

Gravitation relativiste : principes fondamentaux

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, mars 2008)

Table des matières

1	Avertissement	2
2	Résumé	3
3	Principe d'équivalence : premier volet	3
4	Principe d'équivalence : deuxième volet	5
5	L'espace-temps courbe	6
6	L'allégorie de l'ascenseur revue et corrigée	8
7	Principe d'équivalence : troisième volet	12
8	Sur les référentiels inertiels	14
9	Une force escamotable ?	16
10	Le principe de relativité généralisée	19
11	Vraie et fausse accélération	21
12	Le principe de Mach	23
13	La covariance totale	26
14	Le pari d'Einstein	30
15	Conservation de l'énergie	30
16	Sur les forces	32
17	Gravitation et transferts d'énergie-impulsion	36
18	Effet Nordtvedt	38

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

- 01) [Gravitation relativiste : introduction](#)
 - Relativité restreinte :
- 02) [Les vitesses en Relativité restreinte](#)
 - Physique quantique :
- 03) [Physique quantique : généralités](#)
- 04) [Physique quantique : l'aventure collective](#)
 - Gravitation :
- 05) [La relativité générale a-t-elle été prise en défaut ?](#)
- 06) [Gravitation relativiste : principes fondamentaux](#)
- 07) [Gravitation et critère de Schild](#)
- 08) [L'hypothèse du champ d'entraînement](#)
- 09) [Métriques et géodésiques](#)
- 10) [Tenseur de Ricci](#)
- 11) [Potentiel gravitationnel](#)
- 12) [Ni ou Schwarzschild ?](#)
- 13) [Gravitation et vide quantique](#)
- 14) [L'hypothèse du flux à double sens](#)
- 15) [Etude du système solaire en métrique de Ni](#)
- 16) [Etude des systèmes binaires en métrique de Ni](#)
- 17) [Sur la matière noire](#)

- 18) Trous noirs et trous gris
- 19) Ondes gravitationnelles
- 20) Gravitation et cosmologie

2 Résumé

Einstein a basé la relativité générale sur un certain nombre de principes et d'expériences de pensée. Il est important de les revisiter, et d'analyser les différents choix possibles, sans fermer aucune porte.

3 Principe d'équivalence : premier volet

C'est l'équivalence de la masse gravifique et de la masse inerte.

Ce premier volet, qu'on appelle souvent "principe d'équivalence faible", dit que la masse gravifique (ou masse pesante) et la masse inerte sont équivalentes. Il a pour conséquence que, dans un champ gravitationnel donné, tous les corps subissent la même accélération. Ce principe a toujours été confirmé, par exemple par les expériences très précises d'Eötvös à la fin du XIX^e siècle, mais aussi par bien d'autres, jusqu'au satellite Microscope, lancé en 2016, de sorte qu'il ne semble pas très raisonnable, dans l'état actuel de nos connaissances, de le mettre en doute.

Ce principe d'équivalence faible existe déjà dans la théorie de Newton. Voyons ceci d'un peu plus près.

La masse gravifique indique de quelle façon un corps agit gravitationnellement sur d'autres corps en exerçant sur eux des forces gravitationnelles ; la masse inerte indique de quelle façon un corps réagit aux forces qui sont exercées sur lui, selon la formule : $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$.

Considérons deux corps M_1 et M_2 , ayant pour masses inertes m_1 et m_2 et pour masses gravifiques m'_1 et m'_2 . La force $\vec{F}_2$ exercée par M_1 sur M_2 doit être proportionnelle à m'_1 , et la force $\vec{F}_1$ exercée par M_2 sur M_1 doit être proportionnelle à m'_2 . Selon le principe "action/réaction" de Newton, ces deux forces doivent être opposées (de même module F , de sens contraires). Ce principe est très important, dans la mesure où la quantité de mouvement (ou l'impulsion) $\vec{p}$, telle qu'elle est définie par Newton, vérifie : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$; on a donc : $\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. L'impulsion globale du système (supposé isolé dans l'espace) sera constante à condition que les forces soient opposées. Il en est de même pour

l'énergie globale. Dans une mécanique inspirée de la mécanique quantique, ceci s'interprète facilement en termes d'échanges d'énergie-impulsion entre les deux corps, avec conservation du bilan d'énergie-impulsion quadrvectorielle.

En conclusion, F doit être proportionnel à m'_1 et à m'_2 , donc à $m'_1.m'_2$. La formule est donc de la forme :

$$F = -\frac{g.m'_1.m'_2}{r^2}.$$

Dans vette formule, g est une constante.

L'accélération subie par M_1 est donc :

$$\gamma_1 = \frac{F}{m_1} = -\frac{g}{r^2} \cdot \frac{m'_1.m'_2}{m_1} ;$$

et l'accélération subie par M_2 est :

$$\gamma_2 = \frac{F}{m_2} = -\frac{g}{r^2} \cdot \frac{m'_1.m'_2}{m_2}.$$

Mais en réalité l'étude des orbites planétaires, dont la théorie de Newton est une synthèse, donne un accès direct aux accélérations, et non aux forces. Et cette étude montre que γ_1 est proportionnel à m_2 , et γ_2 à m_1 . Autrement dit, on doit avoir :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -\frac{G}{r^2}.m_2 ; \\ \gamma_2 &= -\frac{G}{r^2}.m_1.\end{aligned}$$

Dans ces formules, G est une autre constante.

On aura donc :

$$\begin{aligned}G.m_2 &= g \cdot \frac{m'_1.m'_2}{m_1} ; \\ G.m_1 &= g \cdot \frac{m'_1.m'_2}{m_2}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\frac{G}{g} = \frac{m'_1}{m_1} \cdot \frac{m'_2}{m_2}$. Si on choisit deux corps de même masse, on obtient : $\frac{G}{g} = \left(\frac{m'_1}{m_1}\right)^2$, donc $\frac{m'_1}{m_1} = \sqrt{\frac{G}{g}}$. Ce quotient sera identique pour tous les corps. Il s'ensuit qu'il est inutile d'introduire deux constantes g et G : une suffit, à condition de poser $m' = m$. Les masses gravifiques sont nécessairement proportionnelles aux masses inertes, et la simplicité veut qu'on choisisse un coefficient de proportionnalité égal à 1, par un choix convenable des unités. L'introduction d'un nouveau type de masse appelée gravifique, destinée à l'étude de la gravitation, est donc superflue. La masse inerte (ou simplement : masse)

suffit.

On voit donc que ce premier principe d'équivalence a été admis aussi bien par Newton que par Einstein, mais c'est en relativité générale que son rôle est vraiment déterminant, puisqu'il signifie que la trajectoire d'un corps est indépendante des propriétés de celui-ci : en orbite, un milligramme de plumes suivra la même trajectoire qu'une tonne de plomb. Ceci suggère que les caractéristiques de la trajectoire ne sont pas liées aux propriétés de la matière, mais à la structure de l'espace-temps. Etudier la gravitation, c'est peut-être seulement étudier l'espace-temps ?

Dans la suite, nous admettrons ce premier principe : la courbure de l'espace-temps, à elle seule, permet de définir les trajectoires.

4 Principe d'équivalence : deuxième volet

C'est l'équivalence de toutes les formes d'énergie, et, entre autres, de l'énergie gravitationnelle elle-même, vis-à-vis de la gravitation : elles contribuent de manière identique à la masse (gravifique ou inerte).

Ce deuxième volet est parfois appelé principe d'équivalence fort.

En raison de l'équivalence masse/énergie de la relativité restreinte, on a : $m = \frac{E}{c^2}$; comme E est l'énergie totale du corps en mouvement, nous devons attribuer le même rôle gravitationnel à toutes les formes d'énergie. La force attractive entre deux corps est proportionnelle à l'énergie de chacun d'eux, et non à leurs masses au repos. D'ailleurs la "masse au repos" d'un corps composé (étoile, planète, atome ...) inclut déjà diverses formes d'énergie (cinétique, électromagnétique, etc ...) et ne peut pas être interprétée comme une caractéristique absolue de ce corps (contrairement à la charge électrique par exemple) : les masses qui interviennent en mécanique classique sont, en réalité, toujours maupertusiennes ! C'est la relativité restreinte qui nous enseigne que la masse absolue est un mythe : seules existent les masses maupertusiennes (relatives), autrement dit l'énergie-impulsion.

Nous reprendrons ce raisonnement de manière plus détaillée dans le document sur le "Champ d'entraînement". Nous verrons que la conception de la masse, telle qu'elle apparaît sous l'éclairage de la relativité restreinte, est profondément différente de la conception classique, qui en fait une grandeur absolue, fondamentale, attachée de manière indissoluble à chaque corps matériel. Cette ancienne conception doit être revue radicalement, et il est indispensable de la remplacer par le concept relativiste d'énergie-impulsion quadrivectorielle. C'est cette énergie-impulsion qui doit, nécessairement, être au centre de toute théorie relativiste de la gravitation.

Ceci implique que **toutes les formes d'énergie, y compris gravitationnelle, ont le même rôle gravitationnel.**

Il ne pouvait pas être pris en compte à l'époque de Newton, mais il s'impose depuis qu'Einstein a publié la théorie de la relativité restreinte. Il est respecté par la plupart des théories modernes (relativistes) de la gravitation.

Imaginons par exemple qu'à l'aide d'une pompe à moteur électrique on fasse monter de l'eau dans un château d'eau. Ensuite on lâche l'eau qui redescend et fait tourner une turbine qui produit de la chaleur. On doit admettre que la chaleur ainsi produite a un effet gravitationnel, mais aussi l'énergie potentielle de l'eau quand elle est dans le château d'eau (énergie "gravitationnelle"), et bien sûr l'énergie du moteur électrique.

Ceci peut surprendre; mais en microphysique on vérifie, par exemple, que lors de la fusion de deux noyaux atomiques, la masse du noyau ainsi obtenu n'est pas égale à la somme des masses des deux noyaux d'origine. Il en est de même lors d'une fission. Le bilan énergétique doit faire intervenir l'énergie de liaison entre les protons et neutrons, car cette énergie équivaut à de la masse. Dans ce cas, l'énergie de liaison est principalement due à l'interaction forte, qui est modélisée comme un échange de gluons entre les neutrons et protons du noyau atomique. L'interaction forte (comme toutes les forces) crée de la masse (ou, si on préfère, la déplace, car le bilan d'énergie-impulsion est toujours équilibré).

De même que le premier principe est conforté par les expériences d'Eötvös, ce deuxième volet est conforté par l'effet Nordvedt (ou plutôt par l'inexistence de cet effet) - voir plus loin.

5 L'espace-temps courbe

Le fait que tous les corps, quelle que soit leur nature, leur masse, leur dimension, se comportent de la même façon dans un champ gravitationnel, suggère d'éliminer la notion de force pour passer directement à l'accélération. La trajectoire suivie par une particule-test va dépendre uniquement des conditions initiales (position, vitesse); ensuite, elle va "obéir", comme si l'espace-temps était seul à "décider". On est donc tenté d'interpréter cette accélération comme une propriété de l'espace-temps; plus précisément, une courbure spatio-temporelle. La gravitation serait-elle seulement un effet de la courbure de l'espace-temps?

Comme nous le verrons, le critère de Schild, que nous allons analyser dans le document "Gravitation et critère de Schild", conforte ce point de vue, et le rend même difficilement contournable. Nous acceptons donc sans hésiter l'idée que l'introduction de la notion de courbure spatio-temporelle ne peut être que

bénéfique à l'étude de la gravitation.

Avec la relativité générale, Einstein décrit un espace-temps courbe, dont la courbure est décrite par le tenseur de Riemann, dont on tire le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci. Cette innovation géniale a permis de corriger les défauts de la théorie de Newton : elle n'était pas relativiste (ce qui était inacceptable), elle conduisait à des paradoxes, elle s'appuyait sur une conception de l'espace et du temps qu'on ne peut plus défendre aujourd'hui. De plus, la théorie d'Einstein a permis de résoudre quelques problèmes (précession du périhélie de Mercure, déflexion de la lumière, effet Einstein, effet Shapiro, etc.) que la théorie de Newton ne sait pas gérer.

Mais n'oublions pas que, lorsque Newton a publié sa théorie de la gravitation, son choix de la baser sur la notion de force est apparu aussi comme une idée de génie. En effet, les lois de Képler semblaient jusqu'alors inexplicables, parachutées, sans lien entre elles. Leur cohérence est soudain apparue, lumineuse, puisqu'une idée unique (la force d'attraction newtonienne) permettait tout-à-coup de toutes les expliquer. Ceci est bien le propre d'une idée de génie, qui va droit au but, comme, par la suite, la relativité restreinte, qui a résolu d'un seul coup une multitude de problèmes concernant l'électromagnétisme.

La question actuelle est donc celle-ci : faut-il abandonner les concepts fondamentaux de Newton, et en particulier celui de force ? Avec le recul, on peut dire que l'idée d'Einstein est bien une idée de génie, qui renouvelle les questionnements sur la gravitation, qui permet de résoudre des contradictions conceptuelles. Mais jeter aux orties la gravitation de Newton serait peut-être prématuré, pour deux raisons : la première est que, dans la pratique, la plupart des calculs concernant les orbites des corps célestes se base toujours sur la théorie de Newton, ce qui montre qu'elle est solidement connectée à la réalité ; la seconde est que la synthèse entre la gravitation et la mécanique quantique risque de devenir impossible, si on décrit la gravitation uniquement en termes de courbure, et la mécanique quantique en termes de forces et d'échanges.

Pour ces raisons, il peut être intéressant de garder à l'esprit qu'une théorie admettant plusieurs niveaux de lecture complémentaires peut avoir son intérêt. Nous en reparlerons dans le document sur les "Métriques" (Géodésiques en coordonnées localement cartésiennes, Cas particuliers).

On constate de plus en plus souvent que des avancées dans le domaine des mathématiques, en particulier, peuvent venir du croisement de deux corpus différents, comme l'algèbre et la géométrie par exemple. Le cloisonnement n'est pas fertile.

Retenons que le premier volet du principe d'équivalence (éventuellement complété par le deuxième) nous autorise à interpréter la gravitation en termes de courbure de l'espace-temps ; mais sans nous imposer d'abandonner la notion

de force.

6 L'allégorie de l'ascenseur revue et corrigée

Pour introduire troisième volet du principe d'équivalence, on fait appel à l'expérience de pensée de l'ascenseur d'Einstein. Voyons de quoi il s'agit.

On imagine un physicien enfermé dans un ascenseur soumis à des forces (traction à l'aide d'un câble, effet de la pesanteur...). Le physicien, qui ne voit pas ce qui se passe à l'extérieur, peut-il savoir si les accélérations qu'il subit sont d'origine gravitationnelle? Cas particulier : si l'ascenseur est en chute libre, est-il en droit de conclure que la gravité n'existe plus? Traitons le sujet à notre manière, avant de discuter de ses implications.

Imaginons, à l'intérieur de l'ascenseur, deux particules-test A_1 et A_2 tombant verticalement, l'une à la vitesse v_1 , l'autre à la vitesse v_2 (par rapport à l'ascenseur). Supposons que le câble de l'ascenseur lui imprime une accélération se traduisant par une variation Δv de sa vitesse pendant le temps Δt . Le physicien, solidaire de l'ascenseur, est concerné par cette accélération, mais les deux corps en chute libre ne le sont pas.

Pour le physicien, les vitesses de chute des deux particules sont maintenant (d'après la loi de composition des vitesses en relativité restreinte) :

$$v'_1 = \frac{v_1 + \Delta v}{1 + \frac{v_1 \cdot \Delta v}{c^2}} \text{ et } v'_2 = \frac{v_2 + \Delta v}{1 + \frac{v_2 \cdot \Delta v}{c^2}}.$$

Le physicien calcule alors les accélérations des deux particules :

$$\gamma_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{v'_1 - v_1}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \left[\frac{v_1 + \Delta v}{1 + \frac{v_1 \cdot \Delta v}{c^2}} - \frac{v_1 + \frac{v_1^2 \cdot \Delta v}{c^2}}{1 + \frac{v_1 \cdot \Delta v}{c^2}} \right] = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}{1 + \frac{v_1 \cdot \Delta v}{c^2}} ;$$

$$\gamma_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}{1 + \frac{v_2 \cdot \Delta v}{c^2}}.$$

Pour Δv infinitésimal, on a donc :

$$\gamma_1 \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) \text{ et } \gamma_2 \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2} \right).$$

Le physicien constate que $\gamma_1 \neq \gamma_2$: les deux particules n'ont pas subi la même accélération !

C'est différent si on raisonne sur les rapidités, car elles sont additives. Notons w_1 et w_2 les rapidités des deux particules avant l'accélération, w'_1 et w'_2 leurs

rapidités après l'accélération, Δw la variation de rapidité de l'ascenseur. On aura alors :

$$w'_1 - w_1 = w'_2 - w_2 = \Delta w ;$$

$$\Gamma = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{w'_1 - w_1}{\Delta t} = \frac{w'_2 - w_2}{\Delta t} = \frac{\Delta w_1}{\Delta t} = \frac{\Delta w_2}{\Delta t} .$$

Pour le physicien, les deux particules ont subi la même pseudo-accélération Γ . Il va donc tirer la conclusion que la gravité exerce sur les différents mobiles situés dans l'ascenseur une pseudo-accélération $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$, identique pour tous, et indépendante de leur vitesse, de leur composition, etc.

Lorsqu'on parle d'accélération, il s'agit de $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, dérivée de la vitesse par rapport au temps. Nous employons le terme "pseudo-accélération" lorsqu'il s'agit de la dérivée de la rapidité par rapport au temps : $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$.

Donc si ce physicien veut attribuer cet effet à la gravitation, il doit en conclure que la gravitation agit directement sur la pseudo-accélération $\Gamma = \frac{dw}{dt}$ des mobiles, et non sur leur accélération $\gamma = \frac{dv}{dt}$.

Dans la suite, nous admettrons que, dans un champ gravitationnel, tous les corps subissent la même pseudo-accélération $\frac{dw}{dt}$. Nous acceptons donc le deuxième principe d'équivalence, mais revu et corrigé à la lumière de la relativité restreinte.

Mais, manifestement, Einstein ne l'a pas fait. Examinons quelques conséquences.

Si on continue à exercer une traction sur le câble de l'ascenseur, la vitesse ajoutée Δv (évaluée par le physicien, dans l'ascenseur) pourra éventuellement tendre vers c , mais ne pourra pas dépasser cette limite, d'après la relativité restreinte. La rapidité de chute des deux corps pourra tendre vers l'infini, donc leur vitesse de chute pourra tendre vers c , mais c'est là aussi une vitesse limite. La parabole de l'ascenseur n'autorise pas les vitesses à dépasser celle de la lumière. Ceci est vrai pour l'observateur local en mouvement (le physicien), mais aussi pour l'observateur distant.

Or dans la théorie des trous noirs basée sur la relativité générale, la vitesse de chute libre d'un corps quelconque vers un trou noir atteint la vitesse c quand le corps atteint l'horizon... puis dépasse cette vitesse ! Ce qui veut dire, en inversant le sens du vecteur vitesse, qu'un corps situé à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild aurait besoin d'une vitesse (locale) supérieure à c pour s'échapper du trou noir ! Bien sûr on peut dire que c'est une vitesse par rapport à un observateur local immobile, qui n'existe peut-être pas... On peut dire aussi que, lorsque le mobile en chute libre dépasse la vitesse de la lumière, il a franchi l'horizon du trou noir, et n'est donc plus visible, puisque la lumière ne peut pas

en sortir. C'est ce qu'on appelle la censure cosmique!

De même, dans le modèle standard de la cosmologie, basé lui aussi sur la relativité générale, la vitesse de fuite des galaxies, due à l'expansion de l'Univers, peut dépasser la vitesse de la lumière...

Si Einstein avait vraiment suivi son idée première en traitant la parabole de l'ascenseur selon la relativité restreinte, ces "anomalies" (qu'on peut interpréter comme des dérogations à la relativité restreinte) ne seraient pas apparues. Mais il avait une autre idée en tête.

Pour faire mieux comprendre encore les implications de cette parabole de l'ascenseur, imaginons une version électromagnétique : nous remplaçons les particules-test par des électrons, et le champ gravitationnel par un champ électrique. Nous supposons que ces électrons ont des vitesses variées. Sous l'effet du champ électrique, ils vont tous subir une force dirigée dans la même direction, disons vers le bas. Ils vont donc tous subir une accélération dirigée dans cette direction.

Selon le point de vue classique, on pourrait dire que :

- les électrons ont tous la même charge électrique, donc, dans un même champ électrique, ils subissent tous la même force ;

- ils ont tous la même masse m_0 , donc, soumis à une même force, ils subissent la même accélération $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m_0}$.

Mais la relativité restreinte nous oblige à corriger ce raisonnement. On peut s'y prendre de deux façons :

- la première est celle que nous avons utilisée dans la version gravitationnelle de l'ascenseur : en raisonnant sur des électrons ayant des vitesses différentes, on montre que, selon la règle de composition des vitesses, il est indispensable de remplacer l'accélération par la pseudo-accélération dans la formule ci-dessus, qui devient : $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m_0}$;

- la seconde consiste conserver la formule précédente, mais en considérant la masse m comme une masse maupertuisienne, donc variable en fonction de la vitesse : $m = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$, ce qui nous donne : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}}{m_0 \cdot ch \frac{w}{c}}$.

Ce qui entraîne :

$$\vec{F} = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} \cdot \frac{c \cdot d\left(th \frac{w}{c}\right)}{dt} = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} \cdot \frac{c \cdot \frac{1}{ch^2 \frac{w}{c}} \cdot \frac{dw}{c}}{dt} = m_0 \cdot \frac{dw}{ch \frac{w}{c} \cdot dt}.$$

On peut remarquer que $ch \frac{w}{c} \cdot dt$ correspond au temps propre d'un mobile lié

(temporairement) à l'électron, mais non accéléré. La force, comme la pseudo-accélération qui en résulte, doivent être évaluées localement, dans un repère "inertiel" qui accompagne la particule. Ceci peut s'interpréter en disant qu'il existe un temps local qui n'est pas le même partout, et qui varie en fonction du potentiel électrique.

Le physicien, dans l'ascenseur, pourrait alors se dire : "Je vais essayer de formaliser ce que je viens d'observer, mathématiquement, par une géométrie particulière de l'espace-temps : au lieu de considérer que tous les électrons subissent une même pseudo-accélération (fonction du potentiel), je vais imaginer que c'est l'espace-temps qui est courbé." Et ceci est parfaitement possible : de même qu'on peut "absorber" l'accélération des particules-test dans un champ gravitationnel, on peut, de la même façon, "absorber" l'accélération des électrons, dans un champ électrique, en imaginant la courbure adéquate, calculée en fonction du potentiel électrique.

Mais dans ce cas on va se heurter à plusieurs problèmes :

- le premier problème va se présenter lorsque le physicien va avoir affaire à un proton : celui-ci ne va pas suivre les géodésiques calculées par lui, car, la charge du proton étant de signe positif, il va subir des forces de sens opposé ; de plus, sa masse au repos étant différente de celle de l'électron, le module de son accélération, à force égale, sera différent ; il faudrait donc refaire tout le travail pour trouver la courbure spatio-temporelle adaptée au comportement des protons ;

- le second problème va se présenter lorsque le physicien va avoir affaire à un ion (disons un ion négatif) : par rapport à l'électron, il va subir des forces identiques, mais sa masse étant différente, il ne va pas réagir de la même manière ;

- enfin, lorsque le physicien va étudier des particules neutres, il va comprendre que la géométrie calculée sur mesure pour les électrons n'a pas de valeur générale, et qu'aucune courbure spatio-temporelle ne peut rendre compte de toutes les forces électriques.

S'il existait un système planétaire formé de planètes chargées électriquement, tournant autour d'une étoile également chargée, leurs mouvements ne pourraient pas être décrits par les géodésiques de l'espace-temps courbe calculées sur mesure pour les "forces" gravitationnelles. Mais un tel système n'existe probablement pas : à grande échelle, les forces électromagnétiques s'annulent (et plus encore les forces nucléaires), laissant le champ libre à la gravitation.

Pour qu'un type de force admette une interprétation en termes de courbure de l'espace-temps, il est indispensable que toutes les particules-test réagissent de manière identique à ces forces, c'est-à-dire que la pseudo-accélération soit indépendante de la masse, de la charge électrique, de la nature de la particule.

Ces conditions semblent bien remplies par la gravitation, mais par aucune autre force. Effectivement, la gravité est liée à l'énergie-impulsion, qui est la seule propriété commune à toutes les particules. Si on considère qu'une force peut être interprétée, selon les lois de la mécanique quantique, en termes d'échanges, alors la gravitation ne peut être qu'un échange d'énergie-impulsion, et c'est pourquoi tous les corps matériels sont concernés de la même façon. Mais on ne sait pas si la gravitation, par elle-même, a la faculté d'imposer des échanges d'énergie-impulsion, ou si tous ces échanges sont gérés par les autres forces (les "vraies" ?).

Cette allégorie de l'ascenseur, telle que nous l'avons présentée, nous permet de bien mesurer l'originalité de la gravitation : c'est la seule force qui puisse s'interpréter en termes de courbure de l'espace-temps. Elle nous permet aussi de constater qu'il y a une ressemblance entre l'effet de la gravitation et celui d'une accélération, ou, mieux, d'une pseudo-accélération.

7 Principe d'équivalence : troisième volet

C'est l'équivalence entre l'effet de la gravitation et l'effet d'une accélération.

C'est cette idée qu'Einstein a qualifiée d'idée la plus heureuse de sa vie.

Selon les auteurs, et selon les formulations, ce troisième volet est souvent appelé **principe d'équivalence d'Einstein**.

A partir de l'allégorie de l'ascenseur, on peut le formuler de plusieurs manières :

- Première formulation : **l'accélération est localement équivalente à l'action d'un champ de gravitation** ;
- Deuxième formulation : **dans une région limitée de l'espace, les phénomènes physiques dans un champ de gravitation sont les mêmes que dans un ascenseur accéléré en l'absence de gravitation** ;
- Troisième formulation : **en tout point de l'espace, à chaque instant, il est possible de choisir des coordonnées telles que les effets de la gravitation disparaissent dans un domaine suffisamment petit** ;
- Quatrième formulation : **un mobile est inertiel s'il se déplace selon une géodésique ; les lois de la physique, localement (dans un voisinage infinitésimal), peuvent s'écrire de la même manière dans tous les repères liés à ces mobiles inertiels**.

Ce principe, quelle que soit sa formulation, est à la fois évident et faux.

Il est évident parce-que, en gravitation newtonienne, il était déjà d'usage de considérer le champ gravitationnel comme un champ d'accélération. On a pris l'habitude de parler de l'accélération de la pesanteur, plutôt que de la force de la pesanteur ! La gravitation a toujours été décrite en termes d'accélération : pour simplifier les calculs, il est d'usage d'éliminer la force au profit de l'accélération, tout en se rappelant que les deux approches, dans le cadre de la théorie de Newton, sont équivalentes.

Mais il est faux, parce-que la relativité générale permet de définir un tenseur de courbure, donc à chaque point de l'espace-temps (événement) est associé un scalaire de Ricci R , qui est intrinsèque (indépendant de l'observateur) ; ce scalaire est lié à la gravitation et non à l'accélération. Donc en théorie il est toujours possible de distinguer un champ de gravitation d'une simple accélération due à une force non gravitationnelle.

Tout ce qu'on peut conclure de l'allégorie de l'ascenseur, c'est qu'il y a une ressemblance certaine entre l'effet de la gravitation et l'effet d'une accélération, ou, mieux, d'une pseudo-accélération.

Mais le simple fait de remplacer l'accélération par la pseudo-accélération a des répercussions importantes. L'une d'elles (voir par exemple les sections "De l'espace des rapidités à l'espace des impulsions" et "Forces", dans le document sur "Les vitesses en relativité restreinte") est que les liens très étroits entre pseudo-accélération et force relativiste entraînent que, si on conserve l'une, on conserve nécessairement l'autre. Nous savons que la gravitation newtonienne se base à la fois sur la notion d'accélération et sur la notion de force. Einstein avait jugé que, dans le cadre relativiste, il fallait choisir entre l'accélération et la force : il a donné le premier rôle à l'accélération et il a congédié la force. Mais à partir du moment où c'est la pseudo-accélération qu'on met sur le devant de la scène, la force, qu'on avait priée de sortir par la porte, revient par la fenêtre. Nous nous en rendrons mieux compte dans le document sur les métriques : nous verrons qu'une théorie de la gravitation admettant une description en termes de courbure de l'espace-temps ne peut pas s'interpréter en termes de champ d'accélération dérivant d'un potentiel, comme chez Newton ; mais elle peut très bien être compatible avec une interprétation basée sur une pseudo-accélération dérivant d'un potentiel, et, par conséquent, en termes de forces.

Une autre conséquence est que la vitesse de la lumière va être une vitesse limite, comme en relativité restreinte.

8 Sur les référentiels inertiels

Faisons ici une petite digression sur la structure de l'espace-temps.

En mécanique classique (newtonienne), l'espace-temps est euclidien ; entre deux événements de coordonnées (ct_1, x_1, y_1, z_1) et (ct_2, x_2, y_2, z_2) , on peut définir une distance spatiale : $\Delta l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, et une distance temporelle : $c \cdot \Delta t = c \cdot (t_2 - t_1)$, ces deux distances étant indépendantes.

Chaque point de cet espace-temps (événement) est, par définition, immobile. Il peut être considéré comme l'origine d'un repère spatio-temporel, lui-même immobile. Cet espace-temps est un cadre rigide dans lequel un objet mobile peut se déplacer en passant d'un point à un autre, en fonction du temps.

En relativité restreinte, il existe une seule distance (la distance d'Univers) entre deux événements ; elle est donnée par :

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}.$$

Attention : cette formule se démontre grâce à la transformation de Lorentz, qui établit le passage d'un repère galiléen à un autre. Donc la distance dont nous parlons est une distance entre repères galiléens, ou si on préfère entre mobiles galiléens.

L'espace-temps de la relativité restreinte (ou de Minkowski) peut donc être conçu comme un ensemble d'événements (points spatio-temporels) qui ne sont pas "immobiles" au sens de Newton, mais qui sont galiléens les uns par rapport aux autres, ce qui veut dire qu'ils se déplacent tous les uns par rapport aux autres à vitesse constante.

La notion de "points galiléens" remplace et annule celle de "points immobiles".

Chaque point (événement) de l'espace de Minkowski est, par définition, galiléen. Dans ce cadre, si on veut décrire le mouvement d'un mobile accéléré, on peut considérer que, pendant un temps infinitésimal, ce mobile accompagne un repère galiléen, mais il s'en échappe aussitôt. Le repère ne peut pas suivre la mobile.

Bien avant la théorie de la relativité restreinte, Newton s'était déjà rendu compte du rôle particulier des repères galiléens : ses équations décrivant les phénomènes gravitationnels supportent sans encombre les changements de repères galiléens, mais lorsqu'on se place dans un repère accéléré, on va droit à la catastrophe ! Sur ce point, la relativité restreinte rejoint la mécanique de Newton, en nous montrant que le rôle particulier de ces repères est inscrit dans la structure

même de l'espace-temps.

Si on admet que la gravitation doit être modélisée par un espace-temps courbe (de Riemann) à courbure régulière (différentiable), alors on va imaginer un ensemble de points qui ne seront plus galiléens, car ce terme a été conçu pour un espace euclidien ; on dira qu'ils sont inertiels, ce qui signifie qu'ils ne sont soumis à aucune accélération autre que gravitationnelle.

La notion de "points inertiels" remplace celle de "points galiléens".

Chaque point (événement) de cet espace de Riemann est, par définition, inertiel. Dans ce cadre, un objet mobile peut très bien se déplacer d'un point à un autre en fonction du temps. Dans ce cas, il sera soumis à une "vraie" accélération, c'est-à-dire une accélération d'origine non gravitationnelle. Les accélérations d'origine gravitationnelle sont "absorbées" par la courbure, les autres non.

De même qu'on peut définir, en chaque point d'une sphère (surface courbe à deux dimensions), un plan tangent (surface euclidienne à deux dimensions), on peut définir, en chaque point de cet espace de Riemann courbe à quatre dimensions, un espace de Minkowski tangent (espace euclidien à quatre dimensions). Cette "variété tangente" se confond, localement (dans un voisinage infinitésimal du point de contact) avec l'espace de Riemann ; dans ce voisinage, la relativité restreinte est considérée comme valide.

Attention : le "point de contact" dont nous parlons ici est un point de l'espace de Riemann, donc il est par définition inertiel. La relativité restreinte est valable localement dans le voisinage de l'origine de tout repère inertiel, et non dans le voisinage de l'origine d'un repère non inertiel (subissant une accélération autre que gravitationnelle). La courbure est calculée pour "escamoter" l'accélération gravitationnelle, en aucun cas les accélérations ayant une autre origine.

Dans la gravitation de Newton, les changements de repères licites (conservant la forme des équations) sont ceux qui font passer d'un repère galiléen à un autre repère galiléen, grâce à la transformation de Galilée. En relativité restreinte, ces mêmes changements de repères sont également licites, mais ils se font grâce à la transformation de Lorentz. Dans un espace de Riemann, la famille des repères galiléens est remplacée par celle des repères inertiels. On passe d'un repère inertiel à un autre repère inertiel très voisin par une transformation de Lorentz différentielle (infinitésimale). Par intégration, on peut combiner autant de transformations infinitésimales qu'on le désire ; ce procédé peut donner l'illusion d'une accélération, mais en réalité il ne pourra jamais nous permettre de passer d'un repère inertiel à un repère non inertiel.

Comme nous le verrons dans le document sur les métriques, dans un espace-temps de Riemann, on peut définir des géodésiques, c'est-à-dire les lignes d'espace-

temps suivies par les mobiles inertiels. Ces mobiles inertiels sont des mobiles qui ne sont soumis à aucune force autre que gravitationnelle. Ceci signifie que les forces gravitationnelles ont un rôle bien particulier : elles façonnent l'espace-temps en définissant sa courbure, mais ensuite elles n'interviennent plus. Les autres types de forces n'agissent pas sur la courbure : elles agissent dans le cadre spatio-temporel défini par la gravitation, mais elles agissent ; il en résulte qu'un mobile soumis à une telle force (par exemple un électron dans un champ électrique) va être "vraiment" accéléré, c'est-à-dire qu'il va échapper à tout repère inertiel ; pour suivre sa trajectoire, on peut faire appel à une chaîne de repères inertiels qui vont se passer le relais. Aucun repère inertiel ne peut suivre le mobile. Si on désire utiliser un repère attaché à ce mobile, il n'est ni galiléen (il n'obéit pas à la transformation de Lorentz), ni inertiel (il ne suit pas une géodésique).

9 Une force escamotable ?

Dans le document sur le critère de Schild, nous utiliserons la force gravitationnelle : $\vec{F} = m_0 \cdot \vec{\Gamma}$ (ce que nous écrirons plutôt : $\vec{F} = m_{loc} \cdot \vec{\Gamma} = m_{loc} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt}$; nous verrons pourquoi). Ceci est une façon de mettre en œuvre une force de type relativiste, conforme à la relativité restreinte. Nous partirons donc de l'idée qu'il existe une force gravitationnelle. Mais nous serons conduits à la conclusion que l'espace-temps doit être courbe. Or, dans cet espace-temps courbe, le mobile suit une géodésique, donc son déplacement ne requiert plus le recours au concept de force. Y a-t-il contradiction ?

Nous avons déjà effleuré cette question dans la section sur l'espace-temps courbe.

Pour situer le problème, comparons-le à celui des forces d'inertie (ou forces fictives, fausses forces, forces apparentes, pseudo-forces).

Premier cas : nous sommes dans une voiture qui roule en ligne droite à vitesse constante (définition d'un repère galiléen) ; nous ne ressentons aucune force. Puis la voiture freine brutalement. Nous sommes alors projetés en avant, comme sous l'effet d'une force. Mais cette force n'existe pas. C'est le principe de l'inertie : nous avons tendance à continuer notre chemin en ligne droite à vitesse constante. Mais nous sommes attachés à notre siège par notre ceinture, ce qui nous empêche de suivre notre trajectoire naturelle. Nous passons d'un repère galiléen, ou inertiel (celui de la voiture avant le coup de frein) à un repère "accéléré" (ou décéléré), non inertiel (celui de la voiture pendant le freinage), puis à un autre repère inertiel (celui de la voiture après le freinage). C'est le passage du référentiel inertiel au référentiel accéléré (décéléré, si on préfère) qui fait apparaître cette force fictive.

Deuxième cas : nous sommes dans un manège tournant à vitesse circulaire constante. Ce mouvement est entretenu par une force centripète (réelle) qui tire vers le centre la nacelle à laquelle nous sommes cramponnés. Mais notre ressenti est celui d'une force (fictive) centrifuge : nous avons l'impression que, si nous lâchons notre nacelle, nous allons être projetés vers l'extérieur. En réalité, si notre casquette s'envole, elle ne part pas dans la direction opposée au centre du manège (direction de la force centrifuge imaginaire), mais selon la tangente. Une fois libérée de la force centripète, elle reprend son mouvement naturel, en ligne droite, comme si la force centrifuge (fictive) avait annulé la force centripète (réelle).

Troisième cas : imaginons un anticyclone et une dépression, dans l'atmosphère terrestre. En raison de la différence de pression, une force (réelle) va tendre à générer un courant atmosphérique se dirigeant de l'anticyclone vers la dépression. Et c'est bien ce qu'on observerait si la Terre ne tournait pas sur elle-même (les repères liés à la surface terrestre seraient alors inertiels). Mais l'atmosphère terrestre est entraînée par la rotation de la planète, et nous aussi, donc nous allons rapporter le mouvement des masses d'air à un repère entraîné par cette rotation ; et ce repère n'est pas inertiel. Dans ce repère, la direction des vents va s'incurver vers la droite (dans l'hémisphère nord) ou vers la gauche (dans l'hémisphère sud). Il en résulte que, dans l'hémisphère nord, les vents divergents provenant d'un anticyclone vont s'enrouler dans le sens horaire, tandis que les vents convergeant vers une dépression vont s'enrouler dans le sens anti-horaire (et c'est l'inverse dans l'hémisphère sud). Cet effet peut être décrit à l'aide de la force de Coriolis.

Dans le troisième exemple, on peut se demander quelle force est réelle et quelle force est fictive. Il existe une première force réelle, due au gradient de pression, mais aussi une seconde, due au fait que la surface terrestre entraîne les masses d'air dans la rotation, et une troisième : la pesanteur, qui empêche les masses d'air de partir en ligne droite dans l'espace. On pourrait faire un bilan de ces forces dans un repère inertiel (lié au Soleil par exemple), mais on choisit de préférence un repère non inertiel lié à la surface terrestre et entraîné par la rotation. C'est dans ce repère particulier, non inertiel, que les forces 2 et 3 sont résumées par la force de Coriolis. Cette force est considérée comme fictive, mais c'est plutôt une estimation d'une force réelle dans un repère non inertiel.

Revenons à la gravitation. Par exemple, imaginons un objet suspendu par un fil à un support fixe dans un laboratoire : on peut mesurer son poids, c'est-à-dire la force de traction exercée sur le support. On peut utiliser par exemple un ressort, qui exerce une force de rappel, en fonction de son allongement. On peut donc comparer la force gravitationnelle (le poids) avec un autre type de force (celle du ressort). Il est parfaitement permis de dire qu'il existe des forces gravitationnelles réelles.

Si maintenant on coupe le fil, l'objet va tomber en chute libre. Si on choisit

un repère également en chute libre, l'objet sera immobile par rapport à ce repère, donc on pourra dire qu'il ne subit aucune force, et que son poids est nul.

Bien entendu, il n'y a aucune contradiction entre ces deux présentations : la différence apparente vient du fait qu'on ne raisonne pas par rapport au même repère.

La question est de savoir s'il existe un repère privilégié. Une réponse s'impose : les repères privilégiés sont les repères inertiels ; c'est le repère en chute libre qui est inertiel, donc l'objet n'a pas de poids. Dans le premier cas (l'objet immobile par rapport au laboratoire), le repère de référence est celui du laboratoire, qui n'est pas inertiel, ce qui donne l'illusion d'une force.

Ce raisonnement est, en gros, celui d'Einstein. Il présente cependant un gros défaut : effectivement, qu'est-ce qui nous permet de définir les repères inertiels ? C'est la gravitation. Pour définir les repères inertiels (ou les géodésiques), on se sert de la force gravitationnelle et non des forces électriques, ou de la force du ressort. On ne peut pas s'étonner que les corps n'aient pas de poids dans ces repères, qui ont été définis précisément dans ce but. L'inertie a été définie précisément pour absorber les forces gravitationnelles, et non les autres.

Cette façon de définir les repères inertiels est-elle purement arbitraire ? En réalité, non, elle ne l'est pas : nous verrons que l'espace-temps associé à cette définition de l'inertie est structuré par des géodésiques qui maximisent le temps propre. Cette propriété très importante légitime cette définition de l'inertie, donc nous autorise à placer les forces gravitationnelles au rang de fausses forces, ou, au moins, de forces escamotables. C'est un point de vue qui possède un haut degré de cohérence.

En résumé, nous dirons que, selon le référentiel choisi, la gravitation peut générer des forces de même nature que toutes les autres forces, pouvant être comparées ou combinées avec elles. Mais les repères dits inertiels, conçus sur mesure pour annuler les forces gravitationnelles (et non les autres), ont un intérêt majeur, ainsi que les géodésiques et l'espace-temps courbe, dans l'étude de la gravitation. Dans cette approche géométrique, les forces gravitationnelles sont "escamotées". Les deux approches sont complémentaires.

Einstein a choisi l'approche géométrique, celle dans laquelle les forces gravitationnelles sont escamotées. Ceci signifie que l'équation des champs (l'équation de la relativité générale) :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot g_{\mu\nu} \cdot R = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}$$

n'est valable que dans les référentiels inertiels. Ceci ne nous apprend rien : nous avons déjà dit, dans la section sur les référentiels inertiels, que, dans un espace de Riemann, les seuls changements de repères licites sont ceux qui font passer

d'un repère inertiel à un autre repère inertiel. On est libre de changer la vitesse du référentiel de référence, mais son accélération est contrainte. Ceci tient à la nature même de l'espace de Riemann : c'est un ensemble de points (événements) inertiels.

Peut-on utiliser cette équation dans un repère accéléré? S'il s'agit d'une accélération non gravitationnelle, alors c'est interdit ; si c'est une accélération gravitationnelle (qui, dans ce contexte, est considérée comme une fausse accélération), alors c'est autorisé. Mais on pourrait dire, de manière plus définitive, que la notion de repère accéléré n'existe pas dans un espace de Riemann. Si on croit qu'un repère est accéléré, il s'agit d'une fausse accélération.

Remarquons qu'en relativité générale le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ ne fait intervenir aucune énergie gravitationnelle, puisque la vitesse du repère est choisie de telle sorte que cette énergie s'annule.

10 Le principe de relativité généralisée

En se consacrant à l'étude de la gravitation interprétée comme une courbure de l'espace-temps, Einstein a été conduit à étudier les tenseurs. Et une chose l'a fortement impressionné : lorsqu'on a une égalité tensorielle de la forme $T_1 = 0$, ou $T_2 = T_3$ (où T_1, T_2, T_3 sont des tenseurs), alors cette égalité reste vraie lorsqu'on effectue n'importe quel changement de référentiel. Miraculeux ! Exactement ce qu'il recherchait : un groupe de transformations qui laisse une loi physique invariante de forme. Encore plus beau que la relativité restreinte, qui ne tolère que le groupe de Lorentz ! Le graal ! C'est ce qu'on appelle la covariance totale.

Mais, si on y réfléchit bien, les choses ne sont pas si simples.

Première raison : comme nous l'avons déjà dit, la courbure de l'espace-temps de toute théorie de la gravitation ne peut être qu'une courbure calculée pour absorber l'accélération d'origine gravitationnelle, et non les accélérations ayant d'autres origines (électromagnétique par exemple). Si on interprète l'accélération gravitationnelle comme une courbure, alors toutes les accélérations ayant une autre origine passent entre les mailles du filet ! Il existe nécessairement des repères accélérés qui ne sont pas du tout concernés par cette prétendue équivalence : "accélération = courbure" !

La seconde raison est que le groupe de Lorentz est adapté au passage d'un repère galiléen (ou inertiel) à un autre ; si on veut prendre en compte les repères accélérés, on augmente les contraintes, donc, en supposant que le problème ait encore des solutions, il ne pourrait pas en avoir plus : il en aurait nécessairement moins. On ne pourrait obtenir qu'un sous-groupe du groupe de Lorentz.

La troisième raison est que les changements de référentiels qui conservent toutes les égalités tensorielles sont des transformations linéaires : elles recombinaient linéairement les quatre vecteurs constituant les bases locales (un vecteur pour le temps, trois pour l'espace). Ceci signifie, entre autres choses, que la variable temps peut se recombinaire avec les variables d'espace, ce qui entraîne qu'on peut librement jouer sur la vitesse. Mais, attention : que signifie changer de référentiel dans un espace de Riemann ? Nous l'avons expliqué dans la section sur les repères inertiels : de même que dans un espace de Minkowski tout référentiel est nécessairement galiléen, dans un espace de Riemann tout référentiel est nécessairement inertiel. Etudier la trajectoire d'un mobile, c'est la rapporter à un repère inertiel. Parmi les repères dits "accélérés", certains ont un rôle particulier : ce sont précisément ces repères inertiels, qui ont un lien particulier avec la courbure, puisqu'ils suivent une géodésique ; mais ceci ne se généralise certainement pas à l'ensemble des repères accélérés. La structure de l'espace de Riemann est conçue pour permettre de généraliser la notion de repère galiléen : tous les repères inertiels vont hériter des propriétés particulières des repères galiléens, et pourront servir, localement, de repères de référence. Il y a toujours des repères privilégiés, comme les repères galiléens de Newton. Ces repères privilégiés, les repères inertiels, sont ceux qui ne subissent aucune interaction autre que gravitationnelle. Comme on l'a déjà dit, la courbure spatio-temporelle absorbe l'accélération gravitationnelle, mais pas les accélérations ayant une origine électromagnétique, par exemple. On pourrait dire que, dans toute théorie de la gravitation basée sur les notions de courbure et de métrique (comme c'est le cas de la relativité générale, qui a ouvert la voie), il n'y a plus d'accélération gravitationnelle. On est en droit de considérer que les repères inertiels ne sont pas des repères accélérés. Dans ce cas, l'expression "repère accéléré" doit être réservée aux accélérations non gravitationnelles. Et aucune formule, analogue à celle de Lorentz, ne permet de passer d'un repère inertiel à un repère réellement accéléré. Si on reprend l'exemple décrit dans la section sur l'allégorie de l'ascenseur revue et corrigée, on voit clairement que les particules A_1 et A_2 tombant en chute libre peuvent servir à définir des repères inertiels légitimes, mais, en présence d'un champ électrique, les particules chargées (l'électron, l'ion, le proton) ne le peuvent pas.

Einstein a défini la "relativité généralisée" comme étant un groupe de transformations permettant de passer d'un repère à un autre, qu'il soit accéléré ou non, sans modification de la forme générale des lois physiques.

Ainsi définie, la relativité généralisée n'a jamais existé, et n'existera jamais.

11 Vraie et fausse accélération

Lorsqu'un mobile se déplace sans interaction directe avec le monde extérieur, il suit une géodésique. C'est un mobile inertiel. Si un observateur éloigné considère que ce mobile subit une accélération, ce n'est qu'une interprétation subjective, car, localement, le mobile se déplace en ligne "droite", à vitesse constante. Son accélération apparente ne peut être qu'une fausse accélération. Quand nous disons "sans interaction directe avec le monde extérieur", nous voulons dire : sans interaction autre que gravitationnelle, ou si on préfère sans interaction avec autre chose que le vide ambiant, qui est lui-même une émanation du monde matériel, selon le principe de Mach (voir plus loin).

Mais le mobile peut changer de trajectoire, par exemple par l'allumage d'un moteur, ou par une collision avec un autre mobile. Il subit alors une vraie accélération d'origine non gravitationnelle. Ceci se traduit par un changement de géodésique : il suivait une première géodésique jusqu'à l'instant de la "catastrophe" (au sens de la théorie des catastrophes) ; ensuite, il poursuit son parcours selon une autre géodésique. Dans ce cas, son énergie-impulsion a manifestement changé.

Ainsi définie, la vraie accélération a une signification physique. Elle possède une réalité objective ; elle n'est pas relative.

Illustrons ceci par le fameux paradoxe des jumeaux de Langevin. Imaginons les deux jumeaux A et A' dans l'espace, chacun dans une capsule spatiale. Au début de l'expérience, ils sont tous les deux en P_1 ; ils déclenchent leurs chronomètres : $t_1 = t'_1 = 0$. A la fin, ils se retrouvent en P_2 . Entre-temps, le premier (A) a tout simplement suivi une géodésique, tandis que le second (A') a allumé le moteur de sa capsule et s'est éloigné de A , avant de revenir et de le rejoindre en P_2 . Les deux jumeaux comparent alors leurs chronomètres. Celui de A indique : t_2 ; celui de A' indique : t'_2 . On peut alors constater que $t'_2 < t_2$, ce qui signifie que A' a moins vieilli que A pendant l'expérience.

On pourrait être tenté de dire : si A estime que A' a moins vieilli que lui, alors, par symétrie, A' doit considérer que A a moins vieilli que lui. Mais ce serait une erreur.

L'explication est très simple : c'est A qui a suivi une géodésique ; or nous verrons dans le document sur les métriques qu'une géodésique est, par définition, une trajectoire qui maximise le temps propre. Cette définition est d'ailleurs celle qui est utilisée en relativité générale. Il est donc clair que c'est le jumeau qui a suivi une géodésique qui a plus vieilli que son frère, et ceci est une réalité objective : tous les observateurs seront d'accord sur cette conclusion.

De ceci il résulte que l'accélération n'a pas du tout le même statut que la vitesse : si on considère deux référentiels inertiels, le premier aura une vitesse

$\vec{v}$ par rapport au second, et le second une vitesse $-\vec{v}$ par rapport au premier ; selon la relativité restreinte, on peut passer de l'un à l'autre par la transformation de Lorentz, de manière symétrique ; chacun peut être considéré comme étant immobile, et ce choix est purement subjectif. Mais si on considère un repère inertiel et un autre repère accéléré par rapport au premier, il est interdit de considérer que c'est le second qui est inertiel, et que c'est le premier qui est accéléré par rapport à lui. Ce serait vrai mathématiquement, mais c'est faux physiquement. Les repères inertiels ont un statut à part. C'est pour cette raison qu'on ne pourra jamais trouver de transformation analogue à celle de Lorentz applicable à tous les repères accélérés.

Un mobile inertiel est un mobile qui suit une géodésique ; il n'interagit pas directement avec le monde extérieur, c'est-à-dire qu'il n'échange aucune énergie-impulsion avec d'autres corps réels. On dit quelquefois que c'est un mobile "libre", mais en réalité il n'est pas libre : il est soumis à la structure de l'espace-temps, et à elle seule. N'oublions pas que la structure de l'espace-temps, ainsi que les géodésiques qui en résultent, sont définies, de manière virtuelle, par le monde extérieur.

La relativité restreinte nous permet de comprendre que tous les repères inertiels ont le même statut, et que la transformation de Lorentz permet le passage (virtuel) de l'un à l'autre ; mais les repères accélérés ont un statut bien différent, puisque l'accélération (la vraie) met en jeu des transferts d'énergie bien réels. On peut être certain qu'il est impossible de dépasser la relativité restreinte en inventant une transformation purement mathématique, sur le modèle de celle de Lorentz, qui la généraliserait à tous les référentiels, inertiels ou non. Pour cette raison, la relativité générale n'a jamais été, et ne sera jamais, une généralisation de la relativité restreinte, comme nous l'avons déjà dit.

Un mobile est accéléré s'il échange de l'énergie-impulsion réelle avec d'autres corps, par de vrais phénomènes physiques (des "catastrophes").

Un mobile non accéléré est inertiel : son "vécu" est du non-événement à l'état le plus pur possible.

Cependant, on est en droit de dire l'inverse : on peut se demander si ce "non-événement" n'est pas une illusion ! Il est possible que ce soit seulement une situation d'équilibre, dans laquelle se produisent des myriades de mini-catastrophes qui, globalement, s'annulent. Il y aurait alors de vraies forces gravitationnelles en jeu, mais, comme on le sait, la combinaison de plusieurs forces bien réelles peut conduire à une situation d'équilibre.

Y a-t-il un moyen de trancher ? Oui, il y en a un : il faut étudier les situations de déséquilibre, dans lesquelles les forces gravitationnelles, si elles existent, conduisent à des transferts d'énergie observables et mesurables (nous en reparlerons un peu plus loin). Et, au cas où de véritables forces gravitationnelles se

manifesteraient dans ces situations de déséquilibre, il faudrait se demander si, sous ce que nous avons appelé "fausses forces", ne se cacheraient pas de véritables forces, absorbées par la courbure.

12 Le principe de Mach

Après avoir publié la théorie de la relativité restreinte, Einstein avait consacré ses réflexions aux référentiels accélérés.

La relativité restreinte décrit le passage d'un repère inertiel (non accéléré) à un autre, grâce à la transformation de Lorentz (ou plutôt aux transformations de Lorentz, qui forment un groupe appelé groupe de Lorentz, ou groupe de Poincaré). Les lois de la nature (par exemple la propagation de la lumière) ont la même forme dans tous ces référentiels. C'est ce qu'on appelle le principe de relativité restreinte.

On connaît la prodigieuse fertilité de ce principe. Mais pour Einstein il était insuffisant. En effet, les repères accélérés échappent à cette théorie. Les repères inertiels jouent un rôle privilégié, comme dans la théorie de Newton. D'où leur vient ce privilège? Est-il "de droit divin"? Cette situation était inacceptable pour Einstein. Pour y remédier, il a envisagé deux directions de recherche :

- la première direction est très physique et matérialiste; elle se base sur le "principe de Mach", selon lequel le comportement des particules en un lieu donné dépend de la distribution des masses et des vitesses (donc des énergies-impulsions) de l'ensemble des corps de l'Univers; ceci signifie que la courbure de l'espace-temps, les géodésiques, l'inertie, en chaque point, sont dictées par le reste de l'Univers matériel;

- la seconde direction est plus idéaliste, mathématique et abstraite : c'est la recherche d'un groupe de transformations, analogue au groupe de Lorentz, qui pourrait prendre en compte non seulement les repères inertiels, mais aussi les repères accélérés. C'est ce qu'on appelle le principe de relativité généralisée.

Dans un premier temps, Einstein a, semble-t-il, privilégié le principe de Mach. Mais par la suite il s'est orienté dans la seconde direction, ce qui l'a conduit à définir le "principe de relativité généralisée". Il a alors abandonné le principe de Mach.

Nous reparlerons du principe de Mach dans le document "Champ d'entraînement".

Mais on peut déjà dire que, selon ce principe, toute la matière de l'Univers agit en chaque point, et contribue à forger une résultante locale. Dans le

document sur le champ d'entraînement, nous proposerons de modéliser cette résultante en termes d'énergie-impulsion virtuelle (qu'on peut appeler aussi : champ gravitationnel quadrivectoriel). C'est cette résultante qui permet de définir l'inertie, ou encore les géodésiques, autrement dit le chemin qui sera suivi par un corps non soumis à d'autres forces que gravitationnelles.

Voici un argument en faveur du principe de Mach : il concerne les repères tournants. Dans l'Antiquité, les astronomes considéraient que les étoiles étaient fixes par rapport à une sphère qu'ils appelaient la "sphère des fixes". Les positions des astres étaient déterminées par rapport à cette sphère, comme s'il existait un repère orthonormé fixe, rigide et absolu lié à elle. Depuis cette époque, on a pu mettre en évidence d'infimes déplacements des étoiles les plus proches les unes par rapport aux autres (vitesses propres ou apparentes, dues à la parallaxe), mais si on considère les galaxies lointaines, alors ces déplacements sont inaccessibles à l'observation. La "sphère des fixes" existe toujours ! Ne pourrait-on pas utiliser comme repère de référence un repère tournant par rapport à cette sphère des fixes à une vitesse angulaire ω ? Dans ce cas, une galaxie située à la distance r de l'origine tournerait à la vitesse : $v = r.\omega$; cette vitesse dépasserait celle de la lumière pour $r > \frac{c}{\omega}$. A cette distance, la masse maupertuisienne de la galaxie serait infinie... et ensuite ? Ceci étant évidemment contraire à la relativité restreinte, on voit qu'il est impossible de trouver un repère tournant dans lequel la relativité restreinte soit respectée : on doit nécessairement utiliser le repère lié à la "sphère des fixes", ou un autre repère se déplaçant par rapport à lui à vitesse constante (un repère galiléen), et en aucun cas un repère tournant. C'est le retour des repères galiléens ! Le système de coordonnées lié à la sphère des fixes (ou si on préfère à l'Univers matériel) est indiscutablement un repère privilégié.

Mais on peut aller plus loin. Imaginons un astronome étudiant la répartition des galaxies sur le ciel nocturne. Si cette répartition est homogène pour lui (c'est-à-dire s'il voit la même densité de galaxies dans toutes les directions), alors elle ne le sera pas pour un autre astronome se déplaçant à grande vitesse par rapport au premier. Ceci provient du phénomène d'aberration de la lumière, décrit dans le document sur les vitesses en relativité restreinte. Pour le second astronome, la densité de galaxies semblera plus forte dans la direction vers laquelle pointe son vecteur vitesse, et plus faible dans la direction opposée. Autrement dit, un observateur quelconque a un moyen de savoir s'il est en mouvement par rapport à l'ensemble de l'Univers. Donc la notion d'immobilité par rapport à l'ensemble de l'Univers matériel possède une signification objective. On ne peut pas dire que cette immobilité est vraiment absolue, dans la mesure où elle est relative à l'ensemble de l'Univers. Mais si l'espace-temps local est une émanation de l'ensemble de l'Univers, comme le suppose le principe de Mach, alors on n'est pas en droit de refuser, à priori, la notion d'"immobilité gravitationnelle". Et si cette notion a un sens, comme l'impose le principe de Mach, alors on ne peut pas dire que tous les référentiels sont équivalents.

On pourrait avoir l'impression que cette notion d'"immobilité gravitationnelle" est contraire à la relativité restreinte ; nous verrons, dans le document sur l'entraînement, que ce n'est pas du tout le cas ; bien au contraire !

Mais l'intention d'Einstein était de faire disparaître les repères privilégiés : c'était son but premier ; donc le principe de Mach allait à l'encontre de son projet.

Encore une remarque sur cette notion d'"immobilité gravitationnelle" : on peut penser qu'elle ne plaisait pas à Einstein, et c'est peut-être pour l'écarter qu'il a abandonné le principe de Mach. Mais lorsqu'il a essayé d'étudier les conséquences cosmologiques de sa théorie de la gravitation, il a constaté qu'il avait été devancé par d'autres physiciens comme Friedmann et Lemaître, suivis par Robertson et Walker. Le "modèle de Friedmann" est un modèle de l'expansion de l'Univers dans lequel la notion de "point comobile" est fondamentale (voir à ce sujet le document "Gravitation et cosmologie"). Mais cette notion est équivalente, à l'échelle de l'Univers, à celle de "point gravitationnellement immobile" : c'est une immobilité par rapport à l'ensemble de l'Univers matériel. D'abord réservé, Einstein a ensuite chaudement félicité Friedmann pour son travail, qui est devenu une référence dans le domaine de la cosmologie relativiste. Ce qui montre, me semble-t-il, que, lorsqu'on chasse le principe de Mach par la porte, il revient par la fenêtre. Comme la force...

On a dit parfois que le principe de Mach a été contredit par l'expérience ; c'est en fait la version présentée par Brans et Dicke qui a été critiquée. Cette version modélise le principe de Mach par un champ scalaire (il nous semble naturel d'utiliser un champ quadrivectoriel, comme nous le verrons), et utilise des coefficients ajustables (dont nous ne voyons pas l'utilité). Quant à l'idée de Dicke selon laquelle la "constante" de la gravitation G ne serait pas vraiment constante, mais qu'elle pourrait être dépendante de la répartition de la matière dans l'Univers, nous sommes réservés à son sujet. On aura compris que notre interprétation du principe de Mach est bien différente.

Mais, avant les travaux de Brans et Dicke, Einstein était déjà très sensible au problème, dans la phase de réflexion préliminaire à la conception de la relativité générale. L'idée, à l'époque, était d'interpréter le principe de Mach par une action à distance de l'ensemble de l'Univers, par le biais du potentiel newtonien Φ . L'expansion de l'Univers n'avait pas encore été découverte, et on imaginait un Univers infini, euclidien, statique, éternellement semblable à lui-même, peuplé d'étoiles réparties à peu près uniformément. Le problème est que, dans ces conditions, le calcul du potentiel newtonien montre qu'il diverge : on obtient une valeur de $|\Phi|$ infinie partout ! Einstein a envisagé deux solutions à ce problème : soit un Univers contenant un nombre fini d'étoiles uniformément réparties, d'où l'idée d'un Univers hypersphérique ; soit un Univers dont la courbure R , en chaque point, est entièrement déterminée par la matière/énergie locale, sans la moindre intervention des astres lointains, ce qui suppose l'abandon du principe

de Mach. Et finalement il a choisi... les deux solutions ! Il a modélisé l'Univers hypersphérique et abandonné le principe de Mach.

Revenons sur le problème du potentiel. Comme nous le verrons, nous considérons qu'il s'agit d'une quantité relative, qui n'a pas de signification en elle-même ; seules les différences de potentiel ont une véritable signification physique objective. Ces différences de potentiel sont une traduction (par intégration) d'un flux d'information que nous notons $\mathcal{F}$. La question est donc de savoir si $\mathcal{F}$ diverge. C'est une question qui se pose réellement, car en première approximation ce flux obéit à une fonction en $\frac{1}{r^2}$, et la surface d'une sphère est proportionnelle à r^2 ; comment conclure ? Sans faire ici le calcul détaillé, remarquons seulement que ce problème est apparenté au paradoxe d'Olbers, qu'on a l'habitude de formuler ainsi : "Pourquoi le ciel est-il noir la nuit ?". Effectivement, le flux lumineux qui nous parvient des étoiles obéit, lui aussi, à une fonction en $\frac{1}{r^2}$. La solution de ce paradoxe fait appel à l'histoire de l'Univers, et en particulier à son expansion. Cette argumentation n'était pas encore disponible à l'époque, ce qui fait que le "problème du potentiel infini" a été fortement exagéré. On trouvera une explication du paradoxe d'Olbers dans le document "Gravitation et cosmologie" ; cette explication est incomplète, dans la mesure où le problème dépend du modèle cosmologique choisi, et où il existe une infinité de modèles possibles. Mais une chose est sûre : le "fond du ciel" est bien noir (ou presque noir) la nuit.

Einstein aurait très bien pu conserver le principe de Mach ; mais il s'est laissé entraîner dans une autre direction.

13 La covariance totale

La théorie qu'on appelle relativité générale n'est qu'une théorie de la gravitation totalement covariante (ce qui est déjà remarquable !), qui n'inclut pas les accélérations autres que gravitationnelles. Donc elle n'est pas générale.

Mais alors, si la vraie relativité généralisée n'existe pas, à quoi bon chercher à construire une théorie de la gravitation totalement covariante ? Cette covariance totale serait intéressante si elle pouvait conduire à une relativité vraiment généralisée ; mais c'est un rêve inaccessible.

Dès lors, on ne peut que renoncer au principe de relativité généralisée ; on se tournera de préférence vers le principe de Mach. Mais, attention : comme nous l'avons expliqué, une théorie de la gravitation basée sur le principe de Mach va nécessairement admettre des référentiels particuliers, donc elle ne pourra pas être totalement covariante.

En résumé, si on veut construire une théorie de la gravitation respectant le principe de relativité généralisée, avec ou sans la covariance totale, l'entreprise

est vouée à l'échec.

Si on veut construire une théorie respectant le principe de Mach, alors on doit nécessairement abandonner la covariance totale.

Dans les deux cas, la covariance totale risque d'être un boulet à traîner, et rien de plus. Elle nous barre la route tracée par le principe de Mach, ce qui est bien dommage...

Remarquons aussi que la covariance totale attribue le même rôle à la variable temporelle qu'aux variables spatiales ; on travaille avec les tenseurs sans distinguer le temps de l'espace. Pour cette raison, on dit parfois que "le temps n'existe pas en relativité générale". C'est un peu vrai aussi en relativité restreinte, puisque la transformation de Lorentz recombine le temps et l'espace. Mais elle le fait d'une manière très précise, unique : c'est le groupe de Lorentz, et lui seul, qui est habilité à recombinaison les coordonnées de temps avec les coordonnées d'espace, tandis que la covariance totale peut les recombinaison d'une multitude de façons, parmi lesquelles la transformation de Lorentz n'est qu'un cas parmi une infinité d'autres. C'est une façon de nier le rôle unique du groupe de Lorentz, en le noyant dans une foule anonyme. Ce rôle unique du groupe de Lorentz était pourtant le noyau dur de la relativité restreinte, l'idée de génie qui a fait de cette théorie l'une des plus belles et des plus fertiles de toute la physique. C'est la flèche qui a atteint le centre de la cible. La relativité générale, au contraire, contient une part importante d'"idéologie" (car la covariance totale n'est rien de plus qu'une idée abstraite, mathématique et esthétique, non enracinée dans les exigences concrètes de la physique) qui n'atteint pas la cible, puisque le but affiché était la "relativité généralisée", but qui ne sera jamais atteint. La relativité générale n'est pas "plus relativiste" que la relativité restreinte : elle l'est, au contraire, beaucoup moins. Comme un café dans lequel on aurait ajouté beaucoup d'eau. Quel dommage!

Que la relativité restreinte soit une théorie extraordinaire, personne n'en doute. Elle n'a qu'un défaut : son nom. Comme on le fait parfois remarquer, elle apparaît plutôt comme la recherche d'un absolu : la recherche d'une réalité objective au-delà des apparences, ou de ce qui se conserve quand on change de point de vue. Elle aurait été mieux nommée "théorie de la lorentz-invariance".

Mais surtout ce nom de relativité "restreinte" laisse entendre qu'elle peut être dépassée. Par la relativité "générale", bien sûr. Dans l'esprit du public non averti, Einstein est l'auteur de "La Théorie de La Relativité". Comme si les deux théories formaient un tout, comme si la seconde était le prolongement et la généralisation de la première. Alors que nous savons bien que la théorie de la Lorentz-invariance et la théorie de la gravitation d'Einstein sont aussi indépendantes l'une de l'autre que peuvent l'être deux théories physiques. Cette confusion est bien regrettable!

Bien sûr, il faut le dire, Einstein a mis aussi dans la relativité générale une pointe de génie, en introduisant en physique l'idée d'espace-temps courbe ; et il a mené son entreprise avec le brio d'un grand mathématicien : l'invention du tenseur d'Einstein, d'un point de vue purement technique, est un coup de maître !

L'idée de la covariance généralisée est probablement arrivée par hasard sur la route d'Einstein, mais elle a été si bien vendue qu'elle est devenue une sorte d'"idéologie".

Considérons la formule de Newton : $\vec{F} = m.\vec{\gamma}$, qui, dans le cas de la gravitation, devient : $\vec{F} = m.\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}$ ($i = 2, 3, 4$).

Cette formule est adaptée à un espace euclidien. Si on désire l'adapter à un espace courbe, on peut l'écrire sous cette forme :

$$m.\left[\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \cdot \frac{dx^j}{dt} \cdot \frac{dx^k}{dt}\right] = -g^{ij} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}.$$

Selon la notation d'usage, Γ_{jk}^i désigne un symbole de Christoffel.

On dira que l'équation est écrite ici sous sa forme manifestement covariante.

Cette modification de l'écriture de l'équation se base sur des règles très rigoureuses de l'algèbre tensorielle ; elle est destinée à la rendre plus facilement utilisable dans un contexte où l'espace est courbe (la surface terrestre par exemple). Mais c'est toujours la même équation. Cette modification, purement formelle, est parfaitement légitime. On conserve le fond, on modifie la forme.

Mais il y a problème lorsqu'on veut imposer au fond de s'adapter à la forme, autrement dit lorsqu'on décide que la nature doit se plier à une idée qui est dans notre tête. Dans le cas présent, l'idée est que toute loi de la nature doit s'exprimer sous une forme manifestement covariante, identique dans tous les repères. Le mot "idéologie", dans le domaine scientifique (et non politique !) signifie : attribuer du poids à une idée préconçue, alors qu'on ne devrait s'appuyer que sur l'observation.

Bien sûr les idées restent nécessaires, mais seulement pour assurer la cohérence des théories.

Reprenons l'équation des champs de la relativité générale :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot g_{\mu\nu} \cdot R = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}.$$

Elle est totalement covariante, en ce sens que, si elle est vraie dans un référentiel, elle est automatiquement vraie dans tout autre référentiel (comme toutes

les autres égalités tensorielles).

Mais observons le membre de droite : nous voyons le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, qui sera étudié dans le document sur le champ d'entraînement ; nous verrons en particulier comment il se transforme grâce à la transformation de Lorentz. Sa construction, sa nature même, sont étroitement liées à cette transformation ; sa signification, comme celle du quadrivecteur énergie-impulsion, n'apparaît clairement que dans un repère orthonormé, avec une composante "temporelle" (l'énergie) et trois composantes "spatiales" (l'impulsion), liées par les formules de la relativité restreinte. Le fait d'inclure ce tenseur dans une formule qui autorise tous les changements de référentiels est presque contre nature : les transformations autres que celle de Lorentz ne "font pas sens", du point de vue du physicien ; elles sont seulement commodes pour le mathématicien, car la manipulation des tenseurs est une branche de l'algèbre linéaire qui a été très étudiée, et qui permet de faire mécaniquement beaucoup de choses, sans réfléchir à leur signification profonde.

Dans le présent travail, nous plaçons pour une théorie de la gravitation strictement relativiste. Par "relativiste", il faut comprendre : conforme à la relativité restreinte, qui est basée sur la Lorentz-invariance. L'objectif qu'on peut se fixer est donc le suivant :

- rechercher ce qui est (ou pourrait être) Lorentz-invariant dans la théorie de Newton (voir par exemple le document sur le potentiel) ;
- mettre en valeur les points communs entre la gravitation et les autres théories physiques notoirement relativistes (en particulier l'électromagnétisme) ;
- replacer cette Lorentz-invariance (locale) dans un espace-temps courbe.

Le mirage de la covariance généralisée ne nous fera à aucun moment perdre de vue cet objectif.

Voici donc un point sur lequel notre choix est clair : nous préférons oublier non seulement le principe de relativité généralisée, qui est un mirage, mais aussi la covariance totale, qui est une interprétation "idéologique" de la relativité, et nous tourner vers le principe de Mach, qui enracine l'espace-temps dans l'Univers matériel - l'objet de la physique. Nous allons voir reparaître les repères privilégiés ; mais leurs privilèges ne seront plus "de droit divin", comme chez Newton : ils seront expliqués.

14 Le pari d'Einstein

Nous voyons donc que l'expérience de pensée de l'ascenseur d'Einstein conduit à réfléchir à un "principe d'équivalence d'Einstein", qui peut être l'objet de plusieurs formulations et de plusieurs interprétations.

Nous constatons qu'Einstein a choisi une interprétation bien particulière de son allégorie de l'ascenseur : il a souhaité y voir une preuve du "principe de relativité généralisée" (ce qui, au sens strict, est certainement faux) ; il en a tiré cette idée (très discutable) : les lois de la gravitation, exprimées en termes de tenseurs, doivent être invariantes par toutes les transformations linéaires des coordonnées, donc elles doivent être totalement covariantes.

C'est ce que j'appelle "le pari d'Einstein".

Les raisons de ce pari sont faciles à comprendre : à l'époque d'Einstein (et probablement encore aujourd'hui), les données observationnelles étaient insuffisantes pour conduire de manière directe à une théorie unique et certaine ; un acte de foi était nécessaire pour pallier ce manque. Le choix du principe de relativité généralisée (transformé en cours de route en principe de covariance totale) était précisément l'acte de foi qui devait permettre à Einstein de résoudre de manière totale le problème de la gravité grâce à la virtuosité mathématique, en marginalisant le recours à l'observation et à l'expérimentation. En pariant d'abord sur le principe de relativité généralisée, puis sur la covariance totale, Einstein était parfaitement conscient qu'il tenait l'élément clé qui allait lui permettre de mettre en place sa stratégie de géométrisation de la gravité ; il entrevoyait sans doute déjà les outils mathématiques qu'il allait pouvoir utiliser, à commencer par les géodésiques. Son succès vient sans doute en partie du fait qu'il a imposé, dès le début, des contraintes extrêmement fortes à sa théorie, ce qui a limité le nombre de solutions possibles.

Mais notre but est beaucoup plus limité : nous nous contenterons d'une modeste approche, un simple débroussaillage. Pour atteindre ce but, nous devons nous appuyer sur des hypothèses minimales (selon le principe du rasoir d'Oc-cam) ; nous garderons en tête l'allégorie de l'ascenseur, mais certainement pas dans le but d'en faire le marche-pied vers la covariance totale : nous n'avons pas besoin de cette hypothèse.

15 Conservation de l'énergie

La physique est basée sur des lois de conservation : par exemple, en physique classique, la conservation de l'énergie (ou de l'énergie-impulsion) et du moment cinétique. La physique quantique a continué dans cette voie, en découvrant de nombreuses autres quantités conservatives.

La notion de conservation semble simple : par exemple, si on considère un système quantique formé d'un certain nombre de particules dans un volume non nul, on peut évaluer son énergie globale E_1 à un instant t_1 , puis son énergie globale E_2 à un instant t_2 ; s'il n'y a pas d'échange avec le monde extérieur, on doit avoir $E_1 = E_2$.

Le problème majeur est celui de la simultanéité, qui n'a pas de signification absolue en relativité restreinte. Si un observateur estime avoir observé "simultanément" les différentes particules constituant un système, un autre observateur en mouvement par rapport au premier va contester cette simultanéité, et va donc faire un bilan énergétique différent. Les deux observateurs n'ont aucun moyen de se mettre d'accord sur un bilan énergétique à un instant donné, parce-que les instants de l'un ne sont pas ceux de l'autre : ce sont des coupes de l'espace-temps de Minkowski selon des "plans" (variétés) non parallèles. Si des relations s'établissent entre des objets éloignés, avec des échanges à distance, la notion même de conservation est un non-sens pour la relativité restreinte.

Cette théorie admet quand même une forme de conservation de l'énergie, comme on l'a vu dans le document sur les vitesses en relativité restreinte, section sur les chocs élastiques. Mais cette conservation ne peut être que locale. Le problème est que nous savons aujourd'hui que la physique quantique (donc la physique tout court) n'est pas locale.

Faut-il renoncer à la conservation globale de l'énergie (et autres conservations) ? Faut-il abandonner la relativité restreinte ? En réalité, il est possible de concilier les deux, à une condition : il faut que les lois de conservation soient valables dans certains repères particuliers, repères que la relativité restreinte, à elle seule, est incapable de définir. Mais nous savons que le principe de Mach, justement, permet de définir de tels repères : ce sont les repères "immobiles par rapport à l'ensemble de l'Univers". De plus, ces repères particuliers permettent de définir, en chaque point, un temps particulier, un temps de référence. C'est dans ces repères particuliers, avec ce temps de référence, que doivent être testées les lois de conservation.

La relativité générale n'est pas mieux armée que la relativité restreinte pour gérer les lois de conservation. En effet, comme on le dit parfois, "le temps n'existe pas en relativité générale". Ceci signifie que, par rapport aux trois dimensions spatiales, la dimension temporelle n'a pas de statut particulier. Toutes les coupes de l'espace-temps courbe, selon des "plans" (variétés) quelconques, se valent. Aucune ne permet de sélectionner des événements objectivement simultanés, donc de comparer l'énergie d'un système étendu, en deux instants t_1 et t_2 . Aucun bilan global n'est possible.

Le fait que "le temps n'existe pas en relativité générale" soulève une autre question, qui concerne le déterminisme (voir la section "hasard et détermi-

nisme", dans le document sur la "physique quantique, généralités") : connaissant l'état d'un système à l'instant t_1 , comment prévoir son état à l'instant t_2 ? Cette question a-t-elle un sens ? L'équation de la relativité générale ne comporte pas la variable temps ; elle décrit, de manière locale, la structure d'une entité à quatre dimensions appelée espace-temps, dans laquelle chacun peut faire la coupe qu'il souhaite, pour faire apparaître la variable "temps" qui lui convient, mais un temps qui n'a aucune valeur générale. Cette situation suggère une interprétation souvent évoquée : si le temps n'existe pas en relativité générale, c'est qu'il n'existe pas du tout, ou seulement dans notre subjectivité ; il n'y a pas de causes entraînant des conséquences, mais un ensemble d'événements totalement prédéterminés (ou plutôt : totalement déterminés, le préfixe pré- étant ici dépourvu de sens). Cette façon de voir est compatible avec un déterminisme total, parfaitement rigoureux. Dieu ne joue pas aux dés, disait Einstein.

Mais le statut du temps en physique quantique est plus subtil. Nous avons vu que cette physique étudie à la fois le domaine des non-événements, ou de la circulation d'informations évanescentes (domaine parfaitement réversible, qui ne connaît pas le temps, lui non plus, et qui se marie bien avec la relativité restreinte), et le domaine des vrais événements, scandé par les collapses (réductions de fonctions d'onde), dans lequel se construit un temps objectif, enraciné dans l'histoire matérielle de l'Univers.

Le jour où il a rejeté le principe de Mach, Einstein a rejeté, du même coup, le temps objectif, et il a marginalisé la matière, qui est pourtant le principal objet d'étude de la physique. Ce pari a coupé la relativité générale de la physique quantique.

16 Sur les forces

S'il existe une énergie gravitationnelle (et nous verrons des raisons de penser que c'est bien le cas), alors pourquoi n'existerait-il pas une force gravitationnelle ? Par définition, l'énergie est le travail d'une force. On ne peut pas parler d'énergie sans parler de force.

Mais précisons que nous donnons ici au mot "force" son sens minimal. Nous appelons "force" tout processus d'échange (ou d'interaction) entre les corps matériels, respectant la conservation de l'énergie-impulsion.

Nous pouvons proposer la définition suivante :

Une force est un processus dans lequel il y a une redistribution de l'énergie-impulsion.

Il existe plusieurs processus répondant à cette définition. Par exemple, en

électromagnétisme, les interactions entre particules chargées font intervenir une particule-vecteur (le photon) et plusieurs lois de conservation : conservation de la charge totale, du spin, et bien sûr de l'énergie-impulsion. De même, l'interaction faible et l'interaction forte possèdent, elles aussi, leurs particules-vecteurs et leurs lois de conservation. Les quantités conservées sont des "observables" au sens de la physique quantique. Mais la seule "observable" qui nous intéresse ici est l'énergie-impulsion : c'est la seule qui soit conservée dans l'ensemble des processus que nous appelons "forces".

C'est la relativité restreinte qui nous enseigne qu'il existe deux quadrvecteurs lorentziens qui jouent un rôle fondamental en physique :

- le premier est le quadrvecteur position $\tilde{r}$, spatio-temporel ; le fait qu'il se transforme par la transformation de Lorentz est une propriété fondamentale de l'espace-temps ; ce quadrvecteur est à la base de la cinématique relativiste ;

- le second est le quadrvecteur énergie-impulsion $\tilde{p}$; il est à la base de la mécanique (ou dynamique) relativiste.

Les propriétés de ces deux types de quadrvecteurs sont très étroitement imbriquées.

Lorsqu'on parle d'énergie-impulsion, la notion de force, d'abord au sens newtonien (le fameux vecteur, qu'on représente par une flèche), ensuite au sens relativiste (l'échange d'énergie-impulsion quadrvectorielle), est omniprésente, puisqu'on a (en notant $\vec{p}$ l'impulsion vectorielle) :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Si on note m_0 la masse au repos d'un corps quelconque, v sa vitesse dans un référentiel quelconque, w sa rapidité, m sa masse maupertuisienne, on sait que :

$$m = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} ;$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m_0 \cdot ch \frac{w}{c} \cdot \vec{v} = m_0 \cdot c \cdot sh \frac{w}{c} ;$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \cdot c \cdot ch \frac{w}{c} \cdot \frac{d\vec{w}}{c \cdot dt} = m \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} = m \cdot \vec{\Gamma}.$$

Cette formule est le pendant relativiste de la formule de Newton (pour qui $\vec{p} = m_0 \cdot \vec{v}$) :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \cdot \vec{\gamma}.$$

Pour Newton, il y a proportionnalité entre la force et l'accélération ; pour passer à la relativité restreinte, il suffit de remplacer la masse au repos par la

masse maupertuisienne et l'accélération classique par la pseudo-accélération.

Passons à la gravitation.

Pour Newton, une particule-test (de masse m_0 suffisamment faible pour ne pas perturber le champ gravitationnel) va subir une force

$$\vec{F} = -m_0 \cdot \vec{\nabla} \Phi = m_0 \cdot \vec{\gamma},$$

ce qui va entraîner :

$$\vec{\gamma} = -\vec{\nabla} \Phi.$$

Nous voyons que la masse m_0 s'élimine, parce-que la masse inerte est égale à la masse pesante. Pour Newton, la gravitation est bien basée sur la notion de force, mais dans ce cas précis, la masse disparaît, donc on pourrait raisonner comme si le champ était un champ d'accélération (donc purement cinématique, et non mécanique).

Si nous souhaitons rendre ces formules relativistes, une idée absolument évidente est de remplacer la masse au repos par la masse maupertuisienne et l'accélération classique par la pseudo-accélération ; ce qui donne :

$$\vec{F} = -m \cdot \vec{\nabla} \Phi = m \cdot \vec{\Gamma} ;$$

$$\vec{\Gamma} = -\vec{\nabla} \Phi.$$

Cette approche est le marche-pied idéal pour aller vers une théorie de la gravitation relativiste. Pourquoi Einstein a-t-il choisi une autre voie ?

Sa motivation nous semble claire. L'idée est que, si la masse s'élimine, c'est parce-qu'on l'a introduite sans raison ; la force et l'énergie-impulsion n'ont rien à faire ici ; seule compte l'accélération. La gravitation n'est pas du domaine de la mécanique, ou de la dynamique, mais seulement de la cinématique. Il n'y a pas d'échange d'énergie, pas de force, mais seulement une courbure de l'espace-temps.

Si ceci était vrai, on pourrait copier les lois purement cinématiques de la relativité restreinte pour les coller sur la gravitation. Mais est-ce vrai ?

Nous pensons que l'approche de Newton ne doit pas être jetée aux orties, en raison non seulement de la grande efficacité de sa théorie, mais aussi du fait qu'elle est beaucoup plus facile à intégrer dans la physique quantique. Nous partirons donc des idées simples qui viennent d'être présentées.

Faut-il en conclure que nous rejetons l'idée de courbure de l'espace-temps ? Certainement non ! On comprendra pourquoi dans le document "Gravitation et critère de Schild".

Mais une approche basée sur la notion de force et une approche basée sur la courbure sont-elles compatibles ? En ménageant la chèvre et le chou, n'allons-nous pas droit à la catastrophe ?

Il se trouve que non, et l'explication sera donnée dans le document sur les Métriques (section sur les géodésiques en coordonnées localement cartésiennes, Cas particuliers). On verra qu'une condition nécessaire pour que le rapprochement soit possible est de raisonner sur les pseudo-accélérations $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$, et non sur les accélérations classiques : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; mais, compte-tenu de ce que nous venons de dire, c'est une substitution qui va déjà de soi, car elle découle de la relativité restreinte.

Attention : lorsque nous parlons de force gravitationnelle, nous ne voulons pas dire qu'il existe nécessairement une force, au sens newtonien, s'exerçant directement, par exemple, entre le Soleil et la Terre ; une force peut agir, pourquoi pas, par le biais d'une courbure l'espace-temps. Nous laissons pour le moment la question en suspens. Nous voulons seulement dire que la notion d'énergie-impulsion doit être placée au centre du problème de la gravitation.

En misant tout sur la courbure, Einstein a marginalisé la force comme l'énergie (et, bien sûr, le potentiel). Cette conclusion nous semble un peu trop hâtive : en physique moderne (surtout quantique), les notions d'énergie et de force sont essentielles. On comprendra mieux le fonctionnement de la gravitation si on porte un peu d'attention à sa parenté avec d'autres phénomènes basés sur les forces.

Même en relativité générale, Einstein a été amené à réintroduire l'énergie qu'il avait évacuée, puisque les ondes gravitationnelles sont censées véhiculer de l'énergie. Mais, dans cette théorie, la conservation de l'énergie reste un problème épineux.

Dans la section sur l'allégorie de l'ascenseur, nous avons vu que la relativité restreinte nous impose de remplacer la notion classique d'accélération ($\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$) par celle de pseudo-accélération ($\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{w}}{dt}$). C'est elle que nous utiliserons par la suite. Nous basons donc notre approche sur la notion de rapidité. Mais nous avons vu dans le document sur les vitesses en relativité restreinte (section "de l'espace des rapidités à l'espace des impulsions") comment on peut passer de la pseudo-accélération $\frac{d\vec{w}}{dt}$ à la force $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Nous allons mettre la rapidité, et donc la pseudo-accélération, au centre des calculs ; mais en fait, derrière la pseudo-accélération, c'est la force qui se cache, et qui va être le pivot de l'interprétation physique.

Nous serons amenés à approfondir ce sujet dans le document sur les métriques.

17 Gravitation et transferts d'énergie-impulsion

Imaginons deux astéroïdes gravitant sur des orbites elliptiques dans le champ gravitationnel du Soleil. Chacun d'eux suit une géodésique, caractérisée, entre autres, par son énergie et son moment cinétique. Supposons qu'ils entrent en collision directe, mais ne soient pas brisés par le choc. Nous supposons que le choc est élastique, c'est-à-dire qu'il y a échange d'énergie-impulsion entre les deux mobiles, avec conservation de l'énergie-impulsion totale (quadrivectorielle). Ils vont alors poursuivre leur route, sur deux orbites modifiées : la vitesse, l'énergie orbitale, le moment cinétique, l'aphélie et le périhélie de chacun d'eux ont été modifiés.

Mais au fait, que cache la formule "collision directe" ? Si on réfléchit à sa signification, à l'échelle microscopique, on se rend compte qu'elle recouvre un ensemble d'échanges d'énergie, principalement d'origine électromagnétique, qu'on n'a pas souhaité analyser, et dont on n'a retenu que la résultante. En réalité, la collision directe n'existe pas ; ce n'est qu'un échange à faible distance. A l'échelle des particules élémentaires, nous devons remplacer la notion de choc par celle d'interaction, dont la probabilité est liée à une grandeur fictive appelée section efficace. Si les orbites des deux astéroïdes sont modifiées, leur énergie orbitale est modifiée, et, dans le bilan énergétique, il faut tenir compte à la fois de l'énergie orbitale (gravitationnelle) et de l'énergie du choc (surtout électromagnétique). Or, jusqu'à preuve du contraire, toutes les formes d'énergie sont, fondamentalement, de même nature, et peuvent se convertir les unes dans les autres, avec conservation du bilan global. Et l'outil privilégié pour traiter ces problèmes est la notion de force.

Considérons maintenant une sonde spatiale envoyée dans l'espace à partir d'une base située sur Terre, cette sonde étant destinée à explorer les confins du système solaire. Elle va être placée d'abord sur une orbite elliptique autour du Soleil (le Soleil occupant l'un des foyers de l'ellipse). L'énergie qui lui est fournie au lancement est calculée de telle sorte que l'aphélie se situe dans le voisinage de Jupiter. De plus, la date de lancement est choisie de telle sorte que la sonde arrive à l'aphélie précisément au moment où Jupiter croise dans les parages. Si la configuration a été convenablement choisie, la sonde va bénéficier de l'"entraînement" (ou du "sillage") de Jupiter, qui va la propulser sur une orbite parabolique, ou tout au moins sur une orbite elliptique ayant un aphélie bien plus éloigné du Soleil. Cette technique, basée sur l'"effet catapulte", a été utilisée plusieurs fois avec succès. L'énergie orbitale correspondant à une orbite parabolique est bien supérieure à l'énergie orbitale correspondant à une orbite elliptique dont l'aphélie se situe à la distance de Jupiter. On calcule donc la quantité de carburant nécessaire pour envoyer la sonde sur cette orbite elliptique, et c'est l'attraction de Jupiter qui fournit le complément d'énergie nécessaire pour la transférer sur l'orbite parabolique. Ce complément est prélevé sur l'énergie orbitale de Jupiter. On voit donc que la gravitation permet des transferts d'énergie, qu'on peut évaluer, de manière très concrète, en quantité

de carburant (donc d'énergie chimique).

Nous voyons donc que la gravitation est un processus dans lequel il y a une redistribution de l'énergie-impulsion. C'est donc une force, dans le sens très général que nous avons donné à ce mot.

Mais réfléchissons un peu à cet effet catapulte. Il peut en théorie se traiter en termes de géodésiques, mais en pratique c'est très difficile, car les quatre corps (Soleil, Terre, Jupiter, sonde) sont en mouvement, donc les orbites se modifient continuellement : pour calculer la géodésique suivie par la sonde, il faut connaître les géodésiques suivies par le Soleil, la Terre et Jupiter, et réciproquement ; chacune d'elles est dépendante des autres, de sorte qu'on ne peut pas les calculer séparément. Mathématiquement, les quatre géodésiques sont interdépendantes, et le seul calcul possible est global. Le problème peut aussi être abordé à l'aide de la notion de force (au sens newtonien), mais il n'a pas de solution mathématique exacte, et on est conduit à travailler par approximations successives. On utilise alors la théorie des perturbations. La géodésique apparaît alors comme une vue de l'esprit, un idéal vers lequel on peut tendre sans jamais l'atteindre. Pour nous humains, le calcul d'une géodésique n'est envisageable que dans des situations idéalement simples, comme dans le modèle du système solaire, où on décrète que le champ du Soleil est le seul qui mérite d'être pris en compte. Dans ce cas particulier, le champ est statique ; mais si le champ est produit par plusieurs corps en mouvement, il n'existe aucun repère dans lequel il puisse être considéré comme statique.

Dans le document sur les métriques (plus particulièrement : "Géodésiques en coordonnées localement cartésiennes", "Cas particuliers"), nous verrons que, si $\frac{\partial \Phi}{\partial t_{loc}} \neq 0$, alors $\frac{\partial E}{\partial t_{loc}} \neq 0$. Ceci signifie que, lorsque la sonde traverse un secteur de l'espace où le potentiel n'est pas constant dans le temps (donc variable en fonction du temps, non pas du point de vue subjectif de la sonde, mais du point de vue objectif d'un observateur local gravitationnellement immobile), son énergie va varier lorsqu'elle parcourt sa géodésique ! Ce phénomène est parfaitement prévu par les équations des géodésiques basées sur la courbure de l'espace-temps ; mais, en même temps, on ne peut pas s'empêcher de se poser cette question : comment l'énergie a-t-elle "sauté" d'un mobile (ou d'un système) à l'autre ? Effectivement, la mécanique quantique nous a habitués à des transferts d'énergie quantifiés, gérés par des particules-vecteurs. On se pose donc cette question : existe-t-il des échanges d'énergie gravitationnelle quantifiés, analogues aux échanges d'énergie électromagnétique ? D'autre part, un mobile circulant dans une région de l'espace où $\frac{\partial \Phi}{\partial t_{loc}} > 0$ va-t-il réellement absorber de l'énergie, ou bien est-ce une illusion ? Nous considérons que ce n'est pas une illusion, et qu'il y a des transferts réels d'énergie-impulsion ; ces échanges sont vraisemblablement quantifiés, mais ceci reste à prouver. Faut-il imaginer une particule (le "graviton") transportant cette énergie d'un point à un autre, à la vitesse de la lumière, à la manière du photon ? Rappelons ce que nous avons

dit du photon : pour nous, il ne possède pas d'énergie propre ; nous le considérons seulement comme une "personnification" (commode, mais inexacte) d'un échange obéissant au principe de l'immédiateté.

18 Effet Nordtvedt

Vous ne connaissez pas l'effet Nordtvedt ? Pas d'affolement : cet effet n'existe pas ! Il a été imaginé par le physicien Nordtvedt pour analyser la contribution de l'énergie gravitationnelle propre d'un corps dans sa masse (inerte ou pesante).

Le test se fait par l'analyse fine de la distance Terre-Lune.

Nous avons vu que, pour un observateur distant, la masse d'une particule, intervenant dans tout problème de mécanique, est : $m_{dist} = m_0 \, ch \frac{w}{c} \, e^{\frac{\Phi}{c^2}}$, puisque c'est elle qui permet d'évaluer l'énergie d'un mobile : $E_{dist} = m_{dist} \, c^2$. Nous la noterons simplement m .

On pourra utiliser l'approximation suivante :

$$m \approx m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) \approx m_0 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \cdot m_0 + \frac{\Phi}{c^2} \cdot m_0 \text{ (avec } \Phi < 0 \text{)}.$$

Si $v \ll c$: $m \approx m_0 + \frac{\Phi}{c^2} \cdot m_0$, avec $\frac{\Phi}{c^2} \cdot m_0 < 0$.

L'énergie gravitationnelle (négative) de cette particule est :

$$E_g = (m - m_0)c^2 \approx \Phi \cdot m_0.$$

Dans le cas d'un corps non ponctuel (que nous supposerons immobile), E_g est l'énergie de liaison gravitationnelle (négative) des différentes particules qui le composent.

Le calcul de E_g n'a pas une importance essentielle ici, mais nous le proposons quand même, car il permet de bien comprendre cette notion d'énergie gravitationnelle propre. Imaginons la formation d'une planète par accréation de particules. Appelons M_0 la somme des masses au repos des particules accrétées (masse ne prenant pas en compte la perte d'énergie due aux liaisons gravitationnelles), et M la masse définitive de la planète, incluant l'énergie gravitationnelle ($M < M_0$, puisque $E_g < 0$). Nous supposons que toutes les particules perdent leur énergie cinétique au cours de l'accréation. Nous appelons R le rayon définitif de la planète, et ρ sa densité (supposée uniforme). Reconstituons, pas à pas, la formation de la planète, par accréation de particules de masse dm_0 : la masse m augmente chaque fois d'une quantité dm , inférieure à dm_0 , en raison de l'énergie gravitationnelle libérée : $\frac{Gm dm_0}{r}$ (ou $\frac{Gm_0 dm_0}{r}$, car $m_0 \approx m$). Le rayon r va croître de 0 à R , la masse m_0 de 0 à M_0 , la masse totale m de 0 à M .

$$dm \approx dm_0 \left(1 - \frac{Gm}{rc^2}\right) \approx dm_0 \left(1 - \frac{Gm_0}{rc^2}\right) \approx 4\pi r^2 \rho dr \left(1 - \frac{G}{rc^2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho\right) ;$$

$$dm \approx 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho \cdot \frac{G}{rc^2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho dr \approx 4\pi \rho d \left(\frac{r^3}{3} \right) - \frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 \frac{G}{c^2} r^4 dr ;$$

$$dm \approx 4\pi \rho d \left(\frac{r^3}{3} \right) - \frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 \frac{G}{c^2} d \left(\frac{r^5}{5} \right) ;$$

...d'où, en intégrant :

$$M \approx \frac{4}{3} \pi R^3 \rho - \frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 \frac{G}{c^2} \frac{R^5}{5} \approx M_0 - \frac{3}{5} \cdot \frac{G}{Rc^2} \cdot \left(\frac{16}{9} \pi^2 \rho^2 R^6 \right) \approx M_0 - \frac{3}{5} \cdot \frac{G}{Rc^2} \cdot M_0^2 ;$$

$$M \approx M_0 - \frac{3}{5} \cdot \frac{GM_0^2}{Rc^2}.$$

$$\text{On a donc : } E_g \approx -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM_0^2}{R} \approx -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R}.$$

$$\frac{M}{M_0} \approx 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{GM_0}{Rc^2} \approx 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{GM}{Rc^2}.$$

Pour la Terre : $M \approx 5,97.10^{24} \text{ kg}$, $R \approx 6\,370\,000 \text{ m}$, donc $\frac{3}{5} \cdot \frac{GM}{Rc^2} \approx 4,6.10^{-10}$,
donc $\left(\frac{M}{M_0} \right)_{Terre} \approx 1 - 4,6.10^{-10}$;

pour la Lune : $M \approx 7,35.10^{22} \text{ kg}$, $R \approx 1\,736\,000 \text{ m}$, donc $\frac{3}{5} \cdot \frac{GM}{Rc^2} \approx 2.10^{-11}$,
donc $\left(\frac{M}{M_0} \right)_{Lune} \approx 1 - 2.10^{-11}$.

La différence entre ces deux quotients $\left(\frac{M}{M_0} \right)_{Terre}$ et $\left(\frac{M}{M_0} \right)_{Lune}$ est de l'ordre de $4,4.10^{-10}$.

Considérons maintenant un corps céleste (par exemple une planète) de masse pesante M_p et de masse inerte M_i . Selon la théorie de Newton, la force exercée par le Soleil sur ce corps est proportionnelle à M_p , et l'accélération qui en résulte est donc proportionnelle à $\frac{M_p}{M_i}$. L'idée de Nordtvedt est que, si la Terre et la Lune ne possèdent pas le même rapport $\frac{M_p}{M_i}$, alors elles ne répondront pas de la même façon à l'attraction du Soleil, comme si elles subissaient des accélérations légèrement différentes. C'est cette différence de comportement qui devrait, selon Nordtvedt, entraîner une modification de la forme de l'orbite de la Lune autour de la Terre. Cette déformation de l'orbite a pu être calculée avec précision.

L'intérêt de la Lune, dans le cas présent, est que sa distance par rapport à la Terre (et donc la forme exacte de son orbite) sont mesurables, en utilisant des radars (situés sur Terre) et des miroirs, placés à la surface de la Lune par les missions Apollo, avec une précision de l'ordre de 2 cm sur une distance de $385\,000 \text{ km}$ (soit une précision relative de l'ordre de 5.10^{-11}).

Les mesures effectuées n'ont détecté aucune modification de l'orbite de la Lune, et n'ont donc pas confirmé le calcul de Nordtvedt ; on en conclut que le quotient $\frac{M_p}{M_i}$ est le même pour les deux astres, avec une très bonne précision.

Mais quel rapport y a-t-il entre les masses M_p et M_i (masse pesante et masse inerte) d'une part, M et M_0 (masses incluant, et n'incluant pas, l'énergie gravitationnelle) d'autre part ? C'est simple : si la masse pesante s'identifiait à M_0 et la masse inerte à M (ou l'inverse!), alors les quotients $\left(\frac{M}{M_0}\right)_{Terre}$ et $\left(\frac{M}{M_0}\right)_{Lune}$ ne seraient pas égaux, et la précision des mesures aurait permis de s'en rendre compte, ce qui n'est pas le cas. On en déduit que les masses pesante et inerte sont toutes les deux égales à M , ou toutes les deux égales à M_0 .

Dans l'approche de la gravitation relativiste que nous allons présenter, la masse pesante et la masse inerte sont toutes les deux égales à M . En effet, comme on le verra, lorsqu'une particule se déplace sur une géodésique, sa masse $m = m_{dist} = m_0.ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ ne varie pas, son énergie totale étant constante; le produit $ch\frac{w}{c}.e^{\frac{\Phi}{c^2}}$ est constant, donc quand l'énergie cinétique augmente, l'énergie potentielle (gravitationnelle) diminue, et réciproquement. Ce phénomène de balance nous impose d'attribuer un statut équivalent à ces deux formes d'énergie.

Imaginons un système double formé de deux étoiles gravitant autour de leur centre de gravité sur des orbites elliptiques. Lorsque les étoiles se rapprochent, l'énergie cinétique augmente et l'énergie potentielle (gravitationnelle) diminue. Le coefficient de liaison $ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}}$ est constant (voir document sur les systèmes doubles). Ce coefficient caractérise (à une constante près) l'"énergie orbitale" du système, synthèse de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Nous serons amenés à proposer une formule empirique donnant la masse totale du système :

$$m = \sqrt{m_1^2 + 2.m_1.m_2.ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}} + m_2^2}.$$

La conservation de cette masse totale suppose que $ch\frac{w}{c}.e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}} = c^{te}$; les rôles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (ou gravitationnelle) sont étroitement imbriqués, indissociables.

Imaginons maintenant la formation d'une planète par accrétion. Chaque fois qu'une nouvelle particule est capturée et tombe sur la planète, elle commence par gagner de l'énergie cinétique tout en perdant de l'énergie potentielle, jusqu'à la chute finale. C'est à ce moment que l'équilibre est rompu : l'énergie cinétique de la particule est nécessairement évacuée, d'une manière ou d'une autre, par exemple sous forme de chaleur, puis de rayonnement (du moins pour des corps froids comme la Terre et la Lune), mais l'énergie potentielle ainsi perdue n'est pas récupérée. C'est lorsque la chaleur due à l'impact est rayonnée qu'il y a une perte d'énergie (donc de masse).

Encore une précision : quelle est la masse au repos de la planète ? Rappelons que M_0 est la somme des masses au repos des particules qui la composent. Mais

la masse au repos d'un corps n'est pas égale à la somme des masses au repos de ses composants! (Voir les explications partielles dans le document sur les vitesses en Relativité restreinte, reprises et complétées dans le document sur le champ d'entraînement, section sur la masse en relativité restreinte). Elle dépend de la rapidité relative de ces composants (donc de l'énergie cinétique de l'ensemble), mais aussi de leur énergie potentielle (puisque l'énergie cinétique peut se transformer en énergie potentielle, et réciproquement). Il en résulte que la quantité M_0 , que nous avons fait intervenir dans notre calcul, n'a pas véritablement une signification physique : la masse au repos de la planète (pour un observateur distant) est égale à M , et non à M_0 . Il n'existe en fait qu'une sorte de masse : $M_p = M_i = M$, qu'on peut appeler, au choix, masse pesante, masse inerte ou masse au repos.

Les idées de Nordvedt, et les mesures qui ont été effectuées pour les tester, tendent à prouver que la masse pesante et la masse inerte peuvent être identifiées. Nous savons, grâce à la relativité restreinte, que la masse équivaut à de l'énergie. L'énergie cinétique contribue à la masse : on le savait déjà. Nous voyons que l'énergie gravitationnelle doit, logiquement, y contribuer de la même façon, comme toutes les autres formes d'énergie. Ceci n'a rien d'étonnant, si on considère que l'énergie gravitationnelle est une vraie énergie, provenant, comme toute énergie, d'une vraie force (puisque l'énergie est définie comme le travail d'une force). Ceci est un argument pour considérer la gravitation comme une force à part entière, et pas seulement comme "une courbure".

L'étude de l'effet Nordtvedt, en lui-même, prouve seulement que l'énergie gravitationnelle, si elle existe, doit intervenir de la même façon dans la masse inerte que dans la masse pesante. Mais une réflexion plus poussée sur la notion de masse conduit à penser que c'est une énergie comme les autres, susceptible d'être transformée ou échangée, et concernée, évidemment, par l'équivalence masse/énergie : $E = m.c^2$.