v_{2loc}^2 \ ;$$

$$\frac{v_{1dist}^2}{v_{2dist}^2} = \frac{\alpha_1.\gamma_2}{\alpha_2.\gamma_1}.\frac{v_{1loc}^2}{v_{2loc}^2} = \frac{\alpha_1.\gamma_2}{\alpha_2.\gamma_1}.\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\alpha_1^2.\gamma_2^2.r_2^2}{\alpha_2^2.\gamma_1^2.r_1^2} \ ;$$

$$\frac{v_{1dist}}{v_{2dist}} = \frac{\alpha_1.\gamma_2.r_2}{\alpha_2.\gamma_1.r_1} \ ;$$

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1}.r_1.v_{1dist} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2}.r_2.v_{2dist}.$$

25 Vitesse de décrochage

Partons par exemple d'une orbite elliptique usuelle (comme celles qu'on observe dans le système solaire) ; si nous faisons décroître v_1, nous savons que r_2 décroît, et réciproquement. Remplaçons maintenant le Soleil par un corps plus massif mais beaucoup plus petit (disons ponctuel). On peut penser que lorsque v_1 décroît de manière continue et tend vers 0, r_2 décroît aussi de manière continue et tend également vers 0. Mais nous allons être confrontés, d'abord en métrique de Schwarzschild puis en métrique de Ni, à une situation bien différente : pour r_1 fixé, il existe une vitesse v_1 minimale au-dessous de laquelle on ne pourra trouver aucune valeur de r_2 remplissant les conditions imposées par la formule que nous avons établie dans la section précédente ; autrement dit, il existe une vitesse minimale au-dessous de laquelle le mobile ne peut plus évoluer sur une orbite elliptique, mais ne peut que plonger sans retour vers la singularité centrale. C'est cette vitesse que nous appelons vitesse de décrochage (lorsqu'elle existe).

26 L'effet Einstein

Un chronomètre transporté dans un lieu où la gravité est plus forte va ralentir ; inversement, transporté dans un lieu ou la gravité est plus faible, il va accélérer. Par exemple, imaginons deux chronomètres parfaitement synchronisés à la surface de la Terre. Supposons que le premier soit placé à bord d'un satellite artificiel, puis que ce satellite soit placé en orbite à haute altitude (où la gravité est plus faible) : il va prendre de l'avance par rapport au second, resté au sol. Ce phénomène est connu sous le nom d'"effet Einstein". Il est vérifié tous les jours, grâce à la technologie GPS : pour obtenir son positionnement précis à la surface de la Terre, le boîtier GPS émet un signal qui est capté par plusieurs satellites ; ceux-ci évaluent l'instant de la réception avec une grande précision, à l'aide de leurs chronomètres embarqués. Le calcul de la position exacte nécessite une excellente synchronisation des chronomètres embarqués avec les chronomètres au sol, synchronisation qui est perturbée par la gravité, ce qui est une cause d'erreurs systématiques. Il est donc nécessaire de corriger ces erreurs, sans quoi le positionnement GPS donnerait des résultats fantaisistes.

27 Limite newtonienne

Les coefficients α, β et γ sont des fonctions de r. Pour étudier leur comportement "à l'infini" (quand $r \to \infty$), nous pouvons les développer en série en $\frac{1}{r}$:

$$\alpha \approx \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{\alpha_3}{r^3} + ...$$
$$\beta \approx \beta_0 + \frac{\beta_1}{r} + \frac{\beta_2}{r^2} + \frac{\beta_3}{r^3} + ...$$
$$\gamma \approx \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{r} + \frac{\gamma_2}{r^2} + \frac{\gamma_3}{r^3} + ...$$

Au premier ordre, on a :
$\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha_0.\left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0.r}\right)} \approx \sqrt{\alpha_0}.\left(1 + \frac{\alpha_1}{2.\alpha_0.r}\right) = \sqrt{\alpha_0} + \frac{\alpha_1}{2.\sqrt{\alpha_0}.r}$;
de plus, $ch\frac{w}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}.\frac{v^2}{c^2}$.
Faisons les substitutions dans l'expression de l'énergie, et négligeons les termes de second ordre (ou les produits de termes du premier ordre) en $\frac{1}{r}$ et en $\frac{v^2}{c^2}$:

$$E = m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} \approx m_0.c^2.\left(\sqrt{\alpha_0} + \frac{\alpha_1}{2.\sqrt{\alpha_0}.r}\right).\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{v^2}{c^2}\right) \;;$$

$$E \approx m_0.c^2.\left(\sqrt{\alpha_0} + \sqrt{\alpha_0}.\frac{1}{2}.\frac{v^2}{c^2} + \frac{\alpha_1}{2.\sqrt{\alpha_0}.r}\right) \;;$$

$$E \approx \sqrt{\alpha_0}.m_0.c^2 + \sqrt{\alpha_0}.\frac{1}{2}.m_0.v^2 + \frac{\alpha_1.m_0.c^2}{2.\sqrt{\alpha_0}.r}.$$

L'expression correspondante en gravitation newtonienne (en ajoutant l'énergie de masse $m_0.c^2$, et en notant $k = \frac{G.M}{c^2}$) est :

$$E = m_0.c^2 + \frac{1}{2}.m_0.v^2 - \frac{G.M.m_0}{r} = m_0.c^2 + \frac{1}{2}.m_0.v^2 - \frac{k.m_0.c^2}{r}.$$

On remarque que $\frac{1}{2}.m_0.v^2$ représente l'énergie cinétique et $-\frac{G.M.m_0}{r} = -\frac{k.m_0.c^2}{r}$ l'énergie potentielle de la planète.

Pour que l'expression de l'énergie basée sur la métrique soit équivalente, au premier ordre, à la formule newtonienne quand $r \to \infty$ (ou quand $\Phi \to 0$), on doit avoir :

$$\alpha_0 = 1 \;\; et \;\; \alpha_1 = -2.k = -\frac{2.G.M}{c^2}$$

donc :

$$\alpha \approx 1 - \frac{2.k}{r}.$$

Voyons maintenant le moment cinétique. A l'ordre 0 en $\frac{1}{r}$ et en $\frac{v^2}{c^2}$, on a :

$$\mu = m_0.\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}.r^2.\frac{d\theta}{dt_{dist}}.ch\frac{w}{c} \approx m_0.\frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_0}}.r^2.\frac{d\theta}{dt_{dist}}.$$

La formule newtonienne est :

$$\mu = m_0.r^2.\frac{d\theta}{dt_{dist}}.$$

Pour que les deux formules s'identifient, sachant que $\alpha_0 = 1$, il faut que la condition suivante soit vérifiée :

$$\gamma_0 = 1.$$

Montrons maintenant que $\beta_0 = 1$. Nous pourrions dire simplement que la métrique doit tendre vers celle de Minkowski à l'infini, donc α, β et γ doivent tendre vers 1, cequi signifie que $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 1$.

On peut aussi reprendre la deuxième équation des géodésiques :

$$-\frac{d}{ds}\left(\beta.\frac{dr}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{\partial r}.$$

Supposons que le mobile soit, par exemple, une bille lâchée avec un moment cinétique nul : $\frac{d\theta}{ds} = 0$.

$$-\frac{d\beta}{ds}.\frac{dr}{ds} - \beta.\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial r}\ ;$$

$$-\frac{d\beta}{dr}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \beta.\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial r}\ ;$$

$$-\frac{1}{2}.\dot{\beta}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \beta.\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\dot{\alpha}.$$

Nous avons posé : $\dot{\alpha} = \frac{\partial\alpha}{\partial r}$ et $\dot{\beta} = \frac{\partial\beta}{\partial r}$.
Multiplions les deux membres par $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$:

$$-\frac{1}{2}.\frac{d\beta}{dr}.\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \beta.\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{2}.c^2.\dot{\alpha}.$$

Comme $\alpha \approx 1 - \frac{2.k}{r}$ au premier ordre, on a $\dot{\alpha} \approx \frac{2.k}{r^2} = \frac{2.G.M}{c^2.r^2}$ (au deuxième ordre), donc :

$$-\frac{1}{2}.\frac{d\beta}{dr}.\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \beta.\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{G.M}{r^2}.$$

Supposons maintenant que le mobile soit lâché avec une vitesse nulle : $\frac{dr}{dt} = 0$. On a alors :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{\beta}.\frac{G.M}{r^2}.$$

Il est clair qu'on doit avoir $\beta_0 = 1$ pour que cette égalité s'identifie à la loi de la chute des corps de Galilée (reprise par Newton).

28 Le formalisme post-newtonien paramétrisé

Pour faire un tri entre les nombreuses théories métriques de la gravitation, une technique a été développée : il s'agit du formalisme post-newtonien paramétrisé.

Le procédé consiste à écrire la métrique sous sa forme isotrope, puis à développer α et β en série, afin de déterminer les coefficients α_0, α_1, α_2, β_0, β_1, β_2... Les trois grands tests classiques de la gravitation (déflexion de la lumière au voisinage d'un corps massif, précession du périhélie, effet Shapiro), incontestables car confirmés par l'expérience, imposent des contraintes sur ces coefficients, ce qui permet de tester la validité des théories.

Voyons d'abord la métrique de Schwarzschild. Nous devons prendre sa forme isotrope, c'est-à-dire celle d'Eddington.

Posons : $x = \frac{k}{2.r}$. D'après ce que nous avons vu précédemment :

$$\alpha = \frac{\left(1 - \frac{k}{2.r}\right)^2}{\left(1 + \frac{k}{2.r}\right)^2} = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad \beta = \left(1 + \frac{k}{2.r}\right)^4 = (1+x)^4.$$

Calculons les dérivées de α et β par rapport à x en $x = 0$.

$$\alpha'_x = \frac{-2.\left(1+x\right)^2.\left(1-x\right) - 2.\left(1-x\right)^2.\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)^4} \ ;$$

$$\alpha'_x = \frac{-2.(1+x).(1-x).(1+x+1-x))}{\left(1+x\right)^4} = -4.\frac{1-x}{\left(1+x\right)^3} \ ;$$

$$\alpha''_x = -4.\frac{-\left(1+x\right)^3 - 3.\left(1-x\right).\left(1+x\right)^2}{\left(1+x\right)^6} = -4.\frac{\left(1+x\right)^2.(-1-x-3+3.x)}{\left(1+x\right)^6} \ ;$$

$$\alpha''_x = -4.\frac{2.x-4}{(1+x)^4} = -8.\frac{x-2}{(1+x)^4}\ ;$$

$$\alpha'''_x = -8.\frac{(1+x)^4 - 4.(x-2).(1+x)^3}{(1+x)^8} = -8.\frac{(1+x)^3.(1+x-4.x+8)}{(1+x)^8}\ ;$$

$$\alpha'''_x = -8.\frac{9-3.x}{(1+x)^5} = -24.\frac{3-x}{(1+x)^5}.$$

On a donc : $\alpha(0) = 1, \quad \alpha'_x(0) = -4, \quad \alpha''_x(0) = 16, \quad \alpha'''_x(0) = -72.$

Appliquons la formule de Mac Laurin, à l'ordre 3 :

$$\alpha = \alpha(0) + \frac{\alpha'_x(0)}{1!}.x + \frac{\alpha''_x(0)}{2!}.x^2 + \frac{\alpha'''_x(0)}{3!}.x^3 + o(x^3)\ ;$$

$$\alpha = 1 + \frac{-4}{1}.\frac{k}{2.r} + \frac{16}{2}.\frac{k^2}{4.r^2} + \frac{-72}{6}.\frac{k^3}{8.r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\ ;$$

$$\alpha = 1 - 2.\frac{k}{r} + 2.\frac{k^2}{r^2} - \frac{3}{2}.\frac{k^3}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

$$\beta'_x = 4.(1+x)^3\ ;$$
$$\beta''_x = 12.(1+x)^2\ ;$$
$$\beta'''_x = 24.(1+x).$$

On a donc : $\beta(0) = 1, \quad \beta'_x(0) = 4, \quad \beta''_x(0) = 12, \quad \beta'''_x(0) = 24.$

Appliquons la formule de Mac Laurin, à l'ordre 3 :

$$\beta = \beta(0) + \frac{\beta'_x(0)}{1!}.x + \frac{\beta''_x(0)}{2!}.x^2 + \frac{\beta'''_x(0)}{3!}.x^3 + o(x^3)\ ;$$

$$\beta = 1 + \frac{4}{1}.\frac{k}{2.r} + \frac{12}{2}.\frac{k^2}{4.r^2} + \frac{24}{6}.\frac{k^3}{8.r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\ ;$$

$$\beta = 1 + 2.\frac{k}{r} + \frac{3}{2}.\frac{k^2}{r^2} + \frac{1}{2}.\frac{k^3}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Passons à la métrique triviale de Ni. On a :

$$\alpha = e^{-\frac{2.k}{r}} = 1 - \frac{1}{1!}.\frac{2.k}{r} + \frac{1}{2!}.\frac{4.k^2}{r^2} - \frac{1}{3!}.\frac{8.k^3}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\ ;$$

$$\alpha = 1 - 2.\frac{k}{r} + 2.\frac{k^2}{r^2} - \frac{2}{3}.\frac{k^3}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\ ;$$

$$\beta = e^{\frac{2.k}{r}} = 1 + \frac{1}{1!}.\frac{2.k}{r} + \frac{1}{2!}.\frac{4.k^2}{r^2} + \frac{1}{3!}.\frac{8.k^3}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right)\ ;$$

$$\beta = 1 + 2.\frac{k}{r} + 2.\frac{k^2}{r^2} + \frac{2}{3}.\frac{k^3}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

Comparons maintenant les développements de α obtenus pour les deux métriques. On voit que les trois premiers coefficients sont identiques. On a : $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -2.k$, $\alpha_2 = 2.k^2$.

Comparons les développements de β. On voit que les deux premiers coefficients sont identiques. On a : $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2.k$.

Or il se trouve que les contraintes pour qu'une métrique soit valide (c'est-à-dire compatible avec les observations concernant les trois grands tests classiques) sont précisément : $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -2.k$, $\alpha_2 = 2.k^2$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2.k$.

Nous pouvons donc affirmer que la métrique triviale de Ni, ainsi que la métrique de Schwarzschild, sont compatibles avec les tests classiques.

Mais il est clair que toute métrique isotrope homogène est disqualifiée, car les contraintes ci-dessus imposent que α_1 et β_1 soient opposés, alors que dans une métrique homogène ils sont égaux.