

Potentiel gravitationnel

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, mars 2008)

Table des matières

1 Avertissement	1
2 Résumé	3
3 Importance de la notion de potentiel	3
4 Potentiel, gradient et relativité restreinte	4
5 Le potentiel en gravitation newtonienne	5
6 D’alembertien du potentiel en gravitation newtonienne	13
7 Propriété fondamentale du d’alembertien	15
8 Les fonctions en $\frac{1}{r}$	17
9 La loi de Poisson	18
10 D’alembertien du potentiel en métrique de Ni	20
11 D’alembertien du potentiel en métrique de Schwarzschild	23
12 Généralisation	25
13 Potentiel à d’alembertien nul : lien avec le tenseur de Ricci	31
14 Métriques basées sur un potentiel relatif : première approche	34
15 Métriques basées sur un potentiel relatif : seconde approche	35

1 Avertissement

Ce document fait partie d’un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

- 01) Gravitation relativiste : introduction
 - Relativité restreinte :
- 02) Les vitesses en Relativité restreinte
 - Physique quantique :
- 03) Physique quantique : généralités
- 04) Physique quantique : l'aventure collective
 - Gravitation :
- 05) La relativité générale a-t-elle été prise en défaut ?
- 06) Gravitation relativiste : principes fondamentaux
- 07) Gravitation et critère de Schild
- 08) L'hypothèse du champ d'entraînement
- 09) Métriques et géodésiques
- 10) Tenseur de Ricci
- 11) Potentiel gravitationnel
- 12) Ni ou Schwarzschild ?
- 13) Gravitation et vide quantique
- 14) L'hypothèse du flux à double sens
- 15) Etude du système solaire en métrique de Ni
- 16) Etude des systèmes binaires en métrique de Ni
- 17) Sur la matière noire
- 18) Trous noirs et trous gris
- 19) Ondes gravitationnelles
- 20) Gravitation et cosmologie

2 Résumé

La notion de potentiel gravitationnel est centrale en gravitation newtonienne; la relativité générale l'élimine au profit de la courbure. Il nous semble pourtant que cette notion de potentiel est à la fois compatible avec la relativité restreinte, la physique quantique, les métriques que nous avons étudiées précédemment, et aussi avec nos calculs concernant le tenseur de Ricci; c'est même, peut-être, une main tendue entre ces différentes approches! Nous essayons de restituer au potentiel sa position centrale. Et nous constatons que ses propriétés sont étroitement liées à celles du tenseur de Ricci : ces liens nous conduisent à démontrer des théorèmes inattendus, qui pourraient bien avoir une importance fondamentale!

3 Importance de la notion de potentiel

Dans le domaine de l'électromagnétisme, le potentiel joue un rôle central. Le potentiel électrique, obtenu par intégration à partir de la force de Coulomb, a deux propriétés remarquables : il est relatif (défini à une constante près) et son d'alembertien est nul (dans le vide). C'est l'une des clés du rapprochement entre l'électromagnétisme et la relativité restreinte : les équations de Maxwell, jointes à la transformation de Lorentz, ont permis une synthèse presque "miraculeuse", avec à la clé l'explication d'une multitude de faits jusqu'alors problématiques.

Dans la théorie de Newton, la force d'attraction ressemble à la force de Coulomb (elle est en $\frac{1}{r^2}$), mais elle est plus simple, puisqu'il n'existe pas de masse négative; le potentiel newtonien, comme le potentiel électrique, est relatif; dans un espace-temps classique, il a un laplacien nul, qui devient logiquement un d'alembertien nul dans un cadre relativiste (espace-temps de Minkowski). Il est donc bien tentant de traiter la gravitation à la manière de l'électromagnétisme (en oubliant les charges négatives, ainsi que le volet "magnétisme" des équations de Maxwell). Il semble même que la gravitation soit beaucoup plus simple que l'électromagnétisme...

Mais le problème de la gravitation vient du fait qu'on est conduit à envisager un espace-temps courbe, comme nous l'avons rappelé dans le document "Gravitation relativiste", en utilisant le critère de Schild.

Nous allons examiner quelques propriétés du potentiel newtonien, d'abord dans l'espace de Minkowski de la relativité restreinte, ensuite dans un espace-temps courbe.

Nous verrons, à la fin de ce document, des théorèmes qui jouent un rôle essentiel dans notre approche de la gravitation.

4 Potentiel, gradient et relativité restreinte

Commençons par rappeler une propriété du gradient du potentiel : si on le considère comme un tenseur, alors, par changement de repère, il se comporte de manière covariante, contrairement à l'énergie-impulsion, qui est contravariante.

En nous limitant à deux dimensions spatiales, nous pouvons écrire la transformation de Lorentz ainsi :

$$\begin{pmatrix} c.dt' \\ dx' \\ dy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & -sh\frac{w}{c} & 0 \\ -sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c.dt \\ dx \\ dy \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} c.dt \\ dx \\ dy \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} c.dt \\ dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & sh\frac{w}{c} & 0 \\ sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c.dt' \\ dx' \\ dy' \end{pmatrix} = L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c.dt' \\ dx' \\ dy' \end{pmatrix}.$$

L est la matrice de Lorentz, L^{-1} est son inverse.

La variation infinitésimale de potentiel $d\Phi$ entre deux événements très proches se calcule ainsi :

$$d\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{c.\partial t} ; \frac{\partial\Phi}{\partial x} ; \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} c.dt \\ dx \\ dy \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial\Phi}{c.\partial t'} ; \frac{\partial\Phi}{\partial x'} ; \frac{\partial\Phi}{\partial y'} \right) \cdot \begin{pmatrix} c.dt' \\ dx' \\ dy' \end{pmatrix}.$$

Le fait que le vecteur $\left(\frac{\partial\Phi}{c.\partial t} ; \frac{\partial\Phi}{\partial x} ; \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)$ soit un vecteur ligne suppose déjà sa nature covariante.

$$\text{Remplaçons } \begin{pmatrix} c.dt \\ dx \\ dy \end{pmatrix} \text{ par } L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c.dt' \\ dx' \\ dy' \end{pmatrix} :$$

$$d\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{c.\partial t} ; \frac{\partial\Phi}{\partial x} ; \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) \cdot L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c.dt' \\ dx' \\ dy' \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial\Phi}{c.\partial t'} ; \frac{\partial\Phi}{\partial x'} ; \frac{\partial\Phi}{\partial y'} \right) \cdot \begin{pmatrix} c.dt' \\ dx' \\ dy' \end{pmatrix} ;$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{c.\partial t'} ; \frac{\partial\Phi}{\partial x'} ; \frac{\partial\Phi}{\partial y'} \right) = \left(\frac{\partial\Phi}{c.\partial t} ; \frac{\partial\Phi}{\partial x} ; \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) \cdot L^{-1} ;$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{c.\partial t'} ; \frac{\partial\Phi}{\partial x'} ; \frac{\partial\Phi}{\partial y'} \right) = \left(\frac{\partial\Phi}{c.\partial t} ; \frac{\partial\Phi}{\partial x} ; \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & sh\frac{w}{c} & 0 \\ sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on préfère, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{c.\partial t'} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x'} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\frac{w}{c} & sh\frac{w}{c} & 0 \\ sh\frac{w}{c} & ch\frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{c.\partial t} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage est L^{-1} , et non L , comme ce serait le cas pour l'énergie-impulsion.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = ch \frac{w}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + sh \frac{w}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = sh \frac{w}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + ch \frac{w}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{cases}$$

On peut s'intéresser aussi au gradient signé $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} ; -\frac{\partial \Phi}{\partial x} ; -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$; la formule de transformation est alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = ch \frac{w}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - sh \frac{w}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial x'} = -sh \frac{w}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + ch \frac{w}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial t'} ; & -\frac{\partial \Phi}{\partial x'} ; & -\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial t} ; & -\frac{\partial \Phi}{\partial x} ; & -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} & 0 \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on préfère, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial x'} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} & 0 \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Ici, c'est la matrice de Lorentz directe (L) qui intervient.

5 Le potentiel en gravitation newtonienne

Abordons maintenant plus précisément le potentiel newtonien, et confrontons-le à la relativité restreinte.

Dans la théorie de Newton, le potentiel Φ produit par un corps de masse M est donné par :

$$\Phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Le corps en question est supposé immobile, confondu avec l'origine du repère (O' , x' , y' , z').

Considérons maintenant un second repère (O, x, y, z) se déplaçant à la vitesse v par rapport au premier, selon l'axe des x . Les origines O et O' sont confondues à l'instant $t = 0$. Reprenons l'équation du potentiel et effectuons le changement de repère.

N'oublions pas que Φ est une fonction qui, à chaque "point" ("événement") de l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions, associe un nombre réel. Un changement de repère, grâce à la transformation de Lorentz, revient à faire une coupe de cet espace-temps selon un angle différent. Les événements qui sont simultanés dans un repère ne le sont plus dans l'autre. En particulier, la notion de surface équipotentielle suppose que les événements qui sont répartis sur cette surface sont simultanés; cette répartition est refondue à chaque changement de repère.

D'après la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} ct' = ch\frac{w}{c}.ct + sh\frac{w}{c}.x; \\ x' = sh\frac{w}{c}.ct + ch\frac{w}{c}.x; \\ y' = y; \\ z' = z. \end{cases}$$

L'équation ci-dessus pourra donc s'écrire :

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = -\frac{GM}{\sqrt{(sh\frac{w}{c}.ct + ch\frac{w}{c}.x)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Posons $V = sh\frac{w}{c}.ct + ch\frac{w}{c}.x$ et $U = V^2 + y^2 + z^2$.

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{V^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{GM}{\sqrt{U}} = -GM.U^{-\frac{1}{2}}.$$

Dans un premier temps, nous voudrions savoir comment se présentent les surfaces équipotentielles, pour l'observateur immobile (O') et pour l'observateur mobile (O).

Pour le premier, l'équation $\Phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = cte$ entraîne que

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{G^2.M^2}{\Phi^2} = cte.$$

C'est l'équation d'une sphère de centre O' .

Pour le second, l'équation $\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{V^2 + y^2 + z^2}} = cte$ entraîne que

$$U = V^2 + y^2 + z^2 = \left(sh\frac{w}{c}.ct + ch\frac{w}{c}.x\right)^2 + y^2 + z^2 = cte.$$

Pour savoir ce que voit le second observateur à un instant donné, il faut fixer la valeur de t . Posons pour commencer $t = 0$. On obtient :

$$U = V^2 + y^2 + z^2 = ch^2 \frac{w}{c} . x^2 + y^2 + z^2 = \frac{G^2 . M^2}{\Phi^2} = cte.$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde qui se déduit de la sphère précédente par une "contraction" (homothétie) de rapport $\frac{1}{ch \frac{w}{c}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ selon l'axe des x .

Si on fait varier t , l'équation peut s'écrire :

$$U = \left(\frac{v}{c} . ch \frac{w}{c} . ct + ch \frac{w}{c} . x \right)^2 + y^2 + z^2 = ch^2 \frac{w}{c} . (x + v.t)^2 + y^2 + z^2 = cte.$$

On retrouve le même ellipsoïde, mais en mouvement selon l'axe des x , à la vitesse $-v$; il reste donc centré sur le corps de masse M , qui se déplace lui aussi à la vitesse $-v$. Ceci vient du fait que notre observateur O se déplace à la vitesse v par rapport à l'observateur initial, O' , qui est lié au corps en question.

Attention : les points (événements) situés sur cet ellipsoïde sont simultanés pour l'observateur O , mais pas pour O' ; inversement, les événements situés sur la sphère sont simultanés pour l'observateur O' , mais pas pour O . L'ellipsoïde et la sphère correspondent à deux coupes non parallèles de l'espace-temps de Minkowski.

Dans un second temps, nous voudrions étudier le gradient du potentiel évalué par les deux observateurs, et dans un troisième temps nous étudierons son laplacien (et son d'alembertien). Nous aurons besoin de calculer quelques dérivée; commençons par ces calculs.

Nous voulons calculer les dérivées partielles (premières secondes) de Φ par rapport à ct , x , y , z . Pour cela, nous commençons par calculer les dérivées premières et secondes (partielles) de V et U (que nous notons de manière abrégée avec des primes et secondes).

$$\left\{ \begin{array}{l} V'_{ct} = sh \frac{w}{c}; \\ U'_{ct} = 2.V.V'_{ct} = 2.sh \frac{w}{c}.V; \\ U''_{ct} = 2.sh^2 \frac{w}{c}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} V'_x = ch \frac{w}{c}; \\ U'_x = 2.V.V'_x = 2.ch \frac{w}{c}.V; \\ U''_x = 2.ch^2 \frac{w}{c}; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} U'_y = 2.y; \\ U''_y = 2; \\ U'_z = 2.z; \\ U''_z = 2. \end{cases}$$

Les formules suivantes seront valables dans tous les cas, qu'on dérive par rapport à ct , x , y ou z :

$$\begin{cases} \Phi = -GM.U^{-\frac{1}{2}}; \\ \Phi' = \frac{1}{2}.GM.U'.U^{-\frac{3}{2}}; \\ \Phi'' = \frac{1}{2}.GM.(U''.U^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}.U'^2.U^{-\frac{5}{2}}) = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}.(U''.U - \frac{3}{2}.U'^2). \end{cases}$$

Pour calculer le gradient du potentiel, nous avons besoin seulement des dérivées premières :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{c.\partial t} = \Phi'_{ct} = \frac{1}{2}.GM.U'_{ct}.U^{-\frac{3}{2}} = G.M.\frac{sh\frac{w}{c}.V}{U^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi'_x = \frac{1}{2}.GM.U'_x.U^{-\frac{3}{2}} = G.M.\frac{ch\frac{w}{c}.V}{U^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi'_y = \frac{1}{2}.GM.U'_y.U^{-\frac{3}{2}} = G.M.\frac{y}{U^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \Phi'_z = \frac{1}{2}.GM.U'_z.U^{-\frac{3}{2}} = G.M.\frac{z}{U^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Que voit l'observateur O à un instant t fixé? Prenons $t = 0$. On obtient :

$$V = sh\frac{w}{c}.ct + ch\frac{w}{c}.x = ch\frac{w}{c}.x ;$$

$$U = \left(sh\frac{w}{c}.ct + ch\frac{w}{c}.x\right)^2 + y^2 + z^2 = ch^2\frac{w}{c}.x^2 + y^2 + z^2 ;$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{c.\partial t} = G.M.\frac{sh\frac{w}{c}.ch\frac{w}{c}.x}{(ch^2\frac{w}{c}.x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = G.M.\frac{ch^2\frac{w}{c}.x}{(ch^2\frac{w}{c}.x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = G.M.\frac{y}{(ch^2\frac{w}{c}.x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = G.M.\frac{z}{(ch^2\frac{w}{c}.x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Si $v = 0$, l'observateur O se confond avec O' , les surfaces équipotentielles sont des sphères ; on a $ch \frac{w}{c} = 1$, $sh \frac{w}{c} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{c \cdot \partial t} = 0$; le vecteur tridimensionnel (purement spatial) $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$ est proportionnel à (x, y, z) , le coefficient de proportionnalité étant égal à $\frac{G.M}{r^3}$ (où $r = \sqrt{ch^2 \frac{w}{c} . x^2 + y^2 + z^2}$) ; ce vecteur, qui est le gradient au sens de Newton, pointe vers l'opposé du centre de la sphère (O').

Si $v \neq 0$, le vecteur $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$ est proportionnel à $(ch^2 \frac{w}{c} . x, y, z)$, le coefficient de proportionnalité étant égal à $\frac{G.M}{(ch^2 \frac{w}{c} . x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{G.M}{r^3}$.

On peut remarquer que ce vecteur $(ch^2 \frac{w}{c} . x, y, z)$ est normal à la surface de l'ellipsoïde au point de coordonnées (x, y, z) .

Effectivement, l'équation de l'ellipsoïde étant $ch^2 \frac{w}{c} . x^2 + y^2 + z^2 = \frac{G^2 . M^2}{\Phi^2} = cte$, on obtient, en différentiant :

$$2.ch^2 \frac{w}{c} . x . dx + 2.y . dy + 2.z . dz = 0,$$

ce qui signifie bien que :

$$\left(ch^2 \frac{w}{c} . x, y, z \right) . \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0.$$

Le gradient (newtonien) est donc normal à la surface équipotentielle, quel que soit l'observateur.

Imaginons maintenant que le potentiel soit déterminé par un flux de messagers que nous appellerons gravitons, se déplaçant à la vitesse de la lumière. Nous allons étudier la trajectoire de l'un de ces gravitons, émis à l'instant t'_e , selon une direction formant un angle α avec l'axe des x' (selon l'observateur O'). La trajectoire de ce graviton, dans le repère d'origine O' , est définie par les équations :

$$\begin{cases} r = c.(t' - t'_e) = \sqrt{x'^2 + y'^2} ; \\ x' = r.cos\alpha ; \\ y' = r.sin\alpha. \end{cases}$$

Nous avons supprimé une dimension spatiale pour alléger l'écriture.

$$r = c.t' - c.t'_e = \frac{x'}{cos\alpha} = \frac{y'}{sin\alpha} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Utilisons la transformation de Lorentz pour représenter la trajectoire dans le repère d'origine O :

$$\begin{cases} c.t = ch\frac{w}{c}.c.t' - sh\frac{w}{c}.x' ; \\ x = -sh\frac{w}{c}.c.t' + ch\frac{w}{c}.x' ; \\ y = y'. \end{cases}$$

L'instant d'émission du graviton est défini par : $t' = t'_e$, $x' = x'_e = 0$, $y' = y'_e = 0$, ce qui entraîne :

$$\begin{cases} c.t_e = ch\frac{w}{c}.c.t'_e ; \\ x_e = -sh\frac{w}{c}.c.t'_e ; \\ y_e = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c.t - c.t_e = ch\frac{w}{c}.c.t' - sh\frac{w}{c}.x' - ch\frac{w}{c}.c.t'_e = ch\frac{w}{c}.c.(t' - t'_e) - sh\frac{w}{c}.x' ; \\ x - x_e = -sh\frac{w}{c}.c.t' + ch\frac{w}{c}.x' + sh\frac{w}{c}.c.t'_e = -sh\frac{w}{c}.c.(t' - t'_e) + ch\frac{w}{c}.x' ; \\ y = y'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c.t - c.t_e = ch\frac{w}{c}.r - sh\frac{w}{c}.r.\cos\alpha = r.ch\frac{w}{c}.(1 - \frac{v}{c}.\cos\alpha) ; \\ x - x_e = -sh\frac{w}{c}.r + ch\frac{w}{c}.r.\cos\alpha = r.ch\frac{w}{c}.(\cos\alpha - \frac{v}{c}) ; \\ y = r.\sin\alpha. \end{cases}$$

On peut remarquer que $\frac{y}{x-x_e} = \frac{\sin\alpha}{ch\frac{w}{c}(\cos\alpha - \frac{v}{c})}$: c'est la pente de la droite parcourue par le graviton, dans le repère lié à O . Pour $\frac{v}{c} = \cos\alpha$, cette pente est infinie, ce qui veut dire que la droite est parallèle à l'axe des y .

Le vecteur directeur de cette droite est proportionnel à $(ch\frac{w}{c}.(\cos\alpha - \frac{v}{c}), \sin\alpha)$.

On peut se demander si, pour l'observateur lié à O , le vecteur qui matérialise la trajectoire du graviton est normal à la surface équipotentielle.

Rappelons-nous que le vecteur normal à la surface équipotentielle est proportionnel à $(ch^2\frac{w}{c}.x, y, z)$; comme nous avons supprimé une dimension spatiale, il faudrait parler plutôt de ligne équipotentielle; le vecteur normal est alors proportionnel à $(ch^2\frac{w}{c}.x, y)$.

Ce résultat avait été obtenu en choisissant l'instant $t = 0$; on a donc :

$$x' = sh\frac{w}{c}.ct + ch\frac{w}{c}.x = ch\frac{w}{c}.x \quad \text{et} \quad y' = y$$

donc ce vecteur normal est proportionnel à $(ch\frac{w}{c}.x', y')$; de plus, comme $x' = r.\cos\alpha$ et $y' = r.\sin\alpha$, on peut dire que ce vecteur est proportionnel à :

$$\left(ch\frac{w}{c}.\cos\alpha, \sin\alpha\right)$$

alors que la trajectoire du graviton est dirigée selon le vecteur :

$$\left(ch\frac{w}{c}.\left(\cos\alpha - \frac{v}{c}\right), \sin\alpha\right).$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ceci vient du fait que la trajectoire apparente du graviton est affectée par le phénomène d'aberration (comme pour la lumière), tandis que le potentiel n'est pas affecté (ce qui va de soi, puisque nous l'avons défini sans faire intervenir la vitesse de la lumière, ni aucune autre vitesse).

Remarquons bien que notre idée d'imaginer le potentiel transporté par un flux divergent de gravitons est gratuite; imaginons maintenant un flux convergent. Reprenons le calcul précédent, dans lequel nous posons $r = c.(t'_e - t')$ à la place de $r = c.(t' - t'_e)$. Tout se déroule de manière identique, jusqu'au calcul de $x - x_e$:

$$x - x_e = -sh\frac{w}{c}.c.(t' - t'_e) + ch\frac{w}{c}.x' = r.sh\frac{w}{c} + r.ch\frac{w}{c}.\cos\alpha = r.ch\frac{w}{c}.\left(\cos\alpha + \frac{v}{c}\right).$$

La trajectoire du graviton est alors dirigée parallèlement au vecteur :

$$\left(ch\frac{w}{c}.\left(\cos\alpha + \frac{v}{c}\right), \sin\alpha\right).$$

Remarquons encore que :

$$\begin{aligned} &\left(ch\frac{w}{c}.\cos\alpha, \sin\alpha\right) = ... \\ &... = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(ch\frac{w}{c}.\left(\cos\alpha - \frac{v}{c}\right), \sin\alpha\right) + \left(ch\frac{w}{c}.\left(\cos\alpha + \frac{v}{c}\right), \sin\alpha\right)\right]. \end{aligned}$$

Ceci revient à combiner une "fonction de Green retardée" avec une "fonction de Green avancée".

On peut donc se demander si le fait de faire intervenir deux flux de gravitons, l'un divergent et l'autre convergent, ne permettrait pas d'obtenir une meilleure cohérence avec la théorie de Newton. Cette idée d'un double flux a été développée dans le document "Physique quantique : généralités". Elle s'impose naturellement lorsqu'on étudie des phénomènes respectant la symétrie T (symétrie par inversion du sens du temps).

Ceci nous ramène à la notion d'"immédiateté". En effet, le flux divergent de "gravitons" construit des sphères qui ne sont rien d'autre que les "sphères d'immédiateté divergente"; et le flux convergent correspond aux "sphères d'immédiateté convergente".

Pour Newton, la gravitation se transmet de manière instantanée, autrement dit à vitesse infinie ; une sphère équipotentielle associée à un corps ponctuel est liée à ce corps de manière rigide, comme s'il s'agissait d'un solide unique avec un centre unique parfaitement fixé à chaque instant (le temps étant considéré comme absolu) ; elle suit ses déplacements comme si l'information des changements de direction et de module de la vitesse étaient connus partout et à chaque instant. Ceci semble à première vue incompatible avec la relativité restreinte.

L'idée d'Einstein est d'attribuer au message gravitationnel (disons plutôt à la courbure, qui se transmet selon ses lois propres) une vitesse égale à c ; mais il n'envisage que des sphères d'"immédiateté divergente". Ces deux points de vue se rapprochent si on admet qu'il existe aussi un flux convergent. Ceci nous ramène à la question du temps que nous avons développée dans le document sur la physique quantique (généralités). Nous savons que l'équation $\square\Phi = 0$ possède deux sortes de solutions mathématiques, données par la fonction de Green retardée et la fonction de Green avancée (nous en reparlerons). Or nous venons de voir que le fait de combiner un flux convergent avec un flux divergent, ou une fonction de Green avancée avec une fonction de Green retardée, conduit à une synthèse du point de vue Newton et de celui d'Einstein, remettant en cause certaines idées reçues concernant le temps, mais cohérente avec les concepts de la physique quantique. Nous sommes ici à la croisée des chemins, au point crucial où se rejoignent ces trois théories : la mécanique classique newtonienne, la relativité restreinte d'Einstein et la physique quantique.

Remarquons que l'existence du graviton en tant que particule se déplaçant à la vitesse de la lumière n'est pas du tout une nécessité : c'est seulement un concept qui nous aide à réfléchir sur la communication (le partage d'information) dans l'espace-temps, autrement dit sur la structure même de l'espace-temps. Mais notre raisonnement s'appuie sur l'existence d'un double flux de "quelque chose", que nous avons appelé graviton par commodité, mais que nous considérons plutôt comme une information.

Voici encore une précision concernant les forces au sens de Newton.

Dans la théorie de Newton, le gradient du potentiel permet de définir la force d'attraction. Dans le document sur les vitesses en relativité restreinte, nous avons rappelé la formule de transformation des forces :

$$\begin{cases} F'_x = F_x ; \\ F'_y = F_y \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{F_y \frac{w}{c}}{ch \frac{w}{c}} ; \\ F'_z = F_z \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{F_z \frac{w}{c}}{ch \frac{w}{c}} . \end{cases}$$

Dans cette formule, $\vec{F}$ est une force évaluée par un observateur qui accompagne (au moins pendant une durée infinitésimale) le mobile sur lequel s'applique cette force ; $\vec{F}'$ est la même force, évaluée par un autre observateur qui

se situe au même point à l'instant considéré, mais se déplace à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au précédent.

Dans le cas présent, on peut considérer une particule-test dans le champ d'un astre, le Soleil par exemple. Dans un repère immobile par rapport au Soleil, elle va subir une (pseudo-)force $\vec{F}$. Dans un repère se déplaçant par rapport au premier à la vitesse $\vec{v}$, compte-tenu de la transformation ci-dessus, et du fait que dans ce repère la masse du Soleil est multipliée par $ch\frac{w}{c}$, la (pseudo-)force apparente sera donnée par :

$$\vec{F}'' = ch\frac{w}{c}.\vec{F}' ;$$

$$\begin{cases} F_x'' = ch\frac{w}{c}.F_x ; \\ F_y'' = F_y ; \\ F_z'' = F_z . \end{cases}$$

Cette transformation est identique à celle que nous avons démontrée concernant le gradient du potentiel. Le fait de considérer la force d'attraction newtonienne comme dérivant du potentiel est donc parfaitement cohérent avec la relativité restreinte.

6 D'alembertien du potentiel en gravitation newtonienne

Nous avons démontré l'égalité :

$$\Phi'' = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}.\left(U''.U - \frac{3}{2}.U'^2\right)$$

qui est valable quand on dérive par rapport à ct , x , y ou z .
Nous allons l'appliquer 4 fois :

$$\Phi''_{ct} = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}.\left(U''_{ct}.U - \frac{3}{2}.U'^2_{ct}\right) = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}.\left(2.sh^2\frac{w}{c}.U - 6.sh^2\frac{w}{c}.V^2\right) ;$$

$$\Phi''_{ct} = GM.U^{-\frac{5}{2}}.sh^2\frac{w}{c}(U - 3.V^2) ;$$

$$\Phi''_x = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}.\left(U''_x.U - \frac{3}{2}.U'^2_x\right) = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}.\left(2.ch^2\frac{w}{c}.U - 6.ch^2\frac{w}{c}.V^2\right) ;$$

$$\Phi''_x = GM.U^{-\frac{5}{2}}.ch^2\frac{w}{c}(U - 3.V^2) ;$$

$$\Phi''_y = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}.\left(U''_y.U - \frac{3}{2}.U'^2_y\right) = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}.(2.U - 6.y^2) = GM.U^{-\frac{5}{2}}.(U - 3.y^2) ;$$

$$\Phi_z'' = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}. \left(U_z'' . U - \frac{3}{2}.U_z'^2 \right) = \frac{1}{2}.GM.U^{-\frac{5}{2}}. (2.U - 6.z^2) = GM.U^{-\frac{5}{2}}. (U - 3.z^2).$$

On remarque que :

$$\Phi_x'' - \Phi_{ct}'' = GM.U^{-\frac{5}{2}}. \left(ch^2 \frac{w}{c} - sh^2 \frac{w}{c} \right). (U - 3.V^2) = GM.U^{-\frac{5}{2}}. (U - 3.V^2).$$

D'autre part :

$$\Phi_y'' + \Phi_z'' = GM.U^{-\frac{5}{2}}. (2.U - 3.y^2 - 3.z^2).$$

Par conséquent :

$$-\Phi_{ct}'' + \Phi_x'' + \Phi_y'' + \Phi_z'' = GM.U^{-\frac{5}{2}}. (3.U - 3.V^2 - 3.y^2 - 3.z^2) = 3.GM.U^{-\frac{5}{2}}. [U - (V^2 + y^2 + z^2)].$$

Comme nous savons que $U = V^2 + y^2 + z^2$, nous pouvons conclure que la quantité ci-dessus est identiquement nulle, ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

ou encore :

$$\square \Phi = 0.$$

L'opérateur $\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est le d'alembertien. Il est étroitement relié au laplacien : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, puisque :

$$\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta.$$

Si le potentiel est constant, on a $\frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t^2} = 0$; l'équation $\square \Phi = 0$ entraîne alors $\Delta \Phi = 0$. Cette formule signifie que la divergence du gradient est nulle. Comme $\Phi = -\frac{GM}{r}$, le gradient est un vecteur radial de module $\frac{GM}{r^2}$. Si on calcule le flux f de ce vecteur à travers la surface sphérique de rayon r , on obtient :

$$f = 4.\pi.r^2 . \frac{GM}{r^2} = 4.\pi.G.M.$$

L'opérateur $\square$ étant linéaire, la conclusion que nous avons tirée pour un corps unique (mobile ou non par rapport à l'observateur) s'étend à un nombre quelconque de corps en mouvement.

On peut montrer (théorème de Gauss) que ce flux ne dépend pas de la forme de la surface fermée (sphérique ou non) : il ne dépend que de la masse M incluse à l'intérieur de celle-ci. D'où on déduit la loi de Poisson :

$$\Delta \Phi = 4.\pi.G.\rho$$

où ρ est la densité de matière (masse/volume) au point considéré.

Il s'ensuit que les formules $\Delta\Phi = 0$ et $\square\Phi = 0$ ne sont valables que dans le vide.

Le fait que le d'alembertien de Φ soit nul dans le vide est d'une grande importance. D'une part, l'égalité $\square\Phi = 0$ est interprétée comme une équation de propagation du champ à la vitesse de la lumière dans un contexte relativiste. D'autre part, il est très surprenant de voir surgir une équation typiquement relativiste dans la théorie de Newton. On peut reprocher à la gravitation newtonienne de ne pas être relativiste ; mais elle est compatible avec la relativité restreinte, au moins sur ce point !

7 Propriété fondamentale du d'alembertien

Le d'alembertien possède une propriété remarquable : il est lorentzien, c'est-à-dire invariant par la transformation de Lorentz.

Dans un repère (ct, x, y, z) , posons :

$$\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Nous voulons montrer que cette égalité sera vraie aussi dans un autre repère (ct', x', y', z') en mouvement par rapport au premier, à la vitesse v , selon l'axe des x . Nous négligerons les deux autres coordonnées spatiales, qui sont inchangées.

Nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} c dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $dy' = dy$ et $dz' = dz$.

Nous avons vu précédemment que :

$$\left(\frac{\partial}{c \partial t'} ; \frac{\partial}{\partial x'} \right) = \left(\frac{\partial}{c \partial t} ; \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & sh \frac{w}{c} \\ sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} \end{pmatrix}.$$

Nous raisonnons sur des opérateurs de dérivation ; cette égalité matricielle montre comment ces opérateurs de dérivation se combinent entre eux.

Cette dernière égalité peut s'écrire aussi :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{c \cdot \partial t'} \\ -\frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{c \cdot \partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que ces deux dernières égalités sont rigoureusement équivalentes. L'une est écrite sous forme covariante, l'autre sous forme contravariante.

Multiplions membre à membre les deux égalités (ce qui revient à composer les dérivations) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{c \cdot \partial t'} ; \frac{\partial}{\partial x'} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{c \cdot \partial t'} \\ -\frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix} = \dots \\ & \dots \left(\frac{\partial}{c \cdot \partial t} ; \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & sh \frac{w}{c} \\ sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ch \frac{w}{c} & -sh \frac{w}{c} \\ -sh \frac{w}{c} & ch \frac{w}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{c \cdot \partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les deux matrices de Lorentz sont inverses, donc l'égalité se simplifie ainsi :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{c \cdot \partial t'} ; \frac{\partial}{\partial x'} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{c \cdot \partial t'} \\ -\frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{c \cdot \partial t} ; \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{c \cdot \partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} ; \\ & \frac{\partial^2}{c^2 \cdot \partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2}{c^2 \cdot \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

En réintroduisant les deux autres coordonnées spatiales, on obtient :

$$\frac{\partial^2}{c^2 \cdot \partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{c^2 \cdot \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Donc dans un espace de Minkowski la valeur du d'alembertien d'une fonction quelconque est invariante par la transformation de Lorentz. Ceci est localement vrai dans un espace de Riemann, ce qui englobe toutes les métriques que nous avons étudiées.

L'étude mathématique de l'équation $\square \Phi = 0$ montre qu'elle possède deux sortes de solutions, qu'on appelle "potentiels retardés" et "potentiels avancés". Le potentiel retardé produit par une source donnée se propage de manière centrifuge, à la vitesse de la lumière, à partir de cette source (conformément à la fonction de Green retardée) ; le potentiel avancé se propage de manière centripète (fonction de Green avancée). Ils se déduisent l'un de l'autre par inversion du sens du temps. Aucun des deux ne respecte la symétrie T (symétrie par inversion du sens du temps), mais leur demi-somme (fonction de Green symétrique) la respecte.

Dans le document "Physique quantique : généralités", nous avons parlé de la symétrie T et de la flèche du temps. Nous avons défini la notion d'immédiateté, que nous croyons liée à la nature profonde de l'espace-temps. Le d'alembertien ne peut être bien compris que si on admet que les potentiels retardés et avancés, qui correspondent aux sphères d'immédiateté divergente et convergente, sont deux aspects complémentaires d'une seule et même chose, qu'on pourrait appeler la communication (ou le partage d'information) dans l'espace-temps. Cette communication ne met en jeu aucun transfert d'énergie, aucune relation de cause à effet, mais seulement des corrélations intemporelles. Elle exprime une symétrie fondamentale de l'espace-temps, en l'absence de "catastrophe".

8 Les fonctions en $\frac{1}{r}$

Nous allons reprendre de manière simplifiée ce que nous avons vu précédemment concernant le potentiel newtonien, en éliminant la variable temps. Il s'agit de montrer que dans l'espace tridimensionnel euclidien rapporté à un repère (O, x, y, z) la fonction $f(r) = \frac{1}{r}$ (où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) vérifie :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Rappelons que Δf est le laplacien de f .

Calculons d'abord $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{2}{r^3} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

On fait de même avec y et z , puis on additionne :

$$\Delta f = \frac{2}{r^3} \cdot \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \right).$$

Comme $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, on a :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} ; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} ;$$

ce qui entraîne :

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

D'autre part :

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{r - x \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = \frac{r - x \cdot \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}.$$

On fait de même avec y et z , puis on additionne :

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}.$$

Reportons ces résultats dans l'expression de Δf :

$$\Delta f = \frac{2}{r^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{2}{r} = \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} = 0.$$

Nous voyons donc que le laplacien de la fonction $f(r) = \frac{1}{r}$ est nul.

Plaçons-nous maintenant dans l'espace-temps de Minkowski ; nous ajoutons donc la variable temps, mais nous supposons que la fonction f ne dépend que de r (elle est indépendante du temps). On a alors $\frac{\partial^2 f}{c^2 \cdot \partial t^2} = 0$, et :

$$\square f = \frac{\partial^2 f}{c^2 \cdot \partial t^2} - \Delta f = 0.$$

Cette propriété se conserve par changement de référentiel, selon les règles de la relativité restreinte, grâce à la matrice de Lorentz.

Nous avons déjà vu que le d'alembertien du potentiel $\Phi = -\frac{G.M}{r}$ est nul ; nous l'avons démontré en faisant intervenir la variable temps (t) et la notion de propagation. Mais y a-t-il propagation ? Le d'alembertien est compatible avec une propagation centrifuge à la vitesse de la lumière, ou avec une propagation centripète à la même vitesse (antichrone ?), ou les deux combinées, ou à une absence de propagation. Les interprétations sont très partagées. Certains estiment qu'en relativité générale la gravité ne se propage pas. Un peu comme chez Newton !

9 La loi de Poisson

Pour introduire de la manière la plus concrète la loi de Poisson, imaginons une boule immobile (au sens de Newton) de centre O et de rayon R , dans laquelle la matière est répartie de manière homogène, avec une densité ρ . Nous voulons calculer le potentiel gravitationnel newtonien à l'intérieur de cette boule, à la distance r du centre ($r < R$).

D'après la loi de Gauss (purement mathématique), tout se passe comme si un point matériel quelconque situé sur la sphère de centre O et de rayon r subissait

une accélération centrale équivalente à celle qu'exercerait sur lui toute la masse incluse dans cette sphère, supposée concentrée au point O . La matière située à l'extérieur de cette sphère de rayon r (mais à l'intérieur de celle de rayon R) ne joue aucun rôle.

La masse qui contribue à cette accélération est donc :

$$m = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho.$$

L'accélération, à la distance r , est donc un vecteur dirigé vers O , de module :

$$g = \frac{G \cdot m}{r^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot r^3 \cdot \rho}{3 \cdot r^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3} \cdot r.$$

Le potentiel Φ se calcule par intégration :

$$\begin{aligned} g &= -\frac{d\Phi}{dr} = \frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3} \cdot r. \\ d\Phi &= -\frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3} \cdot r \cdot dr = -\frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3} \cdot d\left(\frac{r^2}{2}\right) ; \\ \Phi &= -\frac{2 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3} \cdot r^2 + c^{te}. \end{aligned}$$

Le signe $-$ est justifié par le sens de la force. La constante n'a pas d'importance ici.

Remplaçons r^2 par $x^2 + y^2 + z^2$ (coordonnées catésiennes).

$$\Phi = -\frac{2 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + c^{te}.$$

Nous voulons calculer le laplacien $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ du potentiel.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3} \cdot 2 \cdot x ;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3}.$$

De même : $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho}{3}$, donc :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho ;$$

$$\Delta \Phi = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho.$$

C'est la loi de Poisson.

Dans notre raisonnement, la masse est statique et la densité constante, donc $\frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \cdot \partial t^2} = 0$; on peut donc écrire :

$$\square \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \cdot \partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho.$$

Sous cette forme, la loi de Poisson est beaucoup plus adaptée pour aborder les changements de repères lorentziens.

Dans le vide, on a $\rho = 0$, donc on retrouve l'égalité : $\square \Phi = 0$.

10 D'alembertien du potentiel en métrique de Ni

Nous allons reprendre l'étude du potentiel $\Phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{k \cdot c^2}{r}$ créé par une masse M ponctuelle immobile, mais, cette fois-ci, nous ne nous plaçons plus dans l'espace euclidien de Newton, ni même dans l'espace-temps plat de Minkowski, mais dans un espace courbé selon la métrique triviale de Ni. Pour le moment, nous ne faisons pas intervenir la variable temps.

Nous allons utiliser les notations tensorielles.

Le gradient du potentiel scalaire Φ est un vecteur radial que nous noterons B_i , où l'indice i , placé en bas, est un indice covariant. Effectivement, le gradient d'un champ scalaire est toujours un vecteur covariant. Les coordonnées de ce vecteur en coordonnées sphériques sont : $B_1 = 0$, $B_2 = \frac{GM}{r^2} = \frac{k \cdot c^2}{r^2}$, $B_3 = 0$, $B_4 = 0$.

Nous voulons calculer la divergence S du gradient, en utilisant la formule :

$$S = \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \Gamma_{i2}^i B^2.$$

Rappelons qu'en coordonnées sphériques la notation x^2 désigne la distance radiale r .

Le rôle du symbole de Christoffel Γ_{i2}^i est de rendre la dérivée covariante. Attention : la sommation sur i est sous-entendue ; on peut écrire, si on préfère :

$$S = \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4) \cdot B^2.$$

Dans cette formule, c'est B^2 , et non B_2 , qui intervient ; l'indice placé en haut n'est pas un exposant, mais un indice contravariant. Nous devons donc commencer par rendre le gradient contravariant en utilisant la technique adaptée pour "remonter l'indice" :

$$B^2 = |g^{22}| \cdot B_2 = \frac{GM}{r^2} \cdot e^{-2\frac{k}{r}} = \frac{k \cdot c^2}{r^2} \cdot e^{-2\frac{k}{r}}.$$

Dans la section sur le tenseur de Ricci en métrique isotrope, nous avons calculé les symboles de Christoffel ; nous aurons besoin de ceux-ci :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12}^1 = \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} ; \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} ; \\ \Gamma_{32}^3 = \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{1}{r} ; \\ \Gamma_{42}^4 = \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{1}{r}. \end{array} \right.$$

La métrique de Ni est non seulement isotrope, mais aussi symétrique, ce qui signifie que $\alpha.\beta = 1$; par conséquent : $\alpha.\dot{\beta} + \dot{\alpha}.\beta = 0$, donc :

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}.$$

La métrique de Ni est aussi pré-relativiste : $\alpha = e^{-\frac{2k}{r}}$, donc :

$$\dot{\alpha} = \frac{2k}{r^2} . e^{-\frac{2k}{r}} = \frac{2k}{r^2} . \alpha, \quad \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \frac{2k}{r^2}, \quad \frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\frac{2k}{r^2}.$$

En faisant les substitutions dans les expressions des symboles de Christoffel, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12}^1 = \frac{k}{r^2} ; \\ \Gamma_{22}^2 = -\frac{k}{r^2} ; \\ \Gamma_{32}^3 = -\frac{k}{r^2} + \frac{1}{r} ; \\ \Gamma_{42}^4 = -\frac{k}{r^2} + \frac{1}{r}. \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4 = -\frac{2k}{r^2} + \frac{2}{r};$$

$$(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4) . B^2 = \left(-\frac{2k}{r^2} + \frac{2}{r} \right) . \left(\frac{k.c^2}{r^2} \right) . e^{-2\frac{k}{r}} = \left(-\frac{2k^2.c^2}{r^4} + \frac{2.k.c^2}{r^3} \right) . e^{-2\frac{k}{r}}.$$

Calculons encore $\frac{\partial B^2}{\partial x^2} = \frac{\partial B^2}{\partial r}$, sachant que $B^2 = \frac{k.c^2}{r^2} . e^{-2\frac{k}{r}}$:

$$\frac{\partial B^2}{\partial r} = -\frac{2k.c^2}{r^3} . e^{-2\frac{k}{r}} + \frac{k.c^2}{r^2} . \frac{2k}{r^2} . e^{-2\frac{k}{r}} = \left(\frac{2k^2.c^2}{r^4} - \frac{2.k.c^2}{r^3} \right) . e^{-2\frac{k}{r}}.$$

Nous voyons donc que :

$$S = \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4) . B^2 = 0.$$

Nous venons de calculer la divergence du gradient du potentiel, c'est-à-dire son laplacien :

$$\Delta\Phi = 0.$$

Comme en métrique euclidienne (ou de Minkowski), on doit rappeler que ce laplacien s'annule seulement dans le vide ; en présence de matière, c'est la loi de Poisson qui s'applique. De plus, si nous réintroduisons la variable temps (en attribuant à l'observateur une rapidité non nulle par rapport au corps de masse M , et en utilisant la transformation de Lorentz : voir calcul dans la section précédente) nous retrouvons la formule du d'alembertien :

$$\square\Phi = 0.$$

Évaluons encore le flux du vecteur gradient à travers la sphère de rayon r . Nous utilisons la version contravariante du gradient : $B^2 = \frac{k.c^2}{r^2}.e^{-2\frac{k}{r}}$. Pour évaluer l'aire de la sphère, nous utilisons le coefficient de dilatation de l'espace selon les directions tangentes à la sphère, soit : $\sqrt{\gamma} = e^{\frac{k}{r}}$, que nous trouvons dans la matrice covariante de la métrique. En effet, on peut représenter chaque élément de surface par un vecteur normal à cette surface, et le flux s'obtient en faisant le produit scalaire de ce vecteur avec le gradient ; mais pour que ce produit scalaire soit invariant par changement de repère, il est indispensable que l'un des vecteurs soit covariant et l'autre contravariant. L'aire que nous utilisons est : $4.\pi.r^2.e^{2\frac{k}{r}}$, et le flux est donc :

$$f = 4.\pi.r^2.e^{2\frac{k}{r}}.\frac{k.c^2}{r^2}.e^{-2\frac{k}{r}} = 4.\pi.k.c^2 = 4.\pi.G.M.$$

Nous voyons donc que les propriétés du gradient newtonien supportent sans encombre le passage d'un espace-temps plat à un espace-temps courbé selon la métrique de Ni.

Existe-t-il d'autres métriques qui conservent ces propriétés ? Pour le savoir, reprenons le dernier raisonnement concernant le flux de B^i . L'aire de la sphère est $4.\pi.r^2.\gamma$, et la norme du vecteur gradient (version contravariante) est : $B^2 = |g^{22}|.\frac{GM}{r^2}$, donc :

$$f = 4.\pi.G.M.\gamma.|g^{22}|.$$

Comme $|g^{22}| = \frac{1}{|g_{22}|} = \frac{1}{\beta}$, on obtient :

$$f = 4.\pi.G.M.\frac{\gamma}{\beta}.$$

On voit donc qu'il suffit que le quotient $\frac{\gamma}{\beta}$ soit constant (indépendant de r) pour que le flux f soit constant aussi, donc pour que la divergence du gradient (autrement dit son laplacien) s'annule. Les métriques isotropes ($\frac{\gamma}{\beta} = 1$) remplissent cette condition.

Dans la section sur l'évaluation des distances, nous avons proposé des arguments qui incitent à se tourner vers une métrique à la fois symétrique ($\alpha.\beta = 1$)

et isotrope ($\frac{\gamma}{\beta} = 1$). Dans la présente section, nous avons apporté un nouvel élément en faveur de l'isotropie.

Nous avons déjà dit que la métrique de Ni a trois propriétés fondamentales :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ elle est pré-relativiste : } \alpha = e^{-\frac{2k}{r}} ; \\ 2) \text{ elle est symétrique : } \alpha.\beta = 1 ; \\ 3) \text{ elle est isotrope : } \beta = \gamma. \end{array} \right.$$

Si une métrique possède à la fois les propriétés 2) et 3), alors elle possède aussi la propriété 1), pour peu que son tenseur de Ricci soit radial, comme nous l'avons démontré dans la section "Métrique isotrope symétrique à tenseur de Ricci radial"; d'autre part, si elle possède les propriétés 1) et 3), alors elle possède aussi la propriété 2), comme nous l'avons vu dans la section "Métrique pré-relativiste isotrope à tenseur de Ricci radial" (à condition de supposer toujours le tenseur de Ricci radial).

11 D'alembertien du potentiel en métrique de Schwarzschild

Nous allons reprendre l'étude du potentiel $\Phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{k.c^2}{r}$ créé par une masse M ponctuelle immobile, mais, cette fois-ci, dans un espace courbé selon la métrique de Schwarzschild.

Le gradient du potentiel scalaire Φ est toujours le vecteur covariant B_i , de coordonnées : $B_1 = 0$, $B_2 = \frac{GM}{r^2} = \frac{k.c^2}{r^2}$, $B_3 = 0$, $B_4 = 0$.

Nous calculons la version contravariante du gradient :

$$B^2 = |g^{22}|.B_2 = \left(1 - \frac{2k}{r}\right) \cdot \frac{GM}{r^2} = \left(1 - \frac{2k}{r}\right) \cdot \frac{k.c^2}{r^2}.$$

Dans la section sur le tenseur de Ricci en métrique radiale, nous avons calculé les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\dot{\beta}}{2.\beta}, \quad \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{r}.$$

La métrique de Schwarzschild est non seulement radiale, mais aussi symétrique, ce qui signifie que $\alpha.\beta = 1$; par conséquent : $\alpha.\dot{\beta} + \dot{\alpha}.\beta = 0$, donc :

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}.$$

On a donc :

$$\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4 = \frac{\dot{\alpha}}{2\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{2\beta} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r},$$

ce qui entraîne :

$$(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4) \cdot B^2 = \frac{2}{r} \cdot \left(1 - \frac{2k}{r}\right) \cdot \frac{k \cdot c^2}{r^2} = \frac{2k \cdot c^2}{r^3} - \frac{4k^2 \cdot c^2}{r^4}.$$

Calculons encore $\frac{\partial B^2}{\partial x^2} = \frac{\partial B^2}{\partial r}$, sachant que $B^2 = \left(1 - \frac{2k}{r}\right) \cdot \frac{k \cdot c^2}{r^2}$:

$$\frac{\partial B^2}{\partial r} = \frac{2k}{r^2} \cdot \frac{k \cdot c^2}{r^2} - \left(1 - \frac{2k}{r}\right) \cdot \frac{2k \cdot c^2}{r^3} = \frac{2k^2 \cdot c^2}{r^4} - \frac{2k \cdot c^2}{r^3} + \frac{4k^2 \cdot c^2}{r^4};$$

$$\frac{\partial B^2}{\partial r} = \frac{6k^2 \cdot c^2}{r^4} - \frac{2k \cdot c^2}{r^3}.$$

Nous voyons donc que :

$$S = \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4) \cdot B^2 = \frac{2k \cdot c^2}{r^3} - \frac{4k^2 \cdot c^2}{r^4} + \frac{6k^2 \cdot c^2}{r^4} - \frac{2k \cdot c^2}{r^3};$$

$$S = \frac{2k^2 \cdot c^2}{r^4}.$$

Il en résulte que la divergence du gradient ne s'annule pas : $\Delta\Phi \neq 0$ et $\square\Phi \neq 0$ en métrique de Schwarzschild.

On pouvait s'attendre à ce résultat, puisque nous avons vu précédemment que seules les métriques isotropes annulent la divergence du gradient dans le vide; or la métrique de Schwarzschild n'est pas isotrope (car $\gamma \neq \beta$), mais radiale (car $\gamma = 1$).

Vérifions-le encore en calculant le flux f : dans cette métrique, l'aire de la sphère de rayon r est $4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \gamma = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, et le module du gradient du potentiel (version contravariante) est : $B^2 = \left(1 - \frac{2k}{r}\right) \cdot \frac{k \cdot c^2}{r^2} = \left(1 - \frac{2k}{r}\right) \cdot \frac{G \cdot M}{r^2}$, donc :

$$f = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{2k}{r}\right) \cdot \frac{G \cdot M}{r^2} = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot M \cdot \left(1 - \frac{2k}{r}\right).$$

Ce flux varie avec r . Pour qu'il soit constant, il faudrait diviser l'aire de la sphère par $1 - \frac{2k}{r}$, autrement dit il faudrait diviser γ par $1 - \frac{2k}{r}$; on aurait alors $\gamma = \beta$, et la métrique serait isotrope.

12 Généralisation

Nous considérons maintenant une métrique statique à symétrie sphérique de forme très générale :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.d\theta^2 - \gamma.r^2.\sin^2\theta.d\phi^2.$$

Il s'agit de la métrique associée à un corps unique, supposé ponctuel.

Dans les sections précédentes, nous avons supposé dès le départ la métrique isotrope ($\beta = \gamma$) ou symétrique ($\alpha.\beta = 1$) ; ici, nous ne faisons aucune de ces hypothèses.

Selon l'usage du calcul tensoriel, on note :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx^1 = c.dt ; \\ dx^2 = dr ; \\ dx^3 = d\theta ; \\ dx^4 = d\phi. \end{array} \right.$$

Les coefficients non nuls de la métrique (forme covariante) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{11} = \alpha ; \\ g_{22} = -\beta ; \\ g_{33} = -\gamma.r^2 ; \\ g_{44} = -\gamma.r^2.\sin^2\theta. \end{array} \right.$$

Sous forme contravariante, ils s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} g^{11} = \frac{1}{\alpha} ; \\ g^{22} = -\frac{1}{\beta} ; \\ g^{33} = -\frac{1}{\gamma.r^2} ; \\ g^{44} = -\frac{1}{\gamma.r^2.\sin^2\theta}. \end{array} \right.$$

Nous aurons besoin des dérivées des g_{ii} par rapport à r . Voici les calculs, dans lesquels le point surmontant une fonction désigne sa dérivée par rapport à

r (et non par rapport à t !) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \dot{\alpha} ; \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -\frac{\partial \beta}{\partial r} = -\dot{\beta} ; \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} = -\frac{\partial(\gamma.r^2)}{\partial r} = -r^2.\dot{\gamma} - 2.r.\gamma ; \\ \frac{\partial g_{44}}{\partial r} = -\frac{\partial(\gamma.r^2.\sin^2\theta)}{\partial r} = -r^2.\dot{\gamma}.\sin^2\theta - 2.r.\gamma.\sin^2\theta. \end{array} \right.$$

Nous allons reprendre l'étude du potentiel $\Phi = -\frac{G.M}{r} = -\frac{k.c^2}{r}$ créé par une masse M ponctuelle immobile. Pour le moment, nous ne faisons pas intervenir la variable temps.

Le gradient du potentiel scalaire Φ est un vecteur radial covariant que nous noterons B_i en notation tensorielle, ce qui signifie que :

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{GM}{r^2} = \frac{k.c^2}{r^2}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = 0.$$

Seule la composante radiale B_2 est non nulle. Nous notons B^2 sa forme contravariante.

Pour passer du gradient usuel, covariant, à sa forme contravariante (donc de B_2 à B^2), il faut remonter l'indice selon la méthode usuelle en calcul tensoriel :

$$B^2 = |g^{22}|.B_2 = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{GM}{r^2} = \frac{k.c^2}{\beta.r^2}.$$

Calculons tout de suite sa dérivée par rapport à x^2 (c'est-à-dire par rapport à r) :

$$\frac{\partial B^2}{\partial x^2} = \frac{\partial B^2}{\partial r} = k.c^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\beta.r^2} \right) = -k.c^2 \cdot \frac{1}{\beta^2.r^4} \cdot \left(r^2 \cdot \frac{\partial \beta}{\partial r} + 2.r.\beta \right) ;$$

$$\frac{\partial B^2}{\partial x^2} = \frac{\partial B^2}{\partial r} = -\frac{k.c^2}{\beta.r^2} \cdot \left(\frac{\partial \beta}{\beta.\partial r} + \frac{2}{r} \right).$$

Comme précédemment, nous allons noter $\dot{\beta}$ la dérivée de β par rapport à r (et non par rapport au temps!).

$$\frac{\partial B^2}{\partial x^2} = \frac{\partial B^2}{\partial r} = -\frac{k.c^2}{\beta.r^2} \cdot \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2}{r} \right).$$

Nous voulons calculer la divergence S de ce gradient, en utilisant la formule :

$$S = \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \sum_{i=1,2,3,4} \Gamma_{i2}^i B^2 = \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4) . B^2.$$

Récupérons les expressions de B^2 et de $\frac{\partial B^2}{\partial x^2}$ que nous venons de calculer, et faisons les substitutions. L'égalité ci-dessus devient donc :

$$S = -\frac{k.c^2}{\beta.r^2} \cdot \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2}{r} \right) + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4) \cdot \frac{k.c^2}{\beta.r^2} ;$$

$$S = \frac{k.c^2}{\beta.r^2} \cdot \left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta} - \frac{2}{r} + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4 \right) .$$

Nous souhaitons trouver une condition pour que S (qui est le laplacien du potentiel, c'est-à-dire la version statique du d'alembertien) soit identiquement nul. Cette condition s'écrit :

$$\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4 = \frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2}{r} .$$

Il reste à calculer les symboles de Christoffel, selon la formule :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \cdot g^{ii} \cdot \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) .$$

Compte-tenu du fait que g_{ij} s'annule pour $i \neq j$, et que les seules dérivées partielles non nulles sont les dérivées par rapport à x^2 (c'est-à-dire r), on calcule facilement les symboles de Christoffel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \cdot g^{11} \cdot \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} \cdot g^{11} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} ; \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \cdot g^{22} \cdot \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot g^{22} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} ; \\ \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} \cdot g^{33} \cdot \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2} \cdot g^{33} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} ; \\ \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{2} \cdot g^{44} \cdot \left(\frac{\partial g_{42}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{42}}{\partial x^4} \right) = \frac{1}{2} \cdot g^{44} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} ; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \cdot g^{11} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \dot{\alpha} = \frac{\dot{\alpha}}{2 \cdot \alpha} ; \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \cdot g^{22} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\beta} \cdot (-\dot{\beta}) = \frac{\dot{\beta}}{2 \cdot \beta} ; \\ \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} \cdot g^{33} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\gamma \cdot r^2} \cdot (-r^2 \cdot \dot{\gamma} - 2 \cdot r \cdot \gamma) = \frac{\dot{\gamma}}{2 \cdot \gamma} + \frac{1}{r} ; \\ \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{2} \cdot g^{44} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\gamma \cdot r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot (-r^2 \cdot \dot{\gamma} \cdot \sin^2 \theta - 2 \cdot r \cdot \gamma \cdot \sin^2 \theta) = \frac{\dot{\gamma}}{2 \cdot \gamma} + \frac{1}{r} . \end{array} \right.$$

Finalement, on obtient :

$$\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4 = \frac{\dot{\alpha}}{2 \cdot \alpha} + \frac{\dot{\beta}}{2 \cdot \beta} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{2}{r} .$$

Mais nous avons vu que la condition pour que le laplacien s'annule s'écrit :

$$\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4 = \frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2}{r}.$$

En rapprochant ces deux égalités, nous obtenons :

$$\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{2}{r} = \frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2}{r} ;$$

$$\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = 0 ;$$

$$\frac{d(\text{Log } \alpha)}{2.dr} - \frac{d(\text{Log } \beta)}{2.dr} + \frac{d(\text{Log } \gamma)}{dr} = 0 ;$$

$$\frac{d(\text{Log } \sqrt{\alpha})}{dr} + \frac{d\left(\text{Log } \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)}{dr} + \frac{d(\text{Log } \gamma)}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left[\text{Log} \left(\frac{\sqrt{\alpha}.\gamma}{\sqrt{\beta}} \right) \right] = 0 ;$$

$$\frac{\alpha.\gamma^2}{\beta} = c^{te}.$$

Quand r tend vers l'infini, α , β et γ tendent vers 1, donc la constante ne peut être que 1. La condition pour que le laplacien du potentiel s'annule s'écrit donc :

$$\frac{\alpha.\gamma^2}{\beta} = 1, \text{ ou, si on préfère : } \beta = \alpha.\gamma^2.$$

Cette formule est tout-à-fait générale : une métrique statique, à symétrie sphérique, a un laplacien nul si et seulement si ses coefficients vérifient l'égalité ci-dessus. Une métrique statique à laplacien nul a aussi un d'alembertien nul. Pour un observateur en mouvement, cette métrique n'apparaîtra plus statique, mais son d'alembertien sera toujours nul, en raison de la relativité restreinte.

Théorème

Considérons une métrique à symétrie sphérique, de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.d\theta^2 - \gamma.r^2.\sin^2\theta.d\phi^2$$

où α , β et γ sont trois fonctions du potentiel de la forme $\Phi = -\frac{K}{r}$ (potentiel newtonien). Alors le d'alembertien de ce potentiel sera identiquement nul si et seulement si : $\beta = \alpha.\gamma^2$.

On peut remarquer que, si cette métrique est radiale ($\gamma = 1$), alors elle est nécessairement homogène ($\alpha = \beta$).

Si elle est isotrope ($\beta = \gamma$), alors elle est aussi symétrique ($\alpha.\beta = 1$).

Inversement, si elle est symétrique ($\alpha.\beta = 1$), alors elle est aussi isotrope ($\beta = \gamma$).

Dans le cas particulier de la métrique de Ni, on a : $\beta = \gamma = \frac{1}{\alpha}$; on vérifie facilement que l'égalité ci-dessus est bien respectée.

Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, on a $\beta = \frac{1}{\alpha}$ et $\gamma = 1$. L'égalité ci-dessus n'est pas respectée.

On pourrait nous reprocher d'avoir supposé que le potentiel est de type newtonien : $\Phi = -\frac{K}{r} = -\frac{G.M}{r}$, ce qui pourrait nuire à la valeur générale de notre théorème. En effet, on pourrait imaginer un potentiel s'exprimant d'une manière bien différente ! Reprenons donc notre calcul sans faire d'hypothèse sur Φ .

Nous admettons que le gradient du potentiel est un vecteur radial, sa seule composante non nulle étant $B_2 = \dot{\Phi}$ (forme covariante) ou $B^2 = \frac{1}{\beta}.\dot{\Phi}$ (forme contravariante).

On a alors :

$$\begin{aligned}\dot{B}^2 &= \frac{\partial B^2}{\partial r} = \frac{1}{\beta}.\ddot{\Phi} - \frac{\dot{\beta}}{\beta^2}.\dot{\Phi} ; \\ \frac{\dot{B}^2}{B^2} &= \frac{\beta}{\dot{\Phi}}.\left(\frac{1}{\beta}.\ddot{\Phi} - \frac{\dot{\beta}}{\beta^2}.\dot{\Phi}\right) = \frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} - \frac{\dot{\beta}}{\beta}.\end{aligned}$$

Reprenons alors le calcul précédent à ce stade :

$$S = \dot{B}^2 + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4) . B^2.$$

Rappelons que S est la divergence du gradient (donc le laplacien) du potentiel ; on doit avoir : $S = 0$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{\dot{B}^2}{B^2} &= -(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{42}^4) ; \\ \frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} - \frac{\dot{\beta}}{\beta} &= -\left(\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{2}{r}\right) ; \\ \frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} &= -\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{2}{r} ; \\ \overline{\text{Log } \dot{\Phi}} &= -\frac{\dot{a}}{2} + \frac{\dot{b}}{2} - \dot{g} - 2.\overline{\text{Log } r}.\end{aligned}$$

Par intégration, on obtient :

$$\text{Log } \dot{\Phi} = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - g - 2.\text{Log } r + K ;$$

$$\begin{aligned}
\text{Log } \dot{\Phi} &= -\frac{\text{Log } \alpha}{2} + \frac{\text{Log } \beta}{2} - \text{Log } \gamma - 2.\text{Log } r + K ; \\
\text{Log } \dot{\Phi} &= \text{Log } \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \text{Log } \sqrt{\beta} + \text{Log } \frac{1}{\gamma} + \text{Log } \frac{K}{r^2} ; \\
\text{Log } \dot{\Phi} &= \text{Log } \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{K}{r^2} \right) = \text{Log } \left(\frac{K}{r^2} \cdot \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} \cdot \gamma} \right) ; \\
\dot{\Phi} &= \frac{K}{r^2} \cdot \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} \cdot \gamma} .
\end{aligned}$$

Si nous supposons que Φ est proportionnel à $-\frac{1}{r}$, comme c'est le cas du potentiel newtonien, nous en déduisons que $\dot{\Phi}$ est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$; dans ce cas, $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} \cdot \gamma}$ est une constante, qui ne peut être que 1, car les trois fonctions α , β et γ tendent vers 1 à l'infini. On a donc : $\beta = \alpha \cdot \gamma^2$. C'est ce que nous avons déjà dit.

Mais, inversement, si nous savons que $\beta = \alpha \cdot \gamma^2$, nous pouvons en déduire que $\dot{\Phi} = \frac{K}{r^2}$, donc que $\Phi = -\frac{K}{r}$.

A première vue, il semble naturel d'admettre que $\Phi = -\frac{K}{r}$ (car c'est une égalité à laquelle la gravitation de Newton nous a habitués) et d'en déduire que $\beta = \alpha \cdot \gamma^2$ (pour toute métrique à symétrie sphérique, basée sur un potentiel à d'alembertien nul).

Cependant, on peut raisonner de manière inverse : on peut considérer que c'est l'égalité $\beta = \alpha \cdot \gamma^2$ qui est naturelle (voir le paragraphe sur la "thermodynamique" du vide quantique, dans le document "gravitation et vide quantique") ; dans ce cas, l'égalité $\Phi = -\frac{K}{r}$ sera considérée comme une conséquence.

Théorème

Considérons une métrique à symétrie sphérique, de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.d\theta^2 - \gamma.r^2.\sin^2\theta.d\phi^2$$

où α , β et γ sont trois fonctions du potentiel Φ , vérifiant : $\beta = \alpha \cdot \gamma^2$.

Alors le d'alembertien de ce potentiel sera identiquement nul si et seulement si le potentiel peut s'écrire sous la forme : $\Phi = -\frac{K}{r}$.

13 Potentiel à d'alembertien nul : lien avec le tenseur de Ricci

Nous avons vu qu'une métrique est compatible avec un potentiel de type newtonien, à d'alembertien nul, si :

$$\beta = \alpha \cdot \gamma^2.$$

Ceci équivaut à $\text{Log } \beta = \text{Log } \alpha + 2 \cdot \text{Log } \gamma$, c'est-à-dire :

$$b = a + 2.g.$$

Reprenons les expressions générales des composantes du tenseur de Ricci :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{a} \cdot \left(-\frac{\ddot{a}}{2\dot{a}} - \frac{\dot{a}}{4} + \frac{\dot{b}}{4} - \frac{\dot{g}}{2} - \frac{1}{r} \right) ; \\ R_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{2} + \ddot{g} + \frac{\dot{a}^2}{4} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{4} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{2} \right) + \frac{1}{r} \cdot \left(-\dot{b} + 2\dot{g} \right) ; \\ R_{33} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left[\left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{4} + \frac{\dot{a}\dot{g}}{4} \right) \cdot r^2 + \left(2\dot{g} - \frac{\dot{b}}{2} + \frac{\dot{a}}{2} \right) \cdot r + 1 \right] - 1. \end{array} \right.$$

Nous voudrions savoir si les composantes R_{11} et R_{33} peuvent s'annuler, en supposant vérifiée la condition : $b = a + 2.g$.

Cette égalité entraîne : $b - a - 2.g = 0$, et par conséquent $\dot{b} - \dot{a} - 2.\dot{g} = 0$, ou encore $-\frac{\dot{a}}{4} + \frac{\dot{b}}{4} - \frac{\dot{g}}{2} = 0$, ce qui permet de simplifier l'expression de R_{11} :

$$R_{11} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{a} \cdot \left(-\frac{\ddot{a}}{2\dot{a}} - \frac{1}{r} \right).$$

On aura $R_{11} = 0$ si $-\frac{\ddot{a}}{2\dot{a}} - \frac{1}{r} = 0$, soit :

$$\ddot{a} = -\frac{2}{r} \cdot \dot{a}.$$

Cette équation différentielle a pour solution : $\dot{a} = \frac{K}{r^2}$ (où K est une constante) ;
ou $a = -\frac{K}{r} + K_2$ (où K_2 est une autre constante).

On a donc : $\alpha = e^a = e^{-\frac{K}{r} + K_2} = e^{K_2} \cdot e^{-\frac{K}{r}}$; comme α tend vers 1 quand r tend vers l'infini, on a nécessairement $K_2 = 0$, donc :

$$\alpha = e^{-\frac{K}{r}}.$$

Dans l'expression de R_{33} , remplaçons $\dot{b}$ par $\dot{a} + 2.\dot{g}$:

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left[\left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{4} + \frac{\dot{a}\dot{g}}{4} \right) \cdot r^2 + \left(2\dot{g} - \frac{\dot{b}}{2} + \frac{\dot{a}}{2} \right) \cdot r + 1 \right] - 1 ;$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left[\left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{(\dot{a} + 2\dot{g})\dot{g}}{4} + \frac{\dot{a}\dot{g}}{4} \right) . r^2 + \left(2\dot{g} - \frac{(\dot{a} + 2\dot{g})}{2} + \frac{\dot{a}}{2} \right) . r + 1 \right] - 1 ; \\
R_{33} &= \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left[\left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{a}\dot{g}}{4} - \frac{\dot{g}^2}{2} + \frac{\dot{a}\dot{g}}{4} \right) . r^2 + \left(2\dot{g} - \frac{\dot{a}}{2} - \dot{g} + \frac{\dot{a}}{2} \right) . r + 1 \right] - 1 ; \\
R_{33} &= \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left(\frac{\ddot{g}}{2} . r^2 + \dot{g} . r + 1 \right) - 1.
\end{aligned}$$

Pour que R_{33} soit identiquement nul, on doit avoir :

$$\gamma \cdot \left(\frac{\ddot{g}}{2} . r^2 + \dot{g} . r + 1 \right) = \beta.$$

Le membre de gauche ne dépend que de γ (et des fonctions qui en dérivent), le membre de droite ne dépend que de β . Si β et γ sont deux fonctions indépendantes, cette égalité ne peut pas être toujours vraie. Donc pour que R_{33} soit identiquement nul, il est nécessaire que les fonctions β et γ soient proportionnelles ; comme elles doivent tendre vers 1 quand r tend vers l'infini, le coefficient de proportionnalité ne peut être que 1, ce qui signifie que $\beta = \gamma$. On a alors :

$$R_{33} = \frac{\ddot{g}}{2} . r^2 + \dot{g} . r.$$

On aura $R_{33} = 0$ si :

$$\ddot{g} = -\frac{2}{r} . \dot{g}.$$

Comme précédemment, on en tire :

$$\beta = \gamma = e^{-\frac{K'}{r}}.$$

La métrique s'écrit donc :

$$ds^2 = e^{-\frac{K}{r}} . c^2 . dt^2 - e^{-\frac{K'}{r}} . dl^2.$$

Nous avons donc $\alpha = e^{-\frac{K}{r}}$ et $\beta = \gamma = e^{-\frac{K'}{r}}$; de plus, nous avons vu que $\beta = \alpha . \gamma^2$, ce qui entraîne que $\beta = \alpha . \beta^2$, donc $\alpha . \beta = 1$. Par conséquent, $e^{-\frac{K}{r}} . e^{-\frac{K'}{r}} = 1$, d'où on tire : $K' = -K$. En définitive, la métrique s'écrit :

$$ds^2 = e^{-\frac{K}{r}} . c^2 . dt^2 - e^{\frac{K}{r}} . dl^2.$$

Si on veut que cette métrique respecte la limite newtonienne et les conditions imposées par la formulation newtonienne paramétrisée, on doit prendre : $K = \frac{2.G.M}{c^2}$.

La métrique ainsi obtenue est la métrique triviale de Ni (à un coefficient près).

Théorème

Considérons une métrique à symétrie sphérique, de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.d\theta^2 - \gamma.r^2.\sin^2\theta.d\phi^2$$

où α , β et γ sont trois fonctions du potentiel newtonien $\Phi = -\frac{G.M}{r}$.

Alors il existe une seule métrique éligible respectant la limite newtonienne et les deux conditions suivantes :

1) le d'alembertien du potentiel est identiquement nul : $\square\Phi = 0$;

2) le tenseur de Ricci de la métrique est radial ($R_{11} = R_{33} = R_{44} = 0$, $R_{22} \neq 0$).

Cette métrique est la métrique de Ni (à un coefficient près).

Nous nous sommes basés sur le fait que $R_{11} = R_{33} = 0$; il nous reste à calculer R_{22} .

Nous avons : $\dot{a} = \frac{K}{r^2}$, $\dot{b} = \dot{g} = -\frac{K}{r^2}$, $\ddot{a} = -\frac{2.K}{r^3}$, $\ddot{b} = \ddot{g} = \frac{2.K}{r^3}$. Faisons les substitutions dans l'expression de R_{22} :

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{2} + \ddot{g} + \frac{\dot{a}^2}{4} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{a}.\dot{b}}{4} - \frac{\dot{b}.\dot{g}}{2} \right) + \frac{1}{r} \cdot (-\dot{b} + 2.\dot{g}) ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{2} + \ddot{b} + \frac{\dot{a}^2}{4} + \frac{\dot{b}^2}{2} - \frac{\dot{a}.\dot{b}}{4} - \frac{\dot{b}^2}{2} \right) + \frac{1}{r} \cdot (-\dot{b} + 2.\dot{b}) ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{2} + \ddot{b} + \frac{\dot{a}^2}{4} - \frac{\dot{a}.\dot{b}}{4} \right) + \frac{1}{r} \cdot \dot{b} ;$$

$$R_{22} = -\frac{K}{r^3} + \frac{2.K}{r^3} + \frac{K^2}{4.r^4} + \frac{K^2}{4.r^4} - \frac{K}{r^3} ;$$

$$R_{22} = \frac{K^2}{2.r^4}.$$

Nous avons posé : $K = \frac{2.G.M}{c^2}$; précédemment, nous avons utilisé : $k = \frac{G.M}{c^2}$. On a donc : $K = 2.k$. Par conséquent :

$$R_{22} = \frac{2.k^2}{r^4}.$$

14 Métriques basées sur un potentiel relatif : première approche

Nous allons examiner ici les propriétés d'une métrique isotrope associée à un potentiel newtonien relatif, c'est-à-dire défini à une constante près (exactement comme dans la théorie de Newton). Nous nous baserons sur l'interprétation du critère de Schild présentée dans le document "Gravitation relativiste". Nous n'utiliserons pas, pour le moment, le tenseur de Ricci : il interviendra dans la section suivante.

Considérons une métrique isotrope exprimée ainsi :

$$ds^2 = c^2 . dt_{loc}^2 - dl_{loc}^2 = \alpha(\Phi) . c^2 . dt_{dist}^2 - \beta(\Phi) . dl_{dist}^2,$$

où α et β sont des fonctions du potentiel Φ dans lequel se déroule la scène : $\alpha = \alpha(\Phi)$ et $\beta = \beta(\Phi)$.

L'observateur local est plongé dans le même potentiel Φ , et l'observateur distant se trouve dans un potentiel nul.

L'équation de la métrique est adaptée à l'usage de l'observateur distant (situé dans un potentiel nul) ; les fonctions α et β sont adaptées à cet observateur, et les variables dt et dl sont évaluées par lui.

La question qui se pose est de savoir si le "potentiel nul" a une signification absolue. Autrement dit, si nous remplaçons l'observateur de référence (l'observateur distant) par un autre observateur immobile situé dans un potentiel non nul, l'équation va-t-elle garder la même forme ?

Notons dt_{obs} et dl_{obs} les durées et distances infinitésimales évaluées par cet observateur, et Φ_0 son potentiel. On a :

$$dt_{obs}^2 = \alpha(\Phi_0) . dt_{dist}^2 \quad \text{et} \quad dl_{obs}^2 = \beta(\Phi_0) . dl_{dist}^2 ; \text{ donc :}$$

$$dt_{dist}^2 = \frac{1}{\alpha(\Phi_0)} . dt_{obs}^2 \quad \text{et} \quad dl_{dist}^2 = \frac{1}{\beta(\Phi_0)} . dl_{obs}^2.$$

Faisons la substitution dans l'équation précédente ; il vient :

$$ds^2 = \frac{\alpha(\Phi)}{\alpha(\Phi_0)} . c^2 . dt_{obs}^2 - \frac{\beta(\Phi)}{\beta(\Phi_0)} . dl_{obs}^2.$$

Comme dans l'équation initiale $\alpha(\Phi)$ représentait la différence de potentiel entre la scène observée et l'observateur, il doit en être de même ici, donc on doit avoir :

$$\alpha(\Phi - \Phi_0) = \frac{\alpha(\Phi)}{\alpha(\Phi_0)} \quad \text{et} \quad \beta(\Phi - \Phi_0) = \frac{\beta(\Phi)}{\beta(\Phi_0)}.$$

On sait que toute fonction continue possédant cette propriété est de la forme $e^{\lambda \cdot \Phi}$, où λ est une constante. Donc :

$$\alpha(\Phi) = e^{\lambda \cdot \Phi}.$$

De même :

$$\beta(\Phi) = e^{\mu \cdot \Phi}$$

où μ est une autre constante.

En conclusion :

Toute métrique isotrope basée sur un potentiel relatif est nécessairement de la forme :

$$ds^2 = e^{\lambda \cdot \Phi} \cdot c^2 \cdot dt^2 - e^{\mu \cdot \Phi} \cdot dl^2.$$

15 Métriques basées sur un potentiel relatif : seconde approche

Nous allons reprendre cette étude en faisant intervenir le tenseur de Ricci.

Reprenons les expressions générales des principales composantes de ce tenseur :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta} \cdot \left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\beta}}{4\dot{\beta}} - \frac{\dot{\gamma}}{2\dot{\gamma}} - \frac{1}{r} \right) ; \\ R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4\dot{\alpha}^2} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2\dot{\gamma}^2} - \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{4\dot{\alpha}\dot{\beta}} - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{2\dot{\beta}\dot{\gamma}} \right) + \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{\dot{\beta}}{\dot{\beta}} + \frac{2\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}} \right) ; \\ R_{33} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left(\frac{\dot{\gamma}}{2\dot{\gamma}} - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{4\dot{\beta}\dot{\gamma}} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{4\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \right) \cdot r^2 + \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left(\frac{2\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}} - \frac{\dot{\beta}}{2\dot{\beta}} + \frac{\dot{\alpha}}{2\dot{\alpha}} \right) \cdot r + \frac{\gamma}{\beta} - 1. \end{array} \right.$$

Nous considérons α , β et γ comme trois fonctions du potentiel newtonien Φ .

Posons : $a = \text{Log } \alpha$, $b = \text{Log } \beta$ et $g = \text{Log } \gamma$. On a alors :

$$\dot{a} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad \dot{b} = \frac{\dot{\beta}}{\beta} \quad \text{et} \quad \dot{g} = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}.$$

De plus, l'égalité : $\dot{\alpha} = \dot{a} \cdot \alpha$ entraîne : $\ddot{\alpha} = \ddot{a} \cdot \alpha + \dot{a} \cdot \dot{\alpha}$, donc :

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = \ddot{a} + \dot{a} \cdot \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \ddot{a} + \dot{a}^2.$$

D'où on tire :

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}} = \frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}} \cdot \frac{\alpha}{\dot{\alpha}} = \frac{\ddot{a} + \dot{a}^2}{\dot{a}} = \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} + \dot{a}.$$

On démontrerait de la même manière que $\ddot{\gamma} = \ddot{g} + \dot{g}^2$ et que $\ddot{\gamma} = \ddot{g} + \dot{g}$.

Dans les expressions des composantes du tenseur de Ricci, remplaçons $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ par $\dot{a}$, $\frac{\dot{\beta}}{\beta}$ par $\dot{b}$, $\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}$ par $\dot{g}$, $\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}$ par $\ddot{a} + \dot{a}^2$, $\frac{\ddot{\beta}}{\beta}$ par $\ddot{a} + \dot{a}$, $\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}$ par $\ddot{g} + \dot{g}^2$, et $\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}$ par $\ddot{g} + \dot{g}$.

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta} \cdot \left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2\gamma} - \frac{1}{r} \right) ;$$

$$R_{11} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{a} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} + \dot{a} \right) + \frac{\dot{a}}{4} + \frac{\dot{b}}{4} - \frac{\dot{g}}{2} - \frac{1}{r} \right) ;$$

$$R_{11} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{a} \cdot \left(-\frac{\ddot{a}}{2\dot{a}} - \frac{\dot{a}}{4} + \frac{\dot{b}}{4} - \frac{\dot{g}}{2} - \frac{1}{r} \right) .$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4\alpha^2} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2\gamma^2} - \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{4\alpha\beta} - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{2\beta\gamma} \right) + \frac{1}{r} \cdot \left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2\dot{\gamma}}{\gamma} \right) ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{1}{2} \cdot (\ddot{a} + \dot{a}^2) + (\ddot{g} + \dot{g}^2) - \frac{\dot{a}^2}{4} - \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{4} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{2} \right) + \frac{1}{r} \cdot (-\dot{b} + 2\dot{g}) ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{2} + \ddot{g} + \frac{\dot{a}^2}{4} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{4} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{2} \right) + \frac{1}{r} \cdot (-\dot{b} + 2\dot{g}) .$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left(\frac{\ddot{\gamma}}{2\gamma} - \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{4\beta\gamma} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{4\alpha\gamma} \right) \cdot r^2 + \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left(\frac{2\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{2\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2\alpha} \right) \cdot r + \frac{\gamma}{\beta} - 1 ;$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left[\left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{4} + \frac{\dot{a}\dot{g}}{4} \right) \cdot r^2 + \left(2\dot{g} - \frac{\dot{b}}{2} + \frac{\dot{a}}{2} \right) \cdot r + 1 \right] - 1 .$$

Récapitulons :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \dot{a} \cdot \left(-\frac{\ddot{a}}{2\dot{a}} - \frac{\dot{a}}{4} + \frac{\dot{b}}{4} - \frac{\dot{g}}{2} - \frac{1}{r} \right) ; \\ R_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{2} + \ddot{g} + \frac{\dot{a}^2}{4} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{4} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{2} \right) + \frac{1}{r} \cdot (-\dot{b} + 2\dot{g}) ; \\ R_{33} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left[\left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{4} + \frac{\dot{a}\dot{g}}{4} \right) \cdot r^2 + \left(2\dot{g} - \frac{\dot{b}}{2} + \frac{\dot{a}}{2} \right) \cdot r + 1 \right] - 1 . \end{array} \right.$$

Notre but est d'étudier les propriétés des métriques basées sur un potentiel relatif. Ceci signifie que le potentiel est défini à une constante près.

Soyons plus précis. Nous attribuons une signification objective (physique) au tenseur de Ricci, et aux différences de potentiel, mais pas au potentiel lui-même. Si le tenseur de Ricci se calcule à l'aide de fonctions du potentiel, ces fonctions ne peuvent intervenir que par leurs dérivées (par rapport à t , à r , etc.).

Nous savons que les fonctions a , b , g , comme α , β et γ , sont des fonctions du potentiel. Dans les expressions figurant entre les parenthèses, dans les trois formules ci-dessus, ces fonctions ne sont représentées que par leurs dérivées (premières ou secondes). Donc, connaissant la valeur d'une (ou plusieurs) de ces expressions, il est impossible de remonter à la valeur des fonctions a , b , g , et donc à la valeur du potentiel.

Nous cherchons donc à savoir quelles conditions doivent être remplies pour que toutes les composantes du tenseur de Ricci dépendent uniquement de ces dérivées, et non des fonctions elles-mêmes.

On peut remarquer deux obstacles.

Le premier est le facteur $\frac{\alpha}{\beta}$ dans l'expression de R_{11} , le second est le facteur $\frac{\gamma}{\beta}$ dans l'expression de R_{33} .

Examinons le premier problème. Dans la première formule, en supposant connues les valeurs de toutes les dérivées et celle de R_{11} , il semble possible de calculer le facteur $\frac{\alpha}{\beta}$, ce qui permet de "remonter" à une propriété des fonctions α et β , et donc à la valeur du potentiel. Ce problème peut avoir deux solutions :

- soit les fonctions α et β ne sont pas indépendantes : elles sont identiques ($\alpha = \beta$) ou proportionnelles ($\beta = \lambda.\alpha$, où λ est une constante) ; mais comme α et β tendent vers 1 quand r tend vers l'infini, la constante λ ne peut être que 1 ;
- soit l'expression située entre parenthèses est identiquement nulle.

Examinons le second problème. Dans la troisième formule, connaissant les valeurs de toutes les dérivées et celle de R_{33} , il semble possible de calculer le facteur $\frac{\gamma}{\beta}$, ce qui permet de "remonter" à une propriété des fonctions γ et β , et donc à la valeur du potentiel. Ce problème peut avoir deux solutions :

- soit les fonctions γ et β ne sont pas indépendantes : elles sont identiques ($\gamma = \beta$) ou proportionnelles ; mais comme elles tendent vers 1 quand r tend vers l'infini, la coefficient de proportionnalité ne peut être que 1 ;
- soit l'expression située entre crochets est identiquement nulle.

Mais si l'expression entre crochets était identiquement nulle, on aurait : $R_{33} = -1$, quel que soit le potentiel, ce qui est impossible. En particulier, nous savons que R_{33} doit tendre vers 0 à l'infini. Nous sommes donc dans la nécessité d'admettre l'autre solution :

$$\gamma = \beta.$$

Ceci signifie qu'une métrique basée sur un potentiel relatif est nécessairement isotrope, ce qui nous renvoie à notre première approche.

Revenons maintenant à la première formule. Sachant que l'égalité $\gamma = \beta$ est juste, nous devons conclure que l'égalité $\beta = \alpha$ est fausse ; sinon on aurait $\alpha = \beta = \gamma$; dans ce cas, il serait possible de mettre α en facteur dans l'expression de la métrique. Il n'y aurait plus de véritable courbure, mais seulement un "facteur d'échelle". De plus, si on se réfère au formalisme post-newtonien paramétrisé (présenté à la fin du document sur les métriques), on voit que les métriques isotropes homogènes, définies par l'égalité $\alpha = \beta = \gamma$, ne passent pas les premiers tests de sélection : en tant que candidates pour expliquer les phénomènes gravitationnels connus, elles sont éliminées par les grands tests classiques.

Nous devons donc admettre l'autre solution, qui s'écrit :

$$-\frac{\ddot{a}}{2.\dot{a}} - \frac{\dot{a}}{4} + \frac{\dot{b}}{4} - \frac{\dot{g}}{2} - \frac{1}{r} = 0.$$

Puisque $\beta = \gamma$, on a aussi $b = g$, donc on peut écrire :

$$-\frac{\ddot{a}}{2.\dot{a}} - \frac{\dot{a}}{4} - \frac{\dot{b}}{4} - \frac{1}{r} = 0.$$

Rappelons-nous maintenant ce que nous avons dit sur les métriques isotropes ($\beta = \gamma$) basées sur un potentiel relatif, dans notre première approche : nous avons démontré qu'elles sont nécessairement de la forme :

$$ds^2 = e^{\lambda.\Phi}.c^2.dt^2 - e^{\mu.\Phi}.dl^2$$

où λ et μ sont deux constantes.

On a donc : $\alpha = e^{\lambda.\Phi}$ et $\beta = \gamma = e^{\mu.\Phi}$.

Nous venons de voir que toute métrique basée sur un potentiel relatif est nécessairement isotrope, donc la conclusion ci-dessus se généralise à toutes ces métriques.

On peut donc dire que $a = \text{Log } \alpha = \lambda.\Phi$ et que $b = \text{Log } \beta = \mu.\Phi$; ce qui entraîne :

$$\dot{a} = \lambda.\dot{\Phi}, \ddot{a} = \lambda.\ddot{\Phi}, \dot{b} = \mu.\dot{\Phi}.$$

En substituant dans l'égalité $-\frac{\ddot{a}}{2.\dot{a}} - \frac{\dot{a}}{4} - \frac{\dot{b}}{4} - \frac{1}{r} = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}.\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{\Phi}} - \frac{\lambda}{4}.\dot{\Phi} - \frac{\mu}{4}.\dot{\Phi} - \frac{1}{r} &= 0 ; \\ -\frac{1}{2}.\overline{\dot{\Phi}} - \frac{\lambda + \mu}{4}.\dot{\Phi} - \overline{\text{Log } r} &= 0. \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$-\frac{1}{2}.\text{Log } \dot{\Phi} - \frac{\lambda + \mu}{4}.\Phi - \text{Log } r = K_1.$$

Multiplions par -2 :

$$\text{Log } \dot{\Phi} + \frac{\lambda + \mu}{2}.\Phi + \text{Log } r^2 = -2.K_1.$$

Passons aux exponentielles :

$$\dot{\Phi}.e^{\frac{\lambda + \mu}{2}.\Phi}.r^2 = e^{-2.K_1} = K_2 \quad (\text{avec } K_2 \geq 0) ;$$

$$\dot{\Phi}.e^{\frac{\lambda + \mu}{2}.\Phi} = \frac{K_2}{r^2}.$$

Si $\lambda + \mu = 0$, cette égalité devient :

$$\dot{\Phi} = \frac{K_2}{r^2} ;$$

$$\Phi = -\frac{K_2}{r} + K_3.$$

Comme Φ doit tendre vers 0 à l'infini, on doit avoir $K_3 = 0$, donc :

$$\Phi = -\frac{K_2}{r} \quad (\text{avec } K_2 \geq 0).$$

Examinons maintenant le cas $\lambda + \mu \neq 0$.

Remarquons que $\overline{e^{\frac{\lambda + \mu}{2}.\Phi}} = \frac{\lambda + \mu}{2}.\dot{\Phi}.e^{\frac{\lambda + \mu}{2}.\Phi}$; on a alors :

$$\dot{\Phi}.e^{\frac{\lambda + \mu}{2}.\Phi} = \frac{2}{\lambda + \mu}.\overline{e^{\frac{\lambda + \mu}{2}.\Phi}}.$$

Puisque $\dot{\Phi}.e^{\frac{\lambda + \mu}{2}.\Phi} = \frac{K_2}{r^2}$, on aura :

$$\frac{2}{\lambda + \mu}.\overline{e^{\frac{\lambda + \mu}{2}.\Phi}} = \frac{K_2}{r^2} = -\frac{\dot{K}_2}{r}.$$

Par intégration, on trouve :

$$e^{\frac{\lambda+\mu}{2}.\Phi} = -\frac{\lambda+\mu}{2}.\frac{K_2}{r} + K_4 = -\frac{K_3}{r} + K_4 \quad (\text{avec } K_3 = \frac{\lambda+\mu}{2}.K_2 > 0).$$

Quand r tend vers l'infini, Φ doit tendre vers 0, donc on doit avoir $K_4 = 1$. De plus le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est nécessairement positif, donc on doit avoir :

$$\begin{aligned} -\frac{K_3}{r} + 1 &> 0 ; \\ \frac{K_3}{r} &< 1 ; \\ r &> K_3 > 0. \end{aligned}$$

Cette solution n'est pas valide, car le potentiel doit être défini de $r = 0$ à $+\infty$.

Nous voyons donc que notre problème possède une solution unique : on doit avoir nécessairement $\lambda + \mu = 0$ et $\Phi = -\frac{K_2}{r}$ (avec $K_2 \geq 0$).

Ce potentiel : $\Phi = -\frac{K_2}{r}$ est évidemment compatible avec le potentiel newtonien ; il suffit de poser : $K_2 = G.M$.

La métrique liée à un corps ponctuel unique s'écrit :

$$ds^2 = e^{\lambda.\Phi}.c^2.dt^2 - e^{-\lambda.\Phi}.dl^2.$$

Si nous remplaçons Φ par $-\frac{G.M}{r}$, cette formule devient :

$$ds^2 = e^{-\frac{\lambda.G.M}{r}}.c^2.dt^2 - e^{\frac{\lambda.G.M}{r}}.dl^2.$$

Si $\lambda = \frac{1}{c^2}$, on obtient la métrique triviale de Ni :

$$ds^2 = e^{-\frac{G.M}{r.c^2}}.c^2.dt^2 - e^{\frac{G.M}{r.c^2}}.dl^2.$$

Nous voyons donc que, pour obtenir la métrique de Ni, il suffit d'ajuster correctement le coefficient $\lambda.K_2$; on doit avoir :

$$\lambda.K_2 = \frac{G.M}{c^2}.$$

Théorème

Considérons une métrique (éligible) à symétrie sphérique, de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.r^2.d\theta^2 - \gamma.r^2.\sin^2\theta.d\phi^2$$

où α , β et γ sont trois fonctions du potentiel newtonien $\Phi = -\frac{G.M}{r}$.

Si le potentiel est relatif (ce qui signifie que les coefficients de la métrique ne dépendent que des dérivées des fonctions du potentiel), alors la métrique ne peut être que celle de Ni (  un coefficient près).

Nous devons avoir $\beta = \gamma = \frac{1}{\alpha}$, donc $\text{Log } \beta = \text{Log } \gamma = -\text{Log } \alpha$, ou $b = g = -a$. Ceci permet de simplifier les expressions de R_{22} et R_{33} :

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{2} + \ddot{g} + \frac{\dot{a}^2}{4} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{4} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{2} \right) + \frac{1}{r} \cdot (-\dot{b} + 2\dot{g}) ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{a}}{2} - \ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{4} + \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{\dot{a}^2}{4} - \frac{\dot{a}^2}{2} \right) + \frac{1}{r} \cdot (\dot{a} - 2\dot{a}) ;$$

$$R_{22} = -\frac{\ddot{a}}{2} + \frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{\dot{a}}{r}.$$

On a vu que $a = \text{Log } \alpha = -\frac{\lambda.G.M}{r} = -\frac{2.G.M}{r.c^2} = -\frac{2.k}{r}$, $\dot{a} = \frac{2.k}{r^2}$, $\ddot{a} = -\frac{4.k}{r^3}$; par conséquent :

$$R_{22} = \frac{2.k}{r^3} + \frac{2.k^2}{r^4} - \frac{2.k}{r^3} = \frac{2.k^2}{r^4}.$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left[\left(\frac{\ddot{g}}{2} + \frac{\dot{g}^2}{2} - \frac{\dot{b}\dot{g}}{4} + \frac{\dot{a}\dot{g}}{4} \right) . r^2 + \left(2\dot{c} - \frac{\dot{b}}{2} + \frac{\dot{a}}{2} \right) . r + 1 \right] - 1 ;$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left[\left(-\frac{\ddot{a}}{2} + \frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{\dot{a}^2}{4} - \frac{\dot{a}^2}{4} \right) . r^2 + \left(-2\dot{a} + \frac{\dot{a}}{2} + \frac{\dot{a}}{2} \right) . r + 1 \right] - 1 ;$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left[-\frac{\ddot{a}}{2} . r^2 - \dot{a} . r + 1 \right] - 1.$$

On a vu que $\beta = \gamma$; nous remplaçons $\dot{a}$ par $\frac{2.k}{r^2}$ et $\ddot{a}$ par $-\frac{4.k}{r^3}$:

$$R_{33} = -\frac{\ddot{a}}{2} . r^2 - \dot{a} . r = \frac{2.k}{r^3} . r^2 - \frac{2.k}{r^2} . r = \frac{2.k}{r} - \frac{2.k}{r} = 0.$$

On a donc aussi : $R_{33} = 0$.