Ni ou Schwarzschild ?

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, mars 2008)

Table des matières

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

01) Gravitation relativiste : introduction

2 Résumé

Nous cherchons ici à résumer les propriétés essentielles des métriques de Schwarzschild et de Ni, et nous insistons sur les différences qui nous semblent fondamentales.

3 Métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild est définie par :

$\alpha = 1 - \frac{2.k}{r} = 1 - \frac{2.G.M}{c^2.r}$, $\beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1-\frac{2.k}{r}}$ et $\gamma = 1.$

Elle s'écrit donc :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2.k}{r}\right).c^2.dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2.k}{r}} - r^2.d\theta^2 - r^2.sin^2\ \theta.d\phi^2.$$

Elle est à la fois symétrique (puisque $\beta = \frac{1}{\alpha}$) et radiale (puisque $\gamma = 1$).

Voici sa matrice covariante :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2k}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-\frac{2k}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2.sin^2\ \theta \end{pmatrix}.$$

...et sa matrice contravariante :

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\frac{2k}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2k}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2.sin^2\ \theta} \end{pmatrix}.$$

Cette métrique respecte évidemment les contraintes de la limite newtonienne. D'autre part, d'après ce que nous avons vu au sujet des géodésiques, l'énergie et le moment cinétique se calculent ainsi (d'après les conclusions tirées des équations 1) et 3) des géodésiques, dans lesquelles on remplace α par $1 - \frac{2.k}{r}$) :

$$\begin{cases} E = m_0.c^2.\sqrt{1 - \frac{2.G.M}{c^2.r}}.ch\frac{w}{c} = m_0.c^2.\frac{\sqrt{1-\frac{2.k}{r}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ; \\ \\ \mu = \frac{m_0.r^2}{\sqrt{1-\frac{2.k}{r}}}.\frac{d\theta}{dt_{dist}}.ch\frac{w}{c} = \frac{m_0.r^2}{\sqrt{1-\frac{2.k}{r}}.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mu}{E} = \frac{1}{1-\frac{2.k}{r}}.\frac{r^2}{c^2}.\frac{d\theta}{dt} = c^{te} \ ; \\ \\ \mu.E = m_0^2.c^2.r^2.ch^2\,\frac{w}{c}.\frac{d\theta}{dt} = c^{te}. \end{cases}$$

On voit que l'énergie s'annule pour $r = \frac{2.G.M}{c^2}$; elle n'est pas définie pour $r < \frac{2.G.M}{c^2}$, ce qui soulève des problèmes considérables.

Revenons sur la solution que nous avons apportée au paradoxe de Schild. Nous appelons α' le coefficient de dilatation du temps (nombe positif), et nous avons montré que α (premier coefficient de la métrique) vérifie : $\alpha = \alpha'^2$ (nombre positif, lui aussi). Ici, nous avons $\alpha = 1 - \frac{2k}{r}$, nombre qui devient négatif pour $r < 2k$. Il est clair que la métrique de Schwarzschild viole les règles sur lesquelles nous avons basé notre étude ; elle est en contradiction avec notre interprétation du critère de Schild... à moins d'envisager que le coefficient de dilatation du temps (α') puisse avoir un carré négatif, autrement dit que le temps, à l'intérieur des trous noirs, soit imaginaire !

Rappelons aussi qu'au début de ce travail, dans le document "Gravitation relativiste", un raisonnement très simple, basé sur la théorie de Newton et la relativité restreinte, nous a conduit à poser : $\alpha = e^{-\frac{2k}{r}}$. Les métriques qui respectent cette règle sont appelées : métriques pré-relativistes. Ce n'est pas le cas de la métrique de Schwarzschild, qui viole cette règle de manière évidente.

La vitesse de libération est donnée par :

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1-\alpha} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2.k}{r}\right)} \ ;$$

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{\frac{2.k}{r}}.$$

Donc, pour $r < 2.k$, la vitesse de libération dépasse la vitesse de la lumière. Comme il s'agit d'une vitesse évaluée par un observateur local, et que la relativité restreinte est valable localement, on peut en déduire que la "planète" ne peut pas se libérer de la gravité du corps central.

En gravitation newtonienne, la vitesse de libération est exactement la même, donc on rencontre le même problème pour $r < 2.k$. Ce problème a été décrit sous le nom de "trou noir". Il avait déjà été soulevé par Laplace.

Calculons maintenant la vitesse circulaire. Pour l'observateur distant, elle est donnée par la formule :

$$\left(\frac{v_{c(dist)}}{c}\right)^2 = \frac{r^2.\frac{\partial \alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}}$$

et pour l'observateur local, par la formule :

$$\left(\frac{v_{c(loc)}}{c}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}.\frac{r^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}}.$$

Nous avons : $\alpha = 1-\frac{2k}{r}$, $\beta = \left(1-\frac{2k}{r}\right)^{-1}$, $\gamma = 1$, $\frac{d\alpha}{dr} = \frac{2k}{r^2}$, $\frac{d\beta}{dr} = -\frac{2k}{r^2}.\left(1-\frac{2k}{r}\right)^{-2}$, $\frac{d(\gamma.r^2)}{dr} = 2r$. Faisons les substitutions :

$$\left(\frac{v_{c(dist)}}{c}\right)^2 = \frac{r^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}} = \frac{r^2.\frac{2k}{r^2}}{2r} = \frac{k}{r}, \quad \text{donc :}$$

$$\frac{v_{c(dist)}}{c} = \sqrt{\frac{k}{r}}.$$

$$\frac{v_{c(loc)}}{c} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}}.\frac{v_{c(dist)}}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}}.\sqrt{\frac{k}{r}} = \sqrt{\frac{k}{r-2k}}.$$

On voit que pour $r = 3k$, on a : $\frac{v_{c(loc)}}{c} = 1$, donc $v_{c(loc)} = c$. C'est la dernière orbite stable.

Sur une orbite circulaire, la vitesse locale est donnée par :

$$\frac{v_c}{c} = \frac{v_{c(loc)}}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-2k}}.$$

On a donc :

$$1-\frac{v_c^2}{c^2} = 1-\frac{k}{r-2k} = \frac{r-3k}{r-2k} = \frac{1-\frac{3k}{r}}{1-\frac{2k}{r}}.$$

On peut donc préciser l'énergie circulaire E_c :

$$E_c = m_0.c^2.\frac{\sqrt{1-\frac{2.k}{r}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0.c^2.\sqrt{1-\frac{2.k}{r}}.\frac{1-\frac{2k}{r}}{1-\frac{3k}{r}} \;;$$

$$E_c = m_0.c^2.\frac{1-\frac{2.k}{r}}{\sqrt{1-\frac{3.k}{r}}}.$$

Posons : $\overline{E}_c = \frac{E_c}{m_0.c^2} = \frac{1-\frac{2.k}{r}}{\sqrt{1-\frac{3.k}{r}}}$ (énergie réduite) et dérivons cette expression par rapport à r :

$$\frac{d\overline{E}_c}{dr} = \frac{\frac{2.k}{r^2}.\sqrt{1-\frac{3.k}{r}} - \left(1-\frac{2.k}{r}\right).\frac{1}{2}.\frac{3.k}{r^2}.\left(1-\frac{3.k}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{3.k}{r}} \;;$$

$$\frac{d\overline{E}_c}{dr} = \frac{\frac{2.k}{r^2}.\left(1-\frac{3.k}{r}\right)-\left(1-\frac{2.k}{r}\right).\frac{3.k}{2.r^2}}{\left(1-\frac{3.k}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2.k}{r^2}-\frac{6.k^2}{r^3}-\frac{3.k}{2r^2}+\frac{3.k^2}{r^3}}{\left(1-\frac{3.k}{r}\right)^{\frac{3}{2}}}\ ;$$

$$\frac{d\overline{E}_c}{dr} = \frac{\frac{k}{2r^2}-\frac{3.k^2}{r^3}}{\left(1-\frac{3.k}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{k}{2r^2}.\left(1-\frac{6k}{r}\right)}{\left(1-\frac{3.k}{r}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit que cette dérivée est positive pour $r > 6k$, nulle pour $r = 6k$, négative pour $6k > r > 3k$. Lorsque r décroît de $+\infty$ à $6k$, l'énergie circulaire réduite $\overline{E}_c = \frac{1-\frac{2.k}{r}}{\sqrt{1-\frac{3.k}{r}}}$ décroît de 1 à $\frac{1-\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{2.\sqrt{2}}{3} \approx 0,9428$. Lorsque r décroît de $6k$ à $3k$, $\overline{E}_c$ croît de $0,9428$ environ à $+\infty$. Pour $r < 3k$, $\overline{E}_c$ n'est pas défini.

4 Tenseur de Ricci en métrique de Schwarzschild

Nous avons déjà calculé ce tenseur.

En coordonnées sphériques, les coordonnées covariantes (respectivement : mixtes, contravariantes) du tenseur de Ricci dans le vide, dans le voisinage d'un point matériel, calculées selon la métrique de Schwarzschild, s'expriment par la matrice suivante :

$$(R_{ij}) = (R^i_j) = (R^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toutes les composantes sont nulles !

5 Propriété fondamentale de la métrique de Schwarzschild

Rappelons ce théorème démontré dans le document sur les métriques :

Théorème 1 *La seule métrique (supposée éligible, c'est-à-dire respectant la limite newtonienne et en accord avec le formalisme post-newtonien paramétrisé) qui soit à la fois symétrique et radiale, et ayant un tenseur de Ricci identiquement nul, est la métrique de Schwarzschild.*

Le principal intérêt de la métrique de Schwarzshild est d'avoir un tenseur de Ricci identiquement nul. En raison de la multi-linéarité des tenseurs, si un tenseur est nul dans un repère, alors il est nul dans tous les autres repères.

Donc une loi de la forme $T = 0$ (où T est un tenseur quelconque) se conserve automatiquement par changement de repère (ou, plus précisément, par toute recombinaison linéaire des coordonnées locales). On dit que c'est une loi totalement covariante.

Lorsqu'on étudie la relativité restreinte, on dit qu'une loi est relativiste si elle est Lorentz-invariante, c'est-à-dire si elle est conservée par la transformation de Lorentz. Toute la relativité restreinte est basée sur cette transformation particulière.

La nullité du tenseur de Ricci est une loi accessoirement relativiste : elle est conservée par toutes les transformations linéaires des coordonnées locales, donc, entre autres, par la transformation de Lorentz, mais elle n'a aucun lien particulier avec cette transformation.

6 Métrique triviale de Ni

La métrique de Ni est caractérisée par :

$$\alpha = e^{\frac{2.\Phi}{c^2}} = e^{-\frac{2.k}{r}} \ ;$$

$$\beta = \gamma = \frac{1}{\alpha} = e^{-\frac{2.\Phi}{c^2}} = e^{\frac{2.k}{r}} \ ;$$

$$\text{avec : } k = \frac{G.M}{c^2} \text{ et : } \Phi = -\frac{G.M}{r}.$$

Elle est à la fois symétrique (puisque $\beta = \frac{1}{\alpha}$), isotrope (puisque $\gamma = \beta$) et pré-relativiste (puisque $\alpha = e^{-\frac{2.k}{r}}$). Elle s'exprime ainsi, en coordonnées polaires :

$$ds^2 = c^2 \ e^{-\frac{2k}{r}} \ dt^2 - e^{\frac{2k}{r}}.\left(dr^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2 \ \theta.d\phi^2\right) \ ;$$

$$ds^2 = c^2 \ e^{\frac{2\Phi}{c^2}} \ dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}.\left(dr^2 + r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2 \ \theta.d\phi^2\right).$$

En coordonnées (localement) cartésiennes, en posant $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, on pourra écrire :

$$ds^2 = c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt^2_{dist} - e^{\frac{2k}{r}} dx^2_{dist} - e^{\frac{2k}{r}} dy^2_{dist} - e^{\frac{2k}{r}} dz^2_{dist} \ ;$$

$$ds^2 = c^2 \ e^{\frac{2\Phi}{c^2}} \ dt^2_{dist} - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} \ dx^2_{dist} - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} \ dy^2_{dist} - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} \ dz^2_{dist}.$$

$$ds^2 = c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dl^2.$$

On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dt, & dr, & d\theta, & d\phi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c^2\ e^{\frac{2\Phi}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}.r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}.r^2.sin^2\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \ ;$$

ou, si on préfère :

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dt, & dr, & d\theta, & d\phi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c^2\ e^{-\frac{2.k}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2.k}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\frac{2.k}{r}}.r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\frac{2.k}{r}}.r^2.sin^2\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} .$$

Supposons qu'on veuille modifier légèrement la métrique que nous avons trouvée, en jouant sur les exposants ; écrivons-la sous la forme générale :

$$ds^2 = c^2 e^{\frac{mk}{r}} dt^2 - e^{\frac{nk}{r}} dr^2 - e^{\frac{pk}{r}}.(dy^2 + dz^2)$$

où m, n, p sont trois constantes. Alors, selon le formalisme post-newtonien paramétrisé, pour que la déflexion de la lumière soit conforme aux observations, on doit avoir : $n - m = 4$. (Ceci peut se prouver par un calcul analogue à celui de la section : "Déflexion de la lumière".) Pour obtenir la bonne précession du périhélie de Mercure, la condition est : $n + p - m = 6$. (On le montre en généralisant le calcul de la section : "Précession du périhélie".) Comme le critère de Schild impose clairement que $m = -2$, on a nécessairement : $n = p = 2$. Il est donc inutile d'essayer de modifier ces exposants.

On pourrait être tenté de simplifier cette métrique en posant : $\alpha = \beta = \gamma = e^{\frac{2k}{r}}$, et en écrivant, par conséquent :

$$ds^2 = c^2 e^{\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dx^2 - e^{\frac{2k}{r}}.(dy^2 + dz^2) \ ;$$

ce qui entraînerait :

$$ds^2 = e^{\frac{2k}{r}}.\left(c^2.dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\right), \text{ et, par conséquent :}$$

$$ds^2 = e^{\frac{2k}{r}}.\left(c^2.dt^2 - dl^2\right) \ ;$$

$$ds = e^{\frac{k}{r}}.\sqrt{c^2.dt^2 - dl^2}.$$

Dans ce cas, le coefficient $e^{\frac{k}{r}}$ jouerait le rôle d'un "facteur d'échelle", affectant de la même façon les coordonnées spatiales et temporelles. Malheureusement, si on voulait s'engager dans cette voie, on serait vite bloqué : en effet, cette métrique n'est pas compatible avec la déviation de la lumière par les objets massifs. En effet, elle correspond au cas $m = n = p = 2$, donc $n - m = 0$, alors que la déviation de la lumière ne marche que pour $n - m = 4$. Oublions donc ce genre de simplification, et retenons que la gravitation, par nature, opère une distinction essentielle entre l'espace et le temps.

Comme on va le voir plus loin, cette métrique de Ni s'impose, pour des raisons particulièrement simples, comme un candidat privilégié, dès lors qu'on cherche à construire une théorie de la gravitation compatible avec la relativité restreinte, en se basant sur la notion de métrique.

7 Equations des géodésiques en métrique de Ni

Nous voudrions maintenant étudier les géodésiques en métrique de Ni. Nous allons utiliser les formules générales démontrées précédemment.

La métrique (toujours supposée à symétrie sphérique, et statique, donc indépendante du temps) étant formulée en coordonnées polaires, nous avions supprimé une coordonnée spatiale pour alléger les calculs :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.d\theta^2.$$

D'après ce que nous avons vu dans le document sur les métriques, les équations des géodésiques s'écrivent alors, de manière générale :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d}{ds}\left(\alpha.\frac{c.dt}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{c.\partial t} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{c.\partial t}\ ; \\ 2)\ -\frac{d}{ds}\left(\beta.\frac{dr}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{\partial r}\ ; \\ 3)\ -\frac{d}{ds}\left(\gamma.r^2.\frac{d\theta}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} - \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{\partial\beta}{\partial\theta} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.\frac{\partial\left(\gamma.r^2\right)}{\partial\theta}. \end{cases}$$

Dans le cas de la métrique de Ni :

$\alpha = e^{-\frac{2k}{r}}$, donc : $\frac{\partial\alpha}{c.\partial t} = 0$, $\frac{\partial\alpha}{\partial r} = \frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} = 0$;

$\beta = e^{\frac{2k}{r}}$, donc : $\frac{\partial\beta}{c.\partial t} = 0$, $\frac{\partial\beta}{\partial r} = -\frac{2k}{r^2}.e^{\frac{2k}{r}}$, $\frac{\partial\beta}{\partial\theta} = 0$;

$\gamma.r^2 = e^{\frac{2k}{r}}.r^2$, donc : $\frac{\partial(\gamma.r^2)}{c.\partial t} = 0$, $\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r} = 2(r-k).e^{\frac{2k}{r}}$, $\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial\theta} = 0$.

Faisons les substitutions dans les équations des géodésiques ; il vient :

$$\begin{cases} 1)\ \frac{d}{ds}\left(e^{-\frac{2k}{r}}.\frac{c.dt}{ds}\right) = 0\ ; \\ 2)\ -\frac{d}{ds}\left(e^{\frac{2k}{r}}.\frac{dr}{ds}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{c.dt}{ds}\right)^2.\frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}} + \frac{1}{2}.\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.\frac{2k}{r^2}.e^{\frac{2k}{r}} - \frac{1}{2}.\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2.2(r-k).e^{\frac{2k}{r}}\ ; \\ 3)\ -\frac{d}{ds}\left(e^{\frac{2k}{r}}.r^2.\frac{d\theta}{ds}\right) = 0. \end{cases}$$

La première égalité signifie que la quantité $e^{-\frac{2k}{r}}.\frac{c.dt}{ds}$ est constante sur la géodésique. Nous l'avons déjà rencontrée précédemment, et nous savons qu'elle exprime une loi physique bien connue : la conservation de l'énergie (même si nous ne savons pas exactement de quelle énergie il s'agit : nous aurons l'occasion d'en reparler dans la section sur le modèle relativiste des systèmes binaires). Elle provient du fait que les dérivées partielles de α, β et γ par rapport à t sont nulles (champ statique). Attention : cette condition n'est réalisée que dans un repère immobile par rapport au corps central !

La troisième signifie que la quantité $e^{\frac{2k}{r}}.r^2.\frac{d\theta}{ds}$ est, elle aussi, constante. Nous l'avons déjà rencontrée. Nous savons que cette égalité exprime la conservation du moment cinétique. Elle provient du fait que les dérivées partielles de α, β et γ par rapport à θ sont nulles (champ à symétrie sphérique).

Examinons la seconde égalité.

Dans le document sur les métriques, nous avons montré que cette équation équivaut, si la métrique est isotrope et symétrique, à la suivante :

$$\frac{dp_r}{dt} = -m.c^2.\frac{d\alpha}{2.\alpha.dr}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{m.v_y^2}{r}.$$

Rappelons que $\overline{p}_r = \beta.\frac{dr}{ds}$ (impulsion réduite, selon la direction radiale) et que $p_r = m_0.c^2.\overline{p}_r = m_0.c^2.\beta.\frac{dr}{ds}$ (impulsion non réduite).

On note v_y la vitesse de la planète perpendiculairement au rayon vecteur joignant le Soleil à la planète.

Remplaçons α par $e^{-\frac{2.k}{r}} = e^{-\frac{2.G.M}{c^2.r}}$. On a : $d\alpha = -2.k.e^{-\frac{2.k}{r}}.d\left(\frac{1}{r}\right) = -2.k.\alpha.\frac{-dr}{r^2} = \frac{2.k}{r^2}.\alpha.dr$, et par conséquent $\frac{d\alpha}{2.\alpha.dr} = \frac{k}{r^2} = \frac{G.M}{r^2.c^2}$; l'équation devient :

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{G.M.m}{r^2}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{m.v_y^2}{r}.$$

Le terme $-\frac{G.M.m}{r^2}.\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$ correspond à la force gravitationnelle de Newton, mais on peut noter deux différences : d'une part la masse m est évaluée par l'observateur distant, donc elle est affectée par la vitesse de la planète et par le potentiel ; d'autre part, le facteur $\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$ nous est imposé par le fait que la gravité agit comme une pseudo-accélération ($\frac{d\vec{w}}{dt}$) et non comme une accélération ($\frac{d\vec{v}}{dt}$) : ceci a été expliqué longuement dans le document sur les métriques (section sur les géodésiques).

Dans le terme $\frac{m.v_y^2}{r}$, $\frac{v_y^2}{r}$ est précisément l'expression de l'accélération centrifuge prévue par la théorie de Newton, mais la vitesse v_y est évaluée localement ;

$\frac{m.v_y^2}{r}$ est la "force" centrifuge ; m est la masse de la planète évaluée par l'observateur distant.

Dans la suite, nous utiliserons les équations suivantes :

$$\begin{cases} 1)\ ds^2 = c^2\ e^{-\frac{2k}{r}}\ dt^2 - e^{\frac{2k}{r}}\ dr^2 - e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ d\theta^2 \text{ (équation de la métrique) ;} \\ 2)\ \overline{E} = \frac{E}{m_0 c^2} = e^{-\frac{2k}{r}}\ \frac{cdt}{ds} = \text{ constante (conservation de l'énergie) ;} \\ 3)\ \overline{\mu} = \frac{\mu}{m_0.c^2} = e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ \frac{d\theta}{c.ds} = \text{ constante (conservation du moment cinétique) ;} \\ 4)\ \frac{dp_r}{dt} = -\frac{G.M.m}{r^2}.\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{m.v_y^2}{r} \text{ (première loi de Newton adaptée).} \end{cases}$$

Nous avions déjà établi les formules 2 et 3 avant de parler de géodésiques ; le fait qu'un raisonnement basé uniquement sur les géodésiques nous conduise précisément aux mêmes lois de conservation (conservation de l'énergie et conservation du moment cinétique) nous conforte dans l'idée que ces lois sont bien les clés de l'étude du système solaire : la cohérence de ces équations avec la notion de géodésique est parfaite jusqu'ici. Elles serviront de base à la suite de notre travail.

Dans le calcul ci-dessus, il apparaît clairement que l'énergie se conserve uniquement parce-que le champ est statique : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$. Quand le champ ne sera plus statique, l'énergie du mobile pourra varier. Ceci ne doit pas nous surprendre. Pensons par exemple à l'"effet catapulte" : lorsqu'on désire envoyer une sonde spatiale sur une orbite d'évasion du système solaire, il n'est pas nécessaire de lui fournir d'emblée une vitesse égale à la vitesse d'évasion. L'astuce est de lui fournir seulement l'énergie convenable pour atteindre une grosse planète comme Jupiter. Ensuite, en utilisant le sillage de cette planète, la sonde est propulsée sur une orbite d'évasion. Le "sillage" de Jupiter est une région de l'espace où $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ est positif, ce qui permet à la sonde de faire une provision d'énergie. Il n'y a pas de violation du principe de conservation de l'énergie, à condition que l'énergie récupérée par la sonde soit prélevée sur l'énergie de Jupiter.

Le problème de la conservation de l'énergie ne se pose pas pour un élément d'un système, mais pour le système dans son ensemble. Nous en reparlerons dans le document sur les systèmes doubles.

Ces équations sont suffisantes pour aborder l'étude du système solaire et des systèmes doubles ; voir les documents sur ces deux sujets.

8 Tenseur de Ricci en métrique de Ni

Nous avons déjà calculé le tenseur de Ricci de la métrique de Ni.

En coordonnées sphériques, les coordonnées covariantes (respectivement : mixtes, contravariantes) du tenseur de Ricci dans le vide, dans le voisinage d'un point matériel, calculées selon la métrique triviale de Ni, s'expriment par les trois matrices suivantes :

$$(R_{ij}) = \frac{2k^2}{r^4} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$(R^i_j) = -\frac{2k^2}{r^4} . e^{-\frac{2k}{r}} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$(R^{ij}) = \frac{2k^2}{r^4} . e^{-\frac{4k}{r}} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nous remarquons que, sur les 16 composantes de ce tenseur, 15 sont nulles. La seule composante non nulle est celle qui concerne la coordonnée r, et elle seule. Pour cette raison, nous dirons que ce tenseur est radial.

Nous reparlerons de ces résultats dans la section "Interprétation".

9 Propriétés fondamentales de la métrique de Ni

Dans la métrique de Ni, nous avons : $R_{11} = R_{33} = R_{44} = 0$, et (d'après notre calcul général sur les métriques isotropes symétriques) :

$$R_{22} = -\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha.r}.$$

On a vu que $\alpha = e^{-\frac{2.k}{r}}$, $\quad \dot{\alpha} = \frac{2.k}{r^2}.e^{-\frac{2.k}{r}}$, et $\quad \ddot{\alpha} = \left(\frac{4.k^2}{r^4} - \frac{4.k}{r^3}\right).e^{-\frac{2.k}{r}}$. On a donc :

$$R_{22} = -\frac{2.k^2}{r^4} + \frac{2.k}{r^3} + \frac{4.k^2}{r^4} - \frac{2.k}{r^3} = \frac{2.k^2}{r^4} \ ;$$

$$(R_{11},\ R_{22},\ R_{33},\ R_{44}) = \left(0,\ \frac{2.k^2}{r^4},\ 0,\ 0\right).$$

On peut penser que la courbure est "gérée" par le quadrivecteur :

$$\Gamma = \left(0,\ -\frac{k}{r^2},\ 0,\ 0\right),$$

qui est étroitement apparenté au vecteur accélération de Newton.

Ce quadrivecteur s'identifie à ce que nous avons appelé le "flux d'information" - car nous supposons que chaque corps massif doit être capable d'agir sur l'espace-temps qui l'entoure, qui est le support d'un "champ gravitationnel", entité physique qui a la propriété de transmettre une "information". Sur la nature de cette information, nous avons expliqué pourquoi nous l'identifions à un énergie-impulsion virtuelle, qui possède des propriétés "calquées" sur celles de l'énergie-impulsion réelle (comme le papier calque qui permet de reproduire une image en transmettant l'information nécessaire).

C'est la combinaison (quadrivectorielle) de ces flux qui construit le quadrivecteur d'entraînement (ou potentiel quadrivectoriel), qui nous semble avoir les qualités requises pour servir de base à une une théorie de la gravitation, qui sera étroitement relativiste, car basée sur la lorentz-invariance. Mais il faudra alors renoncer au rêve de covariance totale.

En effet, le simple fait de baser une théorie sur un quadrivecteur fait automatiquement apparaître des repères privilégiés.

Parmi les nombreuses propriétés de la métrique de Ni, celles qui nous semblent les plus fondamentales sont les suivantes :

- elle est isotrope ($\beta = \gamma$) ;

- son tenseur de Ricci est radial ($R_1^1 = R_3^3 = R_4^4 = 0$, $R_2^2 \neq 0$), comme nous venons de le rappeler ;

- elle se base sur l'existence d'un potentiel $\Phi = -\frac{G.M}{r}$ qui est défini à une constante près, et n'a donc qu'une valeur relative (l'égalité $\Phi = 0$ n'a pas de signification absolue), et qui possède, de plus, une propriété très remarquable : son d'alembertien est nul dans le vide ;

- elle est symétrique ($\alpha.\beta = 1$).

Dans le document sur les métriques, nous avons étudié les métriques à symétrie sphérique, de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.(d\theta^2 + sin^2\theta.d\phi^2),$$

où α, β et γ sont trois fonctions du potentiel newtonien Φ.

Nous avons obtenu un certain nombre de théorèmes qui méritent d'être retenus ; par exemple :

Théorème 2 *La seule métrique (supposée éligible) qui soit symétrique et isotrope et ayant un tenseur de Ricci radial est la métrique triviale de Ni.*

Mais les plus intéressants se trouvent dans le document sur le potentiel :

Théorème 3 *Si on suppose que le potentiel a un d'alembertien nul dans le vide ($\Box\Phi = 0$) et que la métrique (supposée "éligible", c'est-à-dire compatible avec la limite newtonienne et avec le formalisme post-newtonien paramétrisé) a un tenseur de Ricci radial ($R^1_1 = R^3_3 = R^4_4 = 0$, $R^2_2 \neq 0$), alors il ne peut s'agir que de la métrique triviale de Ni.*

Théorème 4 *Si on suppose que le potentiel est relatif (ce qui entraîne que les composantes du tenseur de Ricci ne dépendent pas directement des fonctions α, β et γ ou de leurs logarithmes, mais seulement de leurs dérivées), et que la métrique est "éligible", alors il ne peut s'agir que de la métrique de Ni.*

Le fait que la métrique de Ni soit pré-relativiste est encore une propriété importante, mais on peut la démontrer à partir des propriétés précédentes.

10 Comparaison des métriques de Schwarzschild et de Ni

Etudions maintenant les rapports entre les métriques de Ni et de Schwarzschild.

Prenons comme base de départ la métrique triviale de Ni au voisinage d'un corps massif, en coordonnées polaires :

$$ds^2 = c^2.e^{\frac{2\Phi}{c^2}}.dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}.dr^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}.r^2.d\theta^2.$$

Serait-il possible de modifier légèrement cette métrique, en s'inspirant des idées d'Einstein ?

Considérons d'abord un observateur tombant vers le Soleil en ligne droite (sa vitesse étant supposée nulle à l'infini). Rappelons-nous l'expérience de pensée d'Einstein : un physicien enfermé dans un ascenseur en chute libre se croit immobile. S'il croise sur son chemin des "observateurs locaux" (immobiles par rapport au Soleil), il sera en désaccord avec eux sur les mesures de distances dans la direction radiale (d'après la relativité restreinte), mais il y aura accord sur les distances élémentaires perpendiculaires au vecteur vitesse. La chute libre de l'observateur va donc modifier son évaluation des distances selon la direction radiale seulement ; donc, selon le principe d'équivalence fort (interprétation d'Einstein), la présence d'une masse ponctuelle au centre d'un cercle doit modifier le rayon de ce cercle, mais pas son périmètre. Cette remarque va nous amener à supprimer le coefficient $e^{-\frac{2.\Phi}{c^2}}$ devant $r^2\ d\theta^2$ dans le dernier terme de notre métrique, qui devient donc :

$$ds^2 = c^2.e^{\frac{2\Phi}{c^2}}.dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}.dr^2 - r^2.d\theta^2.$$

Considérons ensuite la seconde expérience de pensée d'Einstein : le physicien se trouve maintenant sur la plate-forme tournante, à la distance r du centre O ; il estime que la force centrifuge qu'il subit est une force gravitationnelle. La vitesse est : $v = r\omega$ (où ω désigne la vitesse angulaire) ; si on désigne par Φ la différence de potentiel entre P et O, c'est-à-dire le travail de la force centrifuge entre P et O, on a : $\Phi = -\frac{r^2\omega^2}{2}$; le coefficient de dilatation du temps, calculé selon la relativité restreinte, est donc : $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}} = \sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}$. Ce physicien va estimer que cette distorsion du temps est due au champ gravitationnel Φ ; il va donc nous suggérer de modifier notre modèle, en remplaçant $e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ par $\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}$ dans notre métrique ; le coefficient $e^{\frac{2\Phi}{c^2}}$ devient $1+\frac{2\Phi}{c^2}$, et $e^{-\frac{2\Phi}{c^2}}$ devient $\frac{1}{1+\frac{2\Phi}{c^2}}$.

Après avoir fait ces deux petites manipulations, nous obtenons la métrique suivante :

$$ds^2 = \left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right).c^2.dt^2 - \frac{1}{1+\frac{2\Phi}{c^2}}.dr^2 - r^2.d\theta^2$$

ou, si on préfère :

$$ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right).c^2.dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2GM}{rc^2}}.dr^2 - r^2.d\theta^2.$$

C'est exactement la métrique de Schwarzschild au voisinage d'un corps massif.

Nous pouvons aussi réécrire cette métrique en imaginant un repère en chute libre radiale, à la vitesse $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ (vitesse d'évasion évaluée localement). Ceci signifie que $1-\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{2GM}{rc^2}$.

Si nous notons $dl_t = r^2.d\theta^2$ une longueur infinitésimale "tangentielle", c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de la chute (qui est verticale), la métrique s'écrit :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right).c^2.dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}.dr^2 - dl_t^2.$$

Quant on passe du repère local immobile au repère local en chute libre, les mesures infinitésimales dt, dr et dl_t se transforment en dt', dr' et dl'_t. D'après la relativité restreinte :

$$\begin{cases} dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.dt = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}.dt \ ; \\ \\ dr' = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}} \ ; \\ \\ dl'_t = dl_t. \end{cases}$$

On a donc : $dt'^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \ dt^2$, $dr'^2 = \frac{1}{1-\frac{2GM}{rc^2}} \ dr^2$ et $dl'^2_t = dl_t^2$; par conséquent, la métrique peut s'écrire ainsi :

$$ds^2 = c^2.dt'^2 - dr'^2 - dl'^2_t.$$

Attention : le raisonnement que nous venons de faire ici est en contradiction avec celui que nous avions fait pour la métrique de Ni, puisqu'ici nous avons supposé que le point de vue local et le point de vue distant diffèrent, conformément aux formules de la relativité restreinte, par l'introduction d'une vitesse virtuelle égale à la vitesse d'évasion, et non par la différence de potentiel gravitationnel ; dans l'introduction de la métrique de Ni, nous avions supposé au contraire que la différence des points de vue était due uniquement à la différence de potentiel. La métrique de Ni suppose une réalité physique qui justifie les distorsions observées, tandis que dans la métrique de Schwarzschild elles sont justifiées par la géométrie seule. La relativité générale prépare ainsi l'élimination des notions de force et de potentiel gravitationnel.

La métrique de Schwarzschild se transforme (localement) en métrique de Minkowski (métrique euclidienne relativiste) par simple changement de repère (passage de l'observateur local immobile à l'observateur en chute libre). Ceci signifie que la courbure locale de l'espace-temps disparaît dans un repère convenablement choisi (en chute libre). Mais le mot "local" signifie qu'on raisonne sur des durées et distances infinitésimales ; globalement, la courbure demeure.

Posons-nous maintenant cette question : existe-t-il un changement de variables simple permettant de passer de la métrique de Schwarzschild à celle de Ni ? Dans ce cas, on pourrait considérer qu'il s'agit de deux expressions d'une même métrique. Mais non : c'est impossible, pour deux raisons au moins.

Première raison : dans la métrique de Schwarzschild, le coefficient $\frac{1}{1-\frac{2GM}{rc^2}}$ (qui multiplie dr^2, dans le second membre de la métrique) tend vers l'infini quand r tend vers $\frac{2GM}{c^2}$, ce qui fait apparaître une singularité associée à la sphère de Schwarzschild ; cette singularité n'existe pas dans la métrique de Ni, puisque le coefficient correspondant, $e^{-\frac{2GM}{rc^2}}$, ne diverge pas.

Seconde raison : appelons r_1 la distance radiale qui intervient dans la métrique de Schwarzschild, et r_2 celle qui intervient dans la métrique de Ni ; en identifiant les derniers termes des deux métriques, nous obtenons :
$r_1^2 \, d\theta^2 = e^{\frac{2k}{r_2}} \, r_2^2 \, d\theta^2$, donc : $r_1 = e^{\frac{k}{r_2}} \, r_2$.
Si nous faisons tendre r_2 vers l'infini, r_1 tend aussi vers l'infini : jusqu'ici, rien de plus normal. Mais si, maintenant, nous faisons tendre r_2 vers 0, alors r_1 ne tend pas vers 0, mais, une fois encore, vers l'infini ! Ceci entraîne qu'il est impossible d'établir une correspondance bijective entre r_1 et r_2. Les deux métriques sont fondamentalement incompatibles, du moins pour les valeurs de r proches de $\frac{2GM}{c^2}$, ou inférieures.

11 L'ascenseur d'Einstein

Nous avons déjà parlé du troisième principe d'équivalence et de la parabole de l'ascenseur d'Einstein dans le document sur les principes fondamentaux. Nous voulons montrer ici comment la métrique de Schwarzschild se relie à cette expérience de pensée.

Rappelons cette expérience de pensée : il s'agit d'un physicien enfermé dans un ascenseur soumis à des forces (traction à l'aide d'un cable, effet de la pesanteur...). Le physicien, qui ne voit pas ce qui se passe à l'extérieur, peut-il savoir si les accélérations qu'il subit sont d'origine gravitationnelle ? Cas particulier : si l'ascenseur est en chute libre, est-il en droit de conclure que la gravité n'existe plus ? La réponse d'Einstein, à première vue, semble claire : il est possible d'"effacer" la gravité en se plaçant dans un repère convenablement accéléré. Examinons les conséquences de ce postulat.

Tout d'abord, le champ gravitationnel de la Terre, du point de vue de l'observateur distant, produit, selon l'étude des métriques que nous avons développée, une dilatation du temps (coefficient $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$), une dilatation de l'espace selon la direction verticale (coefficient $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$), et une dilatation de l'espace selon les directions horizontales (coefficient $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$). Le déplacement de l'ascenseur selon la verticale produit, quant à lui, d'après la relativité restreinte, une dilatation des unités de temps (coefficient $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$), une dilatation des règles selon la direction verticale (coefficient $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1$; c'est donc une contraction) , et une dilatation de l'espace selon les directions horizontales (coefficient 1 ; c'est donc une identité). Pour que l'effet de la gravité puisse être confondu avec celui de l'accélération de l'ascenseur, il faut que ces deux effets soient identiques ; on doit donc avoir : $\alpha = 1 - \frac{v^2}{c^2}$, $\beta = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $\gamma = 1$. Cette métrique doit donc être radiale ($\gamma = 1$) et symétrique $\left(\alpha.\beta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1\right)$. Ceci élimine la métrique de Ni (qui n'est pas radiale, mais isotrope) et nous aiguille vers la métrique de Schwarzschild.

Remarquons d'abord que, selon notre étude très générale sur les métriques, on doit avoir : $\alpha = 1 - \frac{v_l^2}{c^2}$, où v_l est la vitesse de libération (ou vitesse d'évasion). Donc la vitesse figurant dans les égalités ci-dessus doit être v_l. C'est la vitesse de libération estimée localement.

Ceci n'est pas encore suffisant pour arriver de manière univoque à la métrique de Schwarzschild ; il faut encore préciser la valeur de v_l. On peut supposer que l'énergie potentielle est égale, comme chez Newton, à $-\frac{G.m.M}{r}$, et que l'énergie cinétique d'un mobile en chute libre radiale est $E_c = \frac{G.m.M}{r}$ ($E_c = 0$ à l'infini). La force subie par ce mobile est, toujours selon Newton : $F = \frac{dE_c}{dr} = -\frac{G.m.M}{r^2}$, ou encore : $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m.v)}{dt} = m.\frac{dv}{dt}$. Ce qui entraîne :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{G.M}{r^2} \ ;$$

$$dv = -\frac{G.M}{r^2}.dt \ ;$$

$$2.v.dv = -2.v.\frac{G.M}{r^2}.dt = -2.\frac{dr}{dt}.\frac{G.M}{r^2}.dt = -2.G.M.\frac{dr}{r^2} \ ;$$

$$d(v^2) = 2.G.M.d\left(\frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$v^2 = \frac{2.G.M}{r} + c^{te}.$$

La vitesse de libération a la particularité de s'annuler à l'infini, donc :

$$v_l^2 = \frac{2.G.M}{r} \ ;$$

$$v_l = \sqrt{\frac{2.G.M}{r}}.$$

Il ne reste plus qu'à reporter la valeur de v_l dans les égalités ci-dessus. On obtient :

$$\alpha = 1 - \frac{2.G.M}{r.c^2}, \quad \beta = \frac{1}{1 - \frac{2.G.M}{r.c^2}} \quad \text{et} \quad \gamma = 1.$$

Ce "bricolage" nous conduit précisément à la métrique de Schwarzschild. Une banale métrique parmi d'autres ? Non ! C'est la seule métrique à symétrie sphérique qui annule le tenseur de Ricci dans le vide ! Le raisonnement un peu bancal qui précède conduit à la métrique de Schwarzschild, qui est le marchepied vers cette autre idée, lumineuse : et si le tenseur de Ricci était la clé de la gravitation ?

Pourquoi avons-nous reproduit ci-dessus, intégralement, le calcul newtonien de la vitesse de libération ? C'est surtout pour montrer ses défauts. Le premier est qu'il ne fait pas la distinction entre les quantités qui sont évaluées par l'observateur local et celles qui sont évaluées par l'observateur distant (comme r). Einstein non plus n'a jamais fait cette distinction. Mais peu importe : le but est de tirer des idées de la théorie de Newton pour la dépasser ensuite.

12 Energie et impulsion en métrique de Ni

Dans la suite, c'est la métrique de Ni que nous étudierons.

Dans le document sur les métriques à symétrie sphérique, nous avons abordé un certain nombre de propriétés, de manière générale. Nous allons en rappeler quelques-unes, et les adapter au cas particulier de la métrique de Ni, en vue d'un usage ultérieur.

D'après les équations des géodésiques, la conservation de l'énergie et du moment cinétique réduits s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} \overline{E} = e^{-\frac{2k}{r}}\ \frac{cdt}{ds} = \text{constante (conservation de l'énergie) ;} \\ \\ \overline{\mu} = e^{\frac{2k}{r}}\ r^2\ \frac{c.d\theta}{ds} = \text{constante (conservation du moment cinétique).} \end{cases}$$

D'autre part, on sait que :

$$ds = \sqrt{c^2.dt_{loc}^2 - dl_{loc}^2} = c.dt_{loc}.\sqrt{1 - \frac{dl_{loc}^2}{c^2.dt_{loc}^2}} = c.dt_{loc}.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c.dt.e^{-\frac{k}{r}}}{ch\frac{w}{c}},$$

ce qui entraîne :

$$\frac{c.dt}{ds} = e^{\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}.$$

Faisons la substitution :

$$\begin{cases} \overline{E} = e^{-\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}; \\ \\ \overline{\mu} = e^{\frac{3k}{r}}.ch\frac{w}{c}.r^2.\frac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

En multipliant $\overline{E}$ par $m_0.c^2$ et $\overline{\mu}$ par m_0, on obtient l'énergie et le moment cinétique non réduits :

$$\begin{cases} E = m_0.c^2.e^{-\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}\ ; \\ \\ \mu = m_0.r^2.e^{\frac{3.k}{r}}.ch\frac{w}{c}.\frac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

On voit que l'énergie est toujours définie et positive. Elle tend vers 0 quand r tend vers 0. Mais pour cela il faudrait que la masse M non nulle soit concentrée dans un volume nul, ce qui est une situation purement théorique.

On peut noter certaines relations entre l'énergie et le moment cinétique :

$$\begin{cases} \frac{\mu}{E} = e^{\frac{4.k}{r}}.\frac{r^2}{c^2}.\frac{d\theta}{dt} = c^{te} \ ; \\ \\ \mu.E = m_0^2.c^2.e^{\frac{2.k}{r}}.r^2.ch^2\frac{w}{c}.\frac{d\theta}{dt} = c^{te}. \end{cases}$$

En posant $dy = r.d\theta$ (composante "transversale" du déplacement, perpendiculaire au rayon vecteur reliant le Soleil à la planète), $v_{ydist} = \frac{dy}{dt}$, $v_y = v_{yloc} = e^{\frac{2.k}{r}}.v_{ydist}$:

$$\mu = m_0.e^{\frac{3.k}{r}}.ch\frac{w}{c}.r.v_{ydist} = m_0.e^{\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}.r.v_y \ ;$$

$$\begin{cases} E = m_0.c^2.e^{-\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c} \ ; \\ \\ \mu = m_0.e^{\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}.r.v_y. \end{cases}$$

L'impulsion réduite sera définie par :

$$\vec{\overline{p}} = e^{\frac{2k}{r}}.\frac{c.d\vec{l}}{ds}.$$

En remplaçant ds par $\frac{c.dt.e^{-\frac{k}{r}}}{ch\frac{w}{c}}$, on obtient :

$$\vec{\overline{p}} = e^{\frac{3.k}{r}}.ch\frac{w}{c}.\frac{d\vec{l}}{dt} = e^{\frac{3.k}{r}}.ch\frac{w}{c}.\vec{v}_{dist} = e^{\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}.\vec{v}_{loc}.$$

On multiplie par m_0 pour obtenir l'impulsion (non réduite) :

$$\vec{p} = m_0.c.e^{\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}.\frac{\vec{v}}{c} \ ;$$

$$\vec{p} = m_0.c.e^{\frac{k}{r}}.sh\frac{\vec{w}}{c}.$$

Ce vecteur a trois composantes ; nous n'en considèrerons que deux : la composante p_r parallèle au rayon vecteur, l'autre (p_y) perpendiculaire à celui-ci :

$$p_r = m_0.e^{\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}.v_r \ ;$$

$$p_y = m_0.e^{\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}.v_y.$$

On ne sera pas surpris de constater que :

$$\mu = r.p_y.$$

Une autre conséquence mérite d'être soulignée.
Sachant que $m_0.c^2.ch\frac{w}{c} = E.e^{\frac{k}{r}}$ et que $m_0.c^2.sh\frac{w}{c} = c.p.e^{-\frac{k}{r}}$, en utilisant le fait que $ch^2\frac{w}{c} - sh^2\frac{w}{c} = 1$, on tire facilement :

$$E^2.e^{\frac{2.k}{r}} - c^2.p^2..e^{-\frac{2.k}{r}} = m_0^2.c^4.$$

Si on fait tendre r vers l'infini, on retrouve la formule classique : $E^2 - c^2.p^2 = m_0^2.c^4$.

On a, bien sûr :

$$\overline{E}^2.e^{\frac{2.k}{r}} - c^2.\overline{p}^2.e^{-\frac{2.k}{r}} = 1.$$

13 Vitesse de libération en métrique de Ni

Dans le document sur les métriques, nous avons vu des formules générales pour calculer, par exemple, la vitesse de libération et la vitesse circulaire (si elle existe). Nous allons montrer ici, rapidement, comment ces deux formules s'adaptent à la métrique de Ni. Nous verrons d'autres formules dans le document sur les trous noirs et trous gris.

La vitesse de libération v_l est donnée, de manière générale, par :

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1-\alpha}\ ;$$

ce qui donne, pour la métrique de Ni :

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - e^{-\frac{2.k}{r}}}.$$

Comme $e^{-\frac{2.k}{r}}$ est toujours compris entre 0 et 1, v_l est toujours comprise entre 0 et c, ce qui signifie qu'il est toujours théoriquement possible de s'échapper d'un trou noir. Pour cette raison, nous parlerons plutôt de "trou gris" (voir le document consacré à ce sujet).

14 Vitesse circulaire en métrique de Ni

On peut calculer la vitesse circulaire de plusieurs façons ; nous allons utiliser ici la formule générale vue dans le document sur les métriques, mais nous verrons d'autres approches dans le document sur les trous noirs.

La formule générale s'écrit :

$$\left(\frac{v_{c(dist)}}{c}\right)^2 = \frac{r^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}}$$

et pour l'observateur local, par la formule :

$$\left(\frac{v_c}{c}\right)^2 = \left(\frac{v_{c(loc)}}{c}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}.\frac{r^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}}.$$

Nous avons : $\alpha = e^{-\frac{2k}{r}}$, $\gamma = e^{\frac{2k}{r}}$, $\frac{d\alpha}{dr} = \frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}$, $\frac{d(\gamma.r^2)}{dr} = 2.(r-k).e^{\frac{2k}{r}}$. Faisons les substitutions :

$$\left(\frac{v_{c(dist)}}{c}\right)^2 = \frac{r^2.\frac{\partial\alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r}} = \frac{2k.e^{-\frac{2k}{r}}}{2.(r-k).e^{\frac{2k}{r}}} = \frac{k}{r-k}.e^{-\frac{4k}{r}}, \quad \text{donc :}$$

$$\frac{v_{c(dist)}}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-k}}.e^{-\frac{2k}{r}}.$$

$$\frac{v_c}{c} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}}.\frac{v_{c(dist)}}{c} = \frac{e^{\frac{k}{r}}}{e^{-\frac{k}{r}}}.\sqrt{\frac{k}{r-k}}.e^{-\frac{2k}{r}} \ ;$$

$$\frac{v_c}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-k}}.$$

On voit que pour $r = 2k$, on a : $\frac{v_c}{c} = 1$, donc $v_c = c$. C'est ce qu'on appelle la dernière orbite stable : il n'existe pas d'orbite circulaire de rayon inférieur à $2.k$.