

Etude du système solaire en métrique de Ni

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, mars 2008)

Table des matières

1 Avertissement	1
2 Résumé	3
3 Etude du système solaire : les bases	3
4 Le formalisme post-newtonien paramétrisé	3
5 Aphélie et périhélie	4
6 Orbites circulaires	10
7 Vitesse de libération	14
8 Orbites elliptiques et lois de Kepler	19
9 Orbites paraboliques	24
10 Orbites hyperboliques	24
11 Précession du périhélie	25
12 Déflexion de la lumière	26
13 Effet Shapiro	30
14 La "création d'espace"	35

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

- 01) Gravitation relativiste : introduction
 - Relativité restreinte :
- 02) Les vitesses en Relativité restreinte
 - Physique quantique :
- 03) Physique quantique : généralités
- 04) Physique quantique : l'aventure collective
 - Gravitation :
- 05) La relativité générale a-t-elle été prise en défaut ?
- 06) Gravitation relativiste : principes fondamentaux
- 07) Gravitation et critère de Schild
- 08) L'hypothèse du champ d'entraînement
- 09) Métriques et géodésiques
- 10) Tenseur de Ricci
- 11) Potentiel gravitationnel
- 12) Ni ou Schwarzschild ?
- 13) Gravitation et vide quantique
- 14) L'hypothèse du flux à double sens
- 15) Etude du système solaire en métrique de Ni
- 16) Etude des systèmes binaires en métrique de Ni
- 17) Sur la matière noire
- 18) Trous noirs et trous gris
- 19) Ondes gravitationnelles
- 20) Gravitation et cosmologie

2 Résumé

Il s'agit ici de vérifier que le modèle du système solaire basé sur la métrique de Ni passe bien les grands tests classiques, et conduit aux mêmes conclusions que la relativité générale.

3 Etude du système solaire : les bases

A partir d'ici, nous allons étudier longuement le mouvement d'une particule test dans le champ gravitationnel d'une masse ponctuelle (ou, si on préfère, le mouvement d'une planète autour du Soleil) ; pour cela, nous utiliserons les équations obtenues précédemment (dans le document : [Gravitation relativiste](#)), en coordonnées polaires.

Les trajectoires sont définies par les trois équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) ds^2 = c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 - e^{\frac{2k}{r}} r^2 d\theta^2 \text{ (équation de la métrique)} ; \\ 2) \bar{E} = \frac{E}{m_0 c^2} = e^{-\frac{2k}{r}} \frac{dt}{ds} = e^{-\frac{k}{r}} ch \frac{w}{c} = c^{te} \text{ (conservation de E)} ; \\ 3) \bar{\mu} = \frac{\mu}{m_0 c} = \frac{r \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{m_0 c} = e^{\frac{2k}{r}} r^2 \frac{d\theta}{ds} = e^{\frac{k}{r}} r sh \frac{w}{c} \sin \alpha = c^{te} \text{ (conservation de } \mu \text{)}. \end{array} \right.$$

Comme précédemment, α désigne l'angle (\vec{u}, \vec{v}) formé par le rayon vecteur \vec{u} et la vitesse \vec{v} .

Toutes les quantités sont évaluées par l'observateur distant (E, μ, r , etc.), sauf la vitesse v et la rapidité w , qui sont évaluées par l'observateur local.

4 Le formalisme post-newtonien paramétrisé

Les théories de la gravitation relativiste peuvent être étudiées et classées selon les méthodes du "formalisme post-newtonien paramétrisé", qui attribue à chaque théorie des coefficients α, β, γ , etc.

La métrique de Ni, que nous allons utiliser, peut s'écrire : $ds^2 = c^2 e^{\frac{2\Phi}{c^2}} dt^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} dr^2 - e^{-\frac{2\Phi}{c^2}} r^2 d\theta^2$ (avec $\Phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{kc^2}{r}$), ou encore, en remplaçant c par 1 (selon l'usage des physiciens relativistes) :

$$ds^2 = e^{2\Phi} dt^2 - e^{-2\Phi} dr^2 - e^{-2\Phi} r^2 d\theta^2.$$

En développant en série les coefficients de la métrique, on obtient :

$$e^{2\Phi} = 1 + 2\Phi + 2\Phi^2 + \dots$$

$$-e^{-2\Phi} = -1 + 2\Phi - 2\Phi^2 + \dots$$

Ceci permet de calculer facilement les trois premiers coefficients post-newtoniens α , β , γ , car, d'après le formalisme post-newtonien paramétrisé, le premier développement en série est égal à :

$$1 + 2\alpha\Phi + 2\beta\Phi^2 + \dots$$

et le second à :

$$-1 + 2\gamma\Phi + \dots$$

La comparaison montre que notre métrique correspond à $\alpha = \beta = \gamma = 1$, ce qui est une condition nécessaire (mais peut-être pas suffisante) pour qu'une théorie de la gravitation soit viable, compte-tenu de l'ensemble des mesures effectuées à ce jour dans le système solaire. Dans la suite de ce travail, le but premier sera de montrer que notre métrique permet de retrouver les résultats essentiels de la gravitation newtonienne et de la relativité générale ; mais nous savons d'avance qu'elle va passer avec succès les principaux tests classiques.

5 Aphélie et périhélie

Lorsqu'une planète tourne autour du Soleil, elle s'éloigne et se rapproche de celui-ci, alternativement. La distance r passe par un maximum (à l'aphélie, ou à l'apoastre, s'il s'agit d'un astre autre que le Soleil) et par un minimum (au périhélie, ou périastre) où la dérivée $\frac{dr}{dt}$ s'annule. Nous allons rechercher ces deux valeurs de r : r_1 et r_2 . En ces deux points, le vecteur vitesse, tangent à la trajectoire, est perpendiculaire au rayon vecteur reliant le Soleil à la planète ; on pourra donc remplacer $\sin\alpha$ par 1 dans les formules précédentes.

Dans l'équation de la métrique, divisons les deux membres par ds^2 ; il vient :

$$1 = c^2 e^{-\frac{2k}{r}} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2.$$

Nous avons vu que $\bar{E} = e^{-\frac{2k}{r}} \frac{cdt}{ds}$ et $\bar{\mu} = r^2 e^{\frac{2k}{r}} \frac{d\theta}{ds}$; pour étudier l'orbite d'une planète, il est intéressant de substituer $\bar{E} e^{\frac{2k}{r}}$ à $\frac{cdt}{ds}$ et $\frac{\bar{\mu}}{r^2} e^{-\frac{2k}{r}}$ à $\frac{d\theta}{ds}$. Nous obtenons :

$$1 = e^{-\frac{2k}{r}} \left(\bar{E} e^{\frac{2k}{r}} \right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} r^2 \left(\frac{\bar{\mu}}{r^2} e^{-\frac{2k}{r}} \right)^2 ;$$

$$1 = e^{\frac{2k}{r}} \bar{E}^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - e^{-\frac{2k}{r}} \frac{\bar{\mu}^2}{r^2}.$$

Remplaçons ds par $\frac{r^2 e^{\frac{2k}{r}} d\theta}{\bar{\mu}}$; il vient :

$$1 = e^{\frac{2k}{r}} \bar{E}^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{\frac{r^2 e^{\frac{2k}{r}} d\theta}{\bar{\mu}}} \right)^2 - e^{-\frac{2k}{r}} \frac{\bar{\mu}^2}{r^2} ;$$

$$1 = e^{\frac{2k}{r}} \bar{E}^2 - e^{-\frac{2k}{r}} \bar{\mu}^2 \left(\frac{dr}{r^2 d\theta} \right)^2 - e^{-\frac{2k}{r}} \frac{\bar{\mu}^2}{r^2} .$$

Posons : $u = \frac{1}{r}$ (donc $du = -\frac{dr}{r^2}$) ; notre équation devient :

$$1 = e^{2ku} \bar{E}^2 - e^{-2ku} \bar{\mu}^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 - e^{-2ku} \bar{\mu}^2 u^2 .$$

Cette équation nous sera très utile par la suite ; mais dans l'immédiat, notre but est d'étudier l'aphélie et le périhélie de l'orbite (s'il s'agit d'une planète tournant autour du Soleil), ou l'apoastre et le périastre (dans le cas général).

Si une planète tourne autour du Soleil sur une orbite elliptique (avec ou sans précession), la distance r passe alternativement par un maximum r_1 (à l'aphélie) et par un minimum r_2 (au périhélie). Ces deux points de l'orbite sont caractérisés par le fait que $\frac{du}{d\theta} = 0$; donc, pour $u = u_1 = \frac{1}{r_1}$ et $u = u_2 = \frac{1}{r_2}$, on a : $1 = e^{2ku} \bar{E}^2 - e^{-2ku} \bar{\mu}^2 u^2$, donc $\bar{E}^2 = e^{-4ku} \bar{\mu}^2 u^2 + e^{-2ku}$.

D'où on tire : $e^{-4ku_1} \bar{\mu}^2 u_1^2 + e^{-2ku_1} = e^{-4ku_2} \bar{\mu}^2 u_2^2 + e^{-2ku_2}$; ce qui permet d'exprimer $\bar{\mu}^2$ (puis \bar{E}^2) en fonction de u_1 et u_2 :

$$\bar{\mu}^2 = \frac{e^{-2ku_2} - e^{-2ku_1}}{u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}} .$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{4k(u_1+u_2)}$, on obtient :

$$\bar{\mu}^2 = \frac{e^{2k(u_1+u_2)} \cdot (e^{2ku_1} - e^{2ku_2})}{u_1^2 e^{4ku_2} - u_2^2 e^{4ku_1}} ;$$

$$\bar{\mu}^2 = \frac{e^{2k(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})} \cdot \left(e^{\frac{2k}{r_1}} - e^{\frac{2k}{r_2}} \right)}{\frac{1}{r_1^2} e^{\frac{4k}{r_2}} - \frac{1}{r_2^2} e^{\frac{4k}{r_1}}} ;$$

$$\bar{\mu}^2 = r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot e^{2k(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})} \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} - e^{\frac{2k}{r_2}}}{r_2^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_1}}} .$$

On en déduit l'expression de l'énergie :

$$\overline{E}^2 = e^{-4ku_1} \overline{\mu}^2 u_1^2 + e^{-2ku_1} = e^{-4ku_1} \frac{e^{-2ku_2} - e^{-2ku_1}}{u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}} u_1^2 + e^{-2ku_1} ;$$

$$\overline{E}^2 = \frac{u_1^2 e^{-2k(2u_1+u_2)} - u_1^2 e^{-6ku_1} + u_1^2 e^{-6ku_1} - u_2^2 e^{-2k(u_1+2u_2)}}{u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}} ;$$

$$\overline{E}^2 = e^{-2k(u_1+u_2)} \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{4k(u_1+u_2)}$, on obtient :

$$\overline{E}^2 = \frac{u_1^2 e^{2ku_2} - u_2^2 e^{2ku_1}}{u_1^2 e^{4k.u_2} - u_2^2 e^{4k.u_1}} ;$$

$$\overline{E}^2 = \frac{\frac{1}{r_1^2} e^{\frac{2k}{r_2}} - \frac{1}{r_2^2} e^{\frac{2k}{r_1}}}{\frac{1}{r_1^2} e^{\frac{4k}{r_2}} - \frac{1}{r_2^2} e^{\frac{4k}{r_1}}} ;$$

$$\overline{E}^2 = \frac{r_2^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}}}{r_2^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_1}}}.$$

Nous pouvons calculer v_1 et v_2 (vitesse de la planète à l'aphélie et au périhélie) en fonction de r_1 et r_2 .

Puisque $\overline{E} = e^{-\frac{k}{r}} ch \frac{w}{c}$, on aura :

$$ch \frac{w_1}{c} = \overline{E} \cdot e^{\frac{k}{r_1}}.$$

Puisque $\overline{\mu} = e^{\frac{k}{r}} r sh \frac{w}{c}$, on aura :

$$sh \frac{w_1}{c} = \frac{\overline{\mu}}{r_1} \cdot e^{-\frac{k}{r_1}}.$$

Chacune de ces égalités est suffisante pour tirer v_1 ; on peut aussi les combiner ainsi :

$$\frac{v_1}{c} = th \frac{w_1}{c} = \frac{sh \frac{w_1}{c}}{ch \frac{w_1}{c}} = \frac{\overline{\mu}}{r_1 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot \overline{E}} ;$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{1}{r_1^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_1}}} \cdot \frac{\overline{\mu}^2}{\overline{E}^2} = \frac{1}{r_1^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_1}}} \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot e^{2k(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})} \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} - e^{\frac{2k}{r_2}}}{r_2^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_1}}} \cdot \frac{r_2^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_1}}}{r_2^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}}} ;$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{r_2^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}}}{e^{\frac{2k}{r_1}}} \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} - e^{\frac{2k}{r_2}}}{r_2^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}}}.$$

De même :

$$\frac{v_2^2}{c^2} = \frac{r_1^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}}}{e^{\frac{2k}{r_2}}} \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} - e^{\frac{2k}{r_2}}}{r_2^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}}}.$$

On peut se demander si ces formules donnent toujours des valeurs positives pour les carrés $\bar{\mu}^2$, \bar{E}^2 , v_1^2 et v_2^2 . On peut montrer que c'est bien le cas, à condition que r_1 et r_2 soient supérieurs au rayon de Schwarzschild : $r_s = 2.k$. Effectivement, les fonctions qui interviennent dans ces calculs, à savoir : $f_1(r) = e^{\frac{k}{r}}$, $f_2(r) = r \cdot e^{\frac{k}{r}}$ et $f_3(r) = r \cdot e^{\frac{2k}{r}}$ sont toutes monotones pour $r > 2.k$ (la première décroissante, les deux autres croissantes), ce qui facilite la démonstration. Si on a : $2.k < r_1 < r_2$, alors on peut montrer que : $e^{\frac{2k}{r_1}} - e^{\frac{2k}{r_2}} > 0$, $r_2^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} > 0$ et $r_2^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_2}} - r_1^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_1}} > 0$. Nous dirons que le domaine de validité de ces formules est l'extérieur de la sphère de Schwarzschild.

En divisant membre à membre les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{v_2^2} &= \frac{r_2^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_2}}}{r_1^2 \cdot e^{\frac{4k}{r_1}}}; \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{r_2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}}}{r_1 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}}}; \\ v_1 \cdot r_1 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} &= v_2 \cdot r_2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}}. \end{aligned}$$

On aurait pu obtenir ce résultat d'une autre façon, à partir de formules plus élémentaires :

$$\begin{aligned} \bar{E} &= ch \frac{w_1}{c} \cdot e^{-\frac{k}{r_1}} = ch \frac{w_2}{c} \cdot e^{-\frac{k}{r_2}}; \\ \bar{\mu} &= r_1 \cdot sh \frac{w_1}{c} \cdot e^{\frac{k}{r_1}} \cdot \sin \alpha = r_2 \cdot sh \frac{w_2}{c} \cdot e^{\frac{k}{r_2}} \cdot \sin \alpha; \\ \frac{\bar{\mu}}{\bar{E}} &= \frac{v_1}{c} \cdot r_1 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot \sin \alpha = \frac{v_2}{c} \cdot r_2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot \sin \alpha; \\ v_1 \cdot r_1 \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} &= v_2 \cdot r_2 \cdot e^{\frac{2k}{r_2}}. \end{aligned}$$

Remarquons d'ailleurs que $\sin \alpha = 1$ au périhélie et à l'aphélie.

Les formules que nous avons obtenues permettent de calculer facilement $\bar{\mu}^2$ et \bar{E}^2 en fonction de r_1 et r_2 , qui correspondent à l'aphélie et au périhélie; elles ne sont donc applicables que pour une trajectoire périodique dans laquelle r est compris entre deux valeurs extrêmes; mais elles sont plus difficiles à appliquer dans le sens inverse (calcul de r_1 et r_2 connaissant \bar{E} et $\bar{\mu}$).

Il peut être utile de calculer des valeurs approchées de r_1 et r_2 en fonction de \bar{E} et $\bar{\mu}$; commençons par remplacer les expressions de $\bar{\mu}^2$ et \bar{E}^2 par leurs développements limités d'ordre un en k (approximation acceptable si k est très petit par rapport à r_1 et r_2).

$$\bar{\mu}^2 \approx \frac{(1 + 2ku_1) - (1 + 2ku_2)}{u_1^2[1 + 2k(u_2 - u_1)] - u_2^2[1 + 2k(u_1 - u_2)]} ;$$

$$\bar{\mu}^2 \approx \frac{2k(u_1 - u_2)}{u_1^2 - u_2^2} \approx \frac{2k}{u_1 + u_2} \approx \frac{2kr_1r_2}{r_1 + r_2}.$$

$$\bar{E}^2 \approx \frac{u_1^2(1 - 2ku_1) - u_2^2(1 - 2ku_2)}{u_1^2[1 + 2k(u_2 - u_1)] - u_2^2[1 + 2k(u_1 - u_2)]} ;$$

$$\bar{E}^2 \approx \frac{(u_1^2 - u_2^2) - 2k(u_1^3 - u_2^3)}{(u_1^2 - u_2^2) - 2k(u_1^2 + u_2^2)(u_1 - u_2)} ;$$

$$\bar{E}^2 \approx \frac{(u_1 + u_2) - 2k(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2)}{(u_1 + u_2) - 2k(u_1^2 + u_2^2)} ;$$

$$\bar{E}^2 \approx \frac{1 - 2k \frac{u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2}{u_1 + u_2}}{1 - 2k \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_1 + u_2}} ;$$

$$\bar{E}^2 \approx \left[1 - 2k \frac{u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2}{u_1 + u_2} \right] \left[1 + 2k \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_1 + u_2} \right] ;$$

$$\bar{E}^2 \approx 1 - 2k \frac{u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2}{u_1 + u_2} + 2k \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_1 + u_2} ;$$

$$\bar{E}^2 \approx 1 - \frac{2ku_1u_2}{u_1 + u_2} \approx 1 - \frac{2k}{r_1 + r_2}.$$

De cette dernière égalité, on tire :

$$r_1 + r_2 \approx \frac{2k}{1 - \bar{E}^2}.$$

D'autre part :

$$r_1 r_2 \approx \frac{\bar{\mu}^2}{2k} (r_1 + r_2) \approx \frac{\bar{\mu}^2}{2k} \frac{2k}{1 - \bar{E}^2} \approx \frac{\bar{\mu}^2}{1 - \bar{E}^2}.$$

Donc r_1 et r_2 sont (en première approximation) les racines de l'équation $(1 - \bar{E}^2)X^2 - 2kX + \bar{\mu}^2 = 0$; ce qui nous donne :

$$r_1 \approx \frac{k + \sqrt{k^2 - \bar{\mu}^2(1 - \bar{E}^2)}}{1 - \bar{E}^2};$$

$$r_2 \approx \frac{k - \sqrt{k^2 - \bar{\mu}^2(1 - \bar{E}^2)}}{1 - \bar{E}^2}.$$

Si on n'est pas satisfait par ces approximations, on peut les améliorer en passant à l'ordre deux, trois, etc... Mais si on veut étudier les trajectoires au voisinage de la sphère de Schwarzschild, il vaut mieux adopter une stratégie différente. En voici un exemple. Repartons une fois de plus des formules :

$$\bar{E} = ch \frac{w}{c} . e^{-\frac{k}{r}};$$

$$\bar{\mu} = r . sh \frac{w}{c} . e^{\frac{k}{r}} . \sin \alpha = r . sh \frac{w}{c} . e^{\frac{k}{r}} \quad (\text{car } \sin \alpha = 1);$$

ce qu'on écrira plutôt :

$$ch \frac{w}{c} = \bar{E} . e^{\frac{k}{r}};$$

$$sh \frac{w}{c} = \frac{\bar{\mu} . e^{-\frac{k}{r}}}{r}.$$

Comme $sh^2 \frac{w}{c} = ch^2 \frac{w}{c} - 1$, on aura :

$$\frac{\bar{\mu}^2 . e^{-\frac{2k}{r}}}{r^2} = \bar{E}^2 . e^{\frac{2k}{r}} - 1.$$

Posons : $F(r) = \frac{\bar{\mu}^2 . e^{-\frac{2k}{r}}}{r^2}$ et $G(r) = \bar{E}^2 . e^{\frac{2k}{r}} - 1$.

Précisons que $ch \frac{w}{c}$ doit être supérieur ou égal à 1, ce qui équivaut à $e^{\frac{2k}{r}} \geq \frac{1}{\bar{E}^2}$, ou $\frac{2k}{r} \geq -2 . \text{Log} \bar{E}$. Si $\bar{E} \geq 1$, cette inégalité est toujours vraie; mais si $\bar{E} < 1$, on obtient la condition $r \leq \frac{k}{|\text{Log} \bar{E}|}$, qui fixe une borne supérieure au rayon r pour une valeur donnée de \bar{E} .

Pour \bar{E} et $\bar{\mu}$ donnés, on peut représenter graphiquement les deux fonctions F et G ; la recherche de l'apoastre et du périaste se ramène à la recherche des points d'intersections des deux courbes. Cette recherche peut se faire de manière graphique ou numérique (avec un ordinateur par exemple).

Dérivons F et G par rapport à r :

$$F'(r) = \bar{\mu}^2 \cdot \frac{r^2 \cdot \frac{2k}{r} \cdot e^{\frac{2k}{r}} - 2r \cdot e^{-\frac{2k}{r}}}{r^4} = \frac{2 \cdot \bar{\mu}^2}{r^4} \cdot (k - r) \cdot e^{-\frac{2k}{r}} ;$$

$$G'(r) = -\bar{E}^2 \cdot \frac{k}{r^2} \cdot e^{\frac{2k}{r}} .$$

La fonction F est croissante pour $r < k$, décroissante pour $r > k$; $F(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$ et $F(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow +\infty$.

La fonction G est toujours décroissante; $G(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow 0$; si $\bar{E} \geq 1$: $G(r) \rightarrow \bar{E} - 1$ quand $r \rightarrow +\infty$; si $\bar{E} < 1$: $G(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \frac{k}{|\text{Log} \bar{E}|}$.

Un cas intéressant est celui où les courbes sont tangentes; au point de contact, on aura à la fois $F(r) = G(r)$ et $F'(r) = G'(r)$. Voyons ce qu'on peut en tirer :

$$\frac{2 \cdot \bar{\mu}^2}{r^4} \cdot (k - r) \cdot e^{-\frac{2k}{r}} = -\bar{E}^2 \cdot \frac{k}{r^2} \cdot e^{\frac{2k}{r}} ;$$

$$\frac{2 \cdot (r - k)}{r^2} \cdot \frac{\bar{\mu}^2 \cdot e^{-\frac{2k}{r}}}{r^2} = \frac{2k}{r^2} \cdot \bar{E}^2 \cdot e^{\frac{2k}{r}} .$$

Remplaçons $\frac{\bar{\mu}^2 \cdot e^{-\frac{2k}{r}}}{r^2}$ par $sh \frac{w}{c}$ et $\bar{E}^2 \cdot e^{\frac{2k}{r}}$ par $ch \frac{w}{c}$:

$$\frac{2 \cdot (r - k)}{r^2} \cdot sh^2 \frac{w}{c} = \frac{2k}{r^2} \cdot ch^2 \frac{w}{c} ;$$

$$\frac{sh^2 \frac{w}{c}}{ch^2 \frac{w}{c}} = \frac{2k}{r^2} \cdot \frac{r^2}{2 \cdot (r - k)} = \frac{k}{r - k} ;$$

$$\frac{v}{c} = \frac{sh \frac{w}{c}}{ch \frac{w}{c}} = \sqrt{\frac{k}{r - k}} .$$

On aura compris que nous venons de calculer la vitesse circulaire; c'est le sujet qui va nous occuper maintenant.

6 Orbites circulaires

Nous allons calculer la vitesse circulaire, c'est-à-dire la vitesse (locale) d'une planète se déplaçant sur une orbite circulaire de rayon r , en utilisant la formule

qui exprime l'énergie réduite en fonction de l'apoastre et du périastre r_1 et r_2 :

$$\overline{E}^2 = \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{2k(u_2-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1-u_2)}} = \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{e^{2k(u_2+u_1)} [u_1^2 e^{-4ku_1} - u_2^2 e^{-4ku_2}]}.$$

Pour étudier le cas de l'orbite circulaire, faisons tendre r_2 vers r_1 , donc u_2 vers u_1 .

$$\text{Posons : } f(x) = x^2 e^{-2kx} \text{ et } g(x) = x^2 e^{-4kx}.$$

$$\text{Quand } u_2 \text{ tend vers } u_1, \overline{E}^2 \text{ tend vers } \frac{f'(u_1)}{e^{4ku_1} g'(u_1)}.$$

$$f'(x) = 2xe^{-2kx} + x^2(-2k)e^{-2kx} = 2x(1 - kx)e^{-2kx} ;$$

$$g'(x) = 2xe^{-4kx} + x^2(-4k)e^{-4kx} = 2x(1 - 2kx)e^{-4kx}.$$

Donc pour une orbite circulaire on a :

$$\overline{E}^2 = \frac{2u(1 - ku)e^{-2ku}}{e^{4ku} 2u(1 - 2ku)e^{-4ku}} = \frac{1 - \frac{k}{r}}{1 - \frac{2k}{r}} e^{-\frac{2k}{r}} = \frac{r - k}{r - 2k} e^{-\frac{2k}{r}}.$$

Comme $\overline{E} = e^{-\frac{2k}{r}} \frac{cdt}{ds}$ et $ch \frac{w}{c} = e^{-\frac{k}{r}} \frac{cdt}{ds}$, il est clair que $\overline{E} = e^{-\frac{k}{r}} ch \frac{w}{c}$;

$$ch^2 \frac{w_c}{c} = e^{\frac{2k}{r}} \overline{E}^2 = \frac{1 - \frac{k}{r}}{1 - \frac{2k}{r}} = \frac{r - k}{r - 2k} ;$$

$$ch \frac{w_c}{c} = \sqrt{\frac{r - k}{r - 2k}} ;$$

$$\overline{E}_c = e^{-\frac{k}{r}} \cdot ch \frac{w_c}{c} = e^{-\frac{k}{r}} \cdot \sqrt{\frac{r - k}{r - 2k}}.$$

On doit avoir : $ch \frac{w_c}{c} \geq 1$, donc : $\frac{r - k}{r - 2k} \geq 1$; cette inégalité est vraie pour $r \geq 2k$, fautive pour $r < 2k$.

Bien entendu, w_c désigne la rapidité circulaire : $ch \frac{w_c}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}}}$ (où v_c désigne la vitesse circulaire).

$$sh^2 \frac{w_c}{c} = ch^2 \frac{w_c}{c} - 1 = \frac{r - k}{r - 2k} - 1 = \frac{(r - k) - (r - 2k)}{r - 2k} = \frac{k}{r - 2k} ;$$

$$sh \frac{w_c}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-2k}} ;$$

$$\frac{v_c}{c} = th \frac{w_c}{c} = \frac{sh \frac{w_c}{c}}{ch \frac{w_c}{c}} = \sqrt{\frac{k}{r-2k} \cdot \frac{r-2k}{r-k}} = \sqrt{\frac{k}{r-k}} .$$

$$\frac{v_c}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-k}} .$$

Quand r varie de l'infini à $2k$, $ch^2 \frac{w_c}{c}$ varie de 1 à l'infini, donc la rapidité w_c varie de 0 à l'infini, et la vitesse circulaire v_c varie de 0 à c .

Il en résulte qu'il ne peut pas y avoir d'orbite circulaire de rayon inférieur à $2k$, ou $\frac{2GM}{c^2}$.

Pour $r \gg k$, on pourra utiliser la formule approchée :

$$\frac{v_c}{c} \approx \sqrt{\frac{k}{r}} .$$

En utilisant des formules démontrées précédemment, et en remarquant que $\bar{\mu} = r \bar{p}$, nous aurions pu écrire :

$$\begin{cases} \bar{E}_c = e^{-\frac{2k}{r}} \frac{cdt}{ds} = e^{-\frac{k}{r}} ch \frac{w_c}{c} = e^{-\frac{k}{r}} \sqrt{\frac{r-k}{r-2k}} ; \\ \bar{\mu}_c = r^2 e^{\frac{2k}{r}} \frac{d\theta}{ds} = e^{\frac{k}{r}} r sh \frac{w_c}{c} = e^{\frac{k}{r}} r \sqrt{\frac{k}{r-2k}} . \end{cases}$$

Le nombre $k = \frac{GM}{c^2}$ étant fixé, à chaque valeur de la distance radiale r correspondent des valeurs de la vitesse circulaire v_c , de l'énergie \bar{E} et du moment cinétique $\bar{\mu}$, bien déterminées et facilement calculables.

Etudions plus particulièrement l'énergie circulaire :

$$\bar{E}_c = e^{-\frac{k}{r}} \cdot \sqrt{\frac{r-k}{r-2k}} .$$

Quand r tend vers l'infini, elle tend vers 1. Quand r tend vers $2k$, elle tend vers l'infini. Elle admet un minimum facile à trouver en étudiant la dérivée de la fonction $\bar{E}_c = f(r)$:

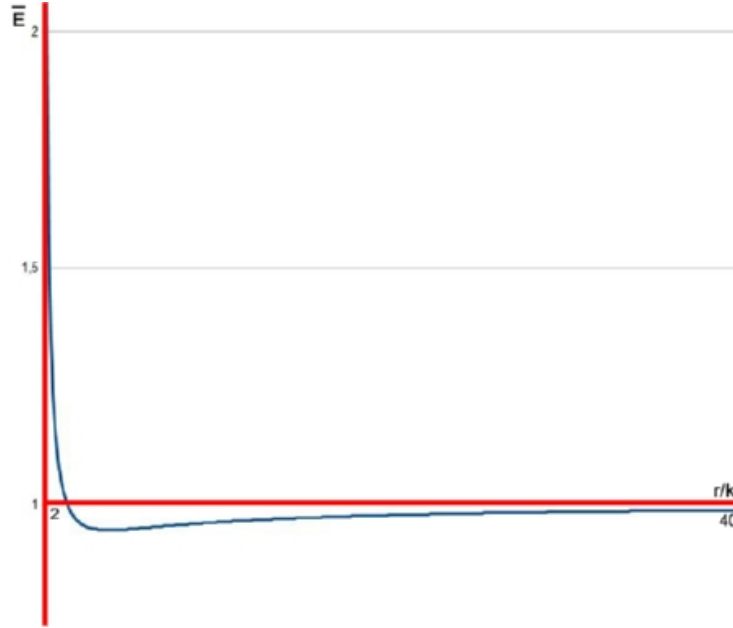
$$\frac{d\bar{E}_c}{dr} = e^{-\frac{k}{r}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(r-2k) - (r-k)}{(r-2k)^2} \cdot \sqrt{\frac{r-2k}{r-k}} + \frac{k}{r^2} \cdot e^{-\frac{k}{r}} \cdot \sqrt{\frac{r-k}{r-2k}} ;$$

$$\frac{d\bar{E}_c}{dr} = e^{-\frac{k}{r}} \cdot \frac{-k}{2 \cdot (r-2k)^2} \cdot \sqrt{\frac{r-2k}{r-k}} + \frac{k}{r^2} \cdot e^{-\frac{k}{r}} \cdot \sqrt{\frac{r-k}{r-2k}} ;$$

$$\frac{d\bar{E}_c}{dr} = k.e^{-\frac{k}{r}} \cdot \left[\frac{-1}{2.(r-2k).\sqrt{r-2k}.\sqrt{r-k}} + \frac{\sqrt{r-k}}{r^2.\sqrt{r-2k}} \right] ;$$

$$\frac{d\bar{E}_c}{dr} = k.e^{-\frac{k}{r}} \cdot \frac{-r^2 + 2.(r-2k).\sqrt{r-k}.\sqrt{r-k}}{2.r^2.(r-2k).\sqrt{r-2k}.\sqrt{r-k}} ;$$

$$\frac{d\bar{E}_c}{dr} = k.e^{-\frac{k}{r}} \cdot \frac{r^2 - 6.k.r + 4.k^2}{2.r^2.(r-2k).\sqrt{r-2k}.\sqrt{r-k}}.$$



Comme on a $r > 2k$, le signe de cette dérivée est celui du polynôme : $r^2 - 6.k.r + 4.k^2$, qui se factorise ainsi :

$$r^2 - 6.k.r + 4.k^2 = (r - 3.k + \sqrt{5}.k).(r - 3.k - \sqrt{5}.k).$$

Nous retenons la seule racine supérieure à $2k$, qui est :

$$r_{min} = (3 + \sqrt{5}).k \approx 5,236.k.$$

C'est le rayon pour lequel l'énergie circulaire est minimale.

On a alors : $r_{min} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.r_s \approx 2,618.r_s$, où r_s est le rayon de Schwarzschild. On peut remarquer que le coefficient $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,618$ est le carré du nombre d'or : $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

En remplaçant $\frac{r}{k}$ par ce nombre 2,618... dans l'expression de l'énergie circulaire, on obtient l'énergie circulaire minimale :

$$\bar{E}_{min} \approx 0,945213.$$

Rappelons que, quand $r \rightarrow \infty$, $\bar{E} \rightarrow 1$. On remarque que l'amplitude de variation de \bar{E} , entre ces deux valeurs, est très étroite.

Pour étudier les orbites circulaires, nous aurions pu reprendre l'étude des géodésiques en métrique de Ni; la seconde équation était :

$$\frac{d}{ds} \left(-e^{\frac{2k}{r}} \frac{dr}{ds} \right) = \frac{kc^2}{r^2} e^{-\frac{2k}{r}} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{k}{r^2} e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + (k-r) e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2.$$

Nous avons vu que, pour une orbite circulaire, cette équation pouvait s'écrire :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{kc^2}{r^2} \cdot e^{-\frac{4k}{r}} + (r-k) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0,$$

ce qui entraîne :

$$(r-k) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{kc^2}{r^2} \cdot e^{-\frac{4k}{r}}.$$

Comme on a $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_{dist}}{r} = \frac{v_{loc}}{r} \cdot e^{-\frac{2k}{r}} = \frac{v_c}{r} \cdot e^{-\frac{2k}{r}}$ (où v_{dist} est la vitesse circulaire observée par l'observateur distant, et $v_{loc} = v_c$ la vitesse circulaire observée par l'observateur local), on en déduit que :

$$(r-k) \cdot \frac{v_c^2}{r^2} \cdot e^{-\frac{4k}{r}} = \frac{kc^2}{r^2} \cdot e^{-\frac{4k}{r}};$$

$$\frac{v_c^2}{c^2} = \frac{k}{r-k};$$

$$\frac{v_c}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-k}}.$$

7 Vitesse de libération

Cherchons maintenant la vitesse de libération (ou vitesse d'évasion).

Nous allons supposer d'abord que le mobile se déplace (radialement) sur une droite passant par le corps central ponctuel (le "Soleil"); donc $\frac{d\theta}{ds} = 0$.

Partons des formules :

$$1 = e^{-\frac{2k}{r}} \left(\frac{cdt}{ds} \right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2;$$

$$\bar{E} = e^{-\frac{2k}{r}} \frac{cdt}{ds}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= e^{\frac{2k}{r}} \bar{E}^2 - e^{\frac{2k}{r}} \left(\frac{\bar{E} dr}{e^{-\frac{2k}{r}} c dt} \right)^2 ; \\
1 &= e^{\frac{2k}{r}} \bar{E}^2 - e^{\frac{6k}{r}} \bar{E}^2 \left(\frac{dr}{c dt} \right)^2 ; \\
\left(\frac{dr}{c dt} \right)^2 &= \frac{e^{\frac{2k}{r}} \bar{E}^2 - 1}{e^{\frac{6k}{r}} \bar{E}^2} = e^{-\frac{4k}{r}} - \frac{e^{-\frac{6k}{r}}}{\bar{E}^2} ; \\
\frac{v_{dist}}{c} &= \frac{dr}{c dt} = e^{-\frac{2k}{r}} \sqrt{1 - \frac{e^{-\frac{2k}{r}}}{\bar{E}^2}} .
\end{aligned}$$

Notons v la vitesse locale : $v = v_{loc}$.

$$\frac{v}{c} = \frac{v_{loc}}{c} = e^{\frac{2k}{r}} \frac{v_{dist}}{c} = \sqrt{1 - \frac{e^{-\frac{2k}{r}}}{\bar{E}^2}} .$$

Pour calculer la vitesse de libération v_l , on remplace \bar{E} par 1 (car v doit tendre vers 0 quand r tend vers l'infini). On obtient :

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{r}}} .$$

Quand r tend vers l'infini, v_l tend vers 0 ; quand r tend vers 0, v_l tend vers c .

Pour $r \gg k$, on pourra utiliser la formule approchée :

$$\frac{v_l}{c} \approx \sqrt{\frac{2k}{r}} .$$

Nous pouvons retrouver ce résultat, pour une orbite quelconque, à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{aligned}
ch \frac{w}{c} &= e^{-\frac{k}{r}} \frac{c dt}{ds} = \frac{E}{m_0 c^2} e^{\frac{k}{r}} = \bar{E} e^{\frac{k}{r}} ; \\
\bar{E}^2 &= \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{2k(u_2-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1-u_2)}} .
\end{aligned}$$

Rappelons que $u_1 = \frac{1}{r_1}$ et $u_2 = \frac{1}{r_2}$. La seconde formule est valable pour $r_1 > r_s$ et $r_2 > r_s$ (où $r_s = 2.k$).

Nous notons r_1 l'aphélie et r_2 le périhélie ($r_1 > r_s$ et $r_2 > r_s$). Au périhélie, on aura :

$$ch^2 \frac{w_2}{c} = \overline{E}^2 e^{2ku_2}.$$

Faisons tendre r_1 (aphélie) vers l'infini, donc u_1 vers 0 ; on peut vérifier facilement que \overline{E}^2 tend vers 1 ; il s'ensuit que $ch^2 \frac{w_2}{c}$ tend vers e^{2ku_2} ; donc :

$$ch^2 \frac{w_l}{c} = \frac{1}{1 - \frac{v_l^2}{c^2}} = e^{2ku_2} ;$$

$$1 - \frac{v_l^2}{c^2} = e^{-2ku_2} \text{ donc } \frac{v_l^2}{c^2} = 1 - e^{-2ku_2} \text{ donc } \frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - e^{-2ku_2}} = \sqrt{1 - e^{-\frac{2k}{r_2}}}.$$

Nous allons considérer de nouveau un mobile en chute libre (radiale) vers le corps central (une singularité ponctuelle), et nous allons calculer le temps nécessaire pour que la collision se produise. Nous allons adopter d'abord le point de vue d'un observateur lié au mobile, puis celui de l'observateur distant.

Pour l'observateur lié au mobile, le temps propre (infinitésimal) est ds . On a :

$$ds^2 = e^{-\frac{2k}{r}} c^2 dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2, \text{ avec :}$$

$$dt = dt_{dist} = \frac{dr}{v_{dist}} = \frac{dr}{v_{loc}} = \frac{dr}{e^{-\frac{2k}{r}} v_{loc}}, \text{ donc :}$$

$$ds^2 = e^{-\frac{2k}{r}} c^2 \left(\frac{e^{\frac{2k}{r}} dr}{v} \right)^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 = \left(\frac{c^2}{v^2} - 1 \right) e^{\frac{2k}{r}} dr^2.$$

Nous avons vu que $v = v_{loc} = c \sqrt{1 - \frac{e^{-\frac{2k}{r}}}{E^2}}$, donc :

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{e^{-\frac{2k}{r}}}{E^2}} - 1 \right) e^{\frac{2k}{r}} dr^2 = \left(\frac{\overline{E}^2}{\overline{E}^2 - e^{-\frac{2k}{r}}} - \frac{\overline{E}^2 - e^{-\frac{2k}{r}}}{\overline{E}^2 - e^{-\frac{2k}{r}}} \right) e^{\frac{2k}{r}} dr^2 = \frac{e^{-\frac{2k}{r}}}{\overline{E}^2 - e^{-\frac{2k}{r}}} e^{\frac{2k}{r}} dr^2 ;$$

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{\overline{E}^2 - e^{-\frac{2k}{r}}}}.$$

Quand r tend vers 0, on a : $ds \approx \frac{dr}{E}$; donc le temps propre du mobile ne diverge pas au voisinage de $r = 0$, ce qui signifie que, du point de vue du mobile, la collision va se produire au bout d'un temps fini.

Etudions maintenant le point de vue de l'observateur distant.

On sait que $\frac{v_{dist}^2}{c^2} = \frac{dr^2}{c^2 dt^2} = e^{\frac{-4k}{r}} \frac{v_{loc}^2}{c^2} = e^{\frac{-4k}{r}} \left(1 - \frac{e^{-\frac{2k}{r}}}{E^2} \right)$, donc :

$$c dt = \frac{e^{\frac{2k}{r}} dr}{\sqrt{1 - \frac{e^{-\frac{2k}{r}}}{E^2}}}.$$

Quand r tend vers 0, on a : $c dt \approx e^{\frac{2k}{r}} dr$; cette quantité diverge au voisinage de $r = 0$, ce qui signifie que, pour l'observateur distant, la collision n'aura jamais lieu.

Mais notre calcul montre surtout que, pour un observateur distant, le mobile pourra pénétrer dans la sphère de Schwarzschild (ou en sortir) en un temps fini; de même pour toute autre sphère de rayon non nul. Seule la singularité pose problème, si elle existe; mais la métrique de Ni ne prévoit aucune singularité, en raison du phénomène de "création d'espace"; nous verrons dans la section sur les trous noirs que la densité est toujours limitée.

Nous allons maintenant reprendre le calcul de la vitesse de libération, d'une manière plus générale. Nous allons supposer que la métrique, dans le voisinage du corps massif, est de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.d\theta^2$$

où α , β et γ sont trois fonctions de r .

Nous imaginons une particule-test en chute libre radiale ($d\theta = 0$).

$$1 = \alpha.\frac{c^2.dt^2}{ds^2} - \beta.\frac{dr^2}{ds^2} = \alpha.\frac{c^2.dt^2}{ds^2} - \beta.\frac{dr^2}{c^2.dt^2}.\frac{c^2.dt^2}{ds^2} = \frac{c^2.dt^2}{ds^2}.\left(\alpha - \beta.\frac{v_{dist}^2}{c^2}\right).$$

Comme on l'a vu précédemment (voir la section sur les géodésiques), on a : $\alpha.\frac{c.dt}{ds} = c^{te} = \bar{E}$, donc $\frac{c.dt}{ds} = \frac{\bar{E}}{\alpha}$, donc :

$$1 = \frac{\bar{E}^2}{\alpha^2}.\left(\alpha - \beta.\frac{v_{dist}^2}{c^2}\right) = \frac{\bar{E}^2}{\alpha}.\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}.\frac{v_{dist}^2}{c^2}\right).$$

On a toujours : $dt_{loc}^2 = \alpha.dt_{dist}^2$ et $dl_{loc}^2 = \beta.dl_{dist}^2$, donc $\frac{v_{loc}^2}{c^2} = \frac{dl_{loc}^2}{dt_{loc}^2} = \frac{\beta.dl_{dist}^2}{\alpha.dt_{dist}^2} = \frac{\beta}{\alpha}.\frac{v_{dist}^2}{c^2}$, et, par conséquent :

$$1 = \frac{\bar{E}^2}{\alpha}.\left(1 - \frac{v_{loc}^2}{c^2}\right).$$

D'autre part, la vitesse de libération correspond toujours à $\bar{E} = 1$, ce qui donne (en notant v_l la vitesse de libération locale) :

$$1 = \frac{1}{\alpha}.\left(1 - \frac{v_l^2}{c^2}\right);$$

$$1 - \frac{v_l^2}{c^2} = \alpha.$$

L'intérêt de cette comparaison est de bien souligner une différence essentielle entre la métrique de Schwarzschild et celle de Ni :

- dans la métrique de Schwarzschild : $\alpha = 1 - \frac{2G.M}{r.c^2}$, donc $1 - \frac{v_l^2}{c^2} = 1 - \frac{2G.M}{r.c^2}$, et $\frac{v_l}{c} = \sqrt{\frac{2G.M}{r.c^2}}$; la vitesse de libération est égale à c , évidemment, pour $r = \frac{2G.M}{c^2}$, et ceci ne dépend que du paramètre α ; la vitesse de libération est supérieure à c pour $r < \frac{2G.M}{c^2}$;

- dans la métrique de Ni : $\alpha = e^{-\frac{2G.M}{r.c^2}}$, donc $1 - \frac{v_l^2}{c^2} = e^{-\frac{2G.M}{r.c^2}}$, et $\frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - e^{-\frac{2G.M}{r.c^2}}}$; comme $e^{-\frac{2G.M}{r.c^2}}$ est toujours inférieur à 1, la vitesse de libération v_l est toujours inférieure à c .

On voit donc que la vitesse de libération est directement reliée au paramètre α de la métrique. L'existence d'un "effet trou noir" est commandée par le choix de ce paramètre.

Mais cette comparaison m'inspire une seconde remarque : la vitesse (locale) de libération, en métrique de Schwarzschild (donc en relativité générale), est exactement la même qu'en gravitation newtonienne ! Dès lors, il va de soi que cette vitesse de libération dépasse celle de la lumière, pour $r < \frac{2G.M}{c^2}$, comme l'avait déjà noté Laplace, en étudiant les équations de Newton. Pour ma part, je reste perplexe en voyant que la relativité générale nous ramène à une époque que je croyais révolue.

Pourquoi révolue ? Parce-que la relativité restreinte a, depuis, fait triompher une nouvelle conception de la composition des vitesses, donc de l'accélération. Car l'accélération, me semble-t-il, doit être considérée comme une composition de vitesses, qu'on pourrait formuler ainsi :

$$v \oplus dv = \frac{v + dv}{1 + \frac{v.dv}{c^2}} \approx v \cdot \left(1 + \frac{dv}{v}\right) \cdot \left(1 - \frac{v.dv}{c^2}\right) \approx v \cdot \left(1 + \frac{dv}{v} - \frac{v.dv}{c^2}\right) ;$$

$$v \oplus dv \approx v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) .dv.$$

Nous voyons donc que la variation effective de la vitesse n'est pas dv , mais $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) .dv$. J'en déduis qu'il aurait été plus rationnel de noter dw la quantité que nous avons notée dv , et de réserver la notation dv à la variation effective de la vitesse (comme nous l'avions fait dans notre approche préliminaire) :

$$dv = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) .dw, \text{ donc : } dw = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Par intégration, cette égalité donne :

$$\frac{v}{c} = th \frac{w}{c}.$$

On aura compris que w est une rapidité. Quand w tend vers l'infini, évidemment, v tend vers c .

Ce raisonnement, appliqué à une particule-test en chute libre radiale ($d\theta = 0$), montre que la vitesse de chute ne peut pas dépasser celle de la lumière, donc, par inversion du sens du vecteur vitesse, que la vitesse de libération, elle non plus, ne sera jamais supérieure à c .

Ceci nous ramène à notre approche préliminaire : en effet, depuis le début, c'est cette conception de l'accélération, directement inspirée par la relativité restreinte, que nous avons utilisée. Nous avons d'ailleurs introduit la distinction entre l'accélération classique : $\gamma = \frac{dv}{dt}$, et la pseudo-accélération suggérée par le contexte relativiste : $\Gamma = \frac{dw}{dt}$. Pourquoi Einstein n'a-t-il pas fait de même ? Probablement parce-qu'il n'a pas conçu sa gravitation comme une continuation de la relativité restreinte, mais comme un projet totalement différent, dont l'objectif, entrevu dans la section sur "le pari d'Einstein", apparaîtra mieux encore dans la section sur "le tenseur de Ricci en métrique de Schwarzschild".

8 Orbites elliptiques et lois de Kepler

Si la vitesse de la planète est inférieure à la vitesse de libération, son orbite va être, en première approximation, elliptique. Nous allons montrer que la métrique triviale de Ni permet bien de retrouver les lois de Kepler.

Dans la section "Aphélie et périhélie", nous avons démontré que :

$$1 = e^{2ku} \bar{E}^2 - e^{-2ku} \bar{\mu}^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 - e^{-2ku} \bar{\mu}^2 u^2.$$

On en tire :

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = e^{4ku} \frac{\bar{E}^2}{\bar{\mu}^2} - u^2 - \frac{e^{2ku}}{\bar{\mu}^2} = e^{2ku} \left[e^{2ku} \frac{\bar{E}^2}{\bar{\mu}^2} - e^{-2ku} u^2 - \frac{1}{\bar{\mu}^2} \right] ;$$

$$d\theta = \frac{\pm e^{-ku} du}{\sqrt{e^{2ku} \frac{\bar{E}^2}{\bar{\mu}^2} - e^{-2ku} u^2 - \frac{1}{\bar{\mu}^2}}}.$$

Dans cette section, nous allons étudier le cas où r_1 et r_2 sont deux nombres réels positifs, très supérieurs à k . Les nombres $u_1 = \frac{1}{r_1}$ et $u_2 = \frac{1}{r_2}$ sont donc également deux réels positifs. Comme $r_1 + r_2 \approx \frac{2k}{1-\bar{E}^2}$ et $r_1 r_2 \approx \frac{\bar{\mu}^2}{1-\bar{E}^2}$, nous nous plaçons donc dans le cas où $1 - \bar{E}^2 > 0$, donc $0 < \bar{E} < 1$.

Posons : $A = e^{2ku} \frac{\bar{E}^2}{\bar{\mu}^2} - e^{-2ku} u^2 - \frac{1}{\bar{\mu}^2}$, puis remplaçons $\bar{\mu}^2$ et \bar{E}^2 par leurs expressions calculées précédemment. Il vient :

$$A = \frac{u_1^2 e^{2k(u-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u-u_2)}}{e^{2ku_1} - e^{2ku_2}} - \frac{u^2 e^{2k(u_1-u)} - u^2 e^{2k(u_2-u)}}{e^{2ku_1} - e^{2ku_2}} - \frac{u_1^2 e^{2k(u_2-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1-u_2)}}{e^{2ku_1} - e^{2ku_2}} ;$$

$$A = \frac{u_1^2 [e^{2k(u-u_1)} - e^{2k(u_2-u_1)}] + u_2^2 [e^{2k(u_1-u_2)} - e^{2k(u-u_2)}] + u^2 [e^{2k(u_2-u)} - e^{2k(u_1-u)}]}{e^{2ku_1} - e^{2ku_2}} .$$

Notons N le numérateur de cette fraction, D son dénominateur, et B_1, B_2 et B les trois crochets du numérateur, associé à u_1^2, u_2^2 et u^2 . (Ils se déduisent les uns des autres par permutation circulaire.)

Nous allons supposer pour le moment que k est très petit par rapport à r, r_1 et r_2 . Ceci nous autorise à remplacer nos fonctions par des développements limités d'ordre un ou deux en k ; en raison des simplifications qui vont se produire, nous allons être obligés de choisir l'ordre deux.

$$B_1 = e^{2k(u-u_1)} - e^{2k(u_2-u_1)} \approx (1+2k(u-u_1)+2k^2(u-u_1)^2) - (1+2k(u_2-u_1)+2k^2(u_2-u_1)^2) ;$$

$$B_1 \approx 2k(u-u_2) + 2k^2(u^2 - 2uu_1 + u_1^2 - u_2^2 + 2u_1u_2 - u_1^2) ;$$

$$B_1 \approx 2k(u-u_2) + 2k^2(u-u_2)(u+u_2-2u_1).$$

$$\text{De même : } B_2 \approx 2k(u_1-u) + 2k^2(u_1-u)(u_1+u-2u_2)$$

$$\text{et } B \approx 2k(u_2-u_1) + 2k^2(u_2-u_1)(u_2+u_1-2u).$$

Dans l'expression de $N = u_1^2 B_1 + u_2^2 B_2 + u^2 B$, regroupons les termes en k d'une part, en k^2 d'autre part :

$$N \approx 2k [u_1^2(u-u_2) + u_2^2(u_1-u) + u^2(u_2-u_1)] \dots$$

$$\dots + 2k^2 [u_1^2(u-u_2)(u+u_2-2u_1) + u_2^2(u_1-u)(u_1+u-2u_2) + u^2(u_2-u_1)(u_2+u_1-2u)] ;$$

$$N \approx 2k [u^2(u_2-u_1) + u(u_1-u_2)(u_1+u_2) + u_1u_2(u_2-u_1)] \dots$$

$$\dots + 2k^2 [u^2 ((u_2-u_1)(u_2+u_1-2u) + u_1^2 - u_2^2) + u(u_1^2u_2 - 2u_1^3 - u_1^2u_2 + u_1u_2^2)] \dots$$

$$\dots - 2k^2 [u_1u_2^2 + 2u_2^3] - u_1^2u_2(u_2-2u_1) + u_1u_2^2(u_1-2u_2) ;$$

$$N \approx 2k(u_2 - u_1)(u^2 - u(u_1 + u_2) + u_1u_2) \dots \\ \dots + 2k^2 [u^2(u_2 - u_1)(-2u) + 2u(u_2 - u_1)(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2) + u_1u_2(-u_1u_2 + 2u_1^2 + u_2u_1 - 2u_2^2)] ;$$

$$N \approx 2k(u_2 - u_1)(u - u_1)(u - u_2) \dots \\ \dots + 2k^2(u_2 - u_1) [-2u^3 + 2u(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2) - 2u_1u_2(u_1 + u_2)] ;$$

$$N \approx 2k(u_2 - u_1)(u - u_1)(u - u_2) \dots \\ \dots - 4k^2(u_2 - u_1) [u^3 - u(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2) + u_1u_2(u_1 + u_2)] ;$$

$$N \approx 2k(u_2 - u_1)(u - u_1)(u - u_2) \dots \\ \dots - 4k^2(u_2 - u_1)(u - u_1)(u_2 - uu_1 - u_1u_2 - u_2^2) ;$$

$$N \approx 2k(u_2 - u_1)(u - u_1)(u - u_2) - 4k^2(u_2 - u_1)(u - u_1)(u + u_1 + u_2) ;$$

$$N \approx 2k(u_2 - u_1)(u - u_1)(u - u_2) [1 - 2k(u + u_1 + u_2)] ;$$

$$N \approx 2k(u_1 - u_2)(u_2 - u)(u - u_1) [1 - 2k(u + u_1 + u_2)] .$$

En ce qui concerne le dénominateur :

$$D = e^{2ku_1} - e^{2ku_2} \approx (1 + 2ku_1 + 2k^2u_1^2) - (1 + 2ku_2 + 2k^2u_2^2) \approx 2k(u_1 - u_2) + 2k^2(u_1 - u_2)(u_1 + u_2) ;$$

$$D \approx 2k(u_1 - u_2) [1 + k(u_1 + u_2)] .$$

Par conséquent :

$$A = \frac{N}{D} \approx \frac{2k(u_1 - u_2)(u_2 - u)(u - u_1) [1 - 2k(u + u_1 + u_2)]}{2k(u_1 - u_2) [1 + k(u_1 + u_2)]} ;$$

$$A \approx \frac{(u_2 - u)(u - u_1) [1 - 2k(u + u_1 + u_2)]}{1 + k(u_1 + u_2)} .$$

Notre équation de départ devient donc :

$$d\theta = \frac{\pm e^{-ku} du}{\sqrt{A}} \approx \pm(1 - ku) \sqrt{\frac{1 + k(u_1 + u_2)}{1 - 2k(u + u_1 + u_2)}} \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} ;$$

$$d\theta \approx \pm(1 - ku)(1 + k\frac{u_1 + u_2}{2}) [1 + k(u + u_1 + u_2)] \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} ;$$

$$d\theta \approx \pm \left[1 - ku + k\frac{u_1 + u_2}{2} + k(u + u_1 + u_2) \right] \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} ;$$

$$d\theta \approx \pm \left[1 + k\frac{3(u_1 + u_2)}{2} \right] \frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}}$$

Nous allons maintenant poser :

$$u = \frac{1}{2}(u_2 + u_1) + \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos\psi,$$

où ψ est un angle qui s'annule pour $u = u_2$ (périhélie), qui vaut 180° pour $u = u_1$ (aphélie), et qui varie de 360° quand la planète parcourt son orbite.

$$u_2 - u = u_2 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos\psi = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)(1 - \cos\psi) ;$$

$$u - u_1 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_1 - u_1 + \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos\psi = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)(1 + \cos\psi) ;$$

$$(u_2 - u)(u - u_1) = \frac{1}{4}(u_2 - u_1)^2(1 - \cos^2\psi) = \frac{1}{4}(u_2 - u_1)^2 \sin^2\psi ;$$

$$\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)} = \pm \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \sin\psi ;$$

$$du = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) d(\cos\psi) = -\frac{1}{2}(u_2 - u_1) \sin\psi d\psi.$$

Ces deux dernières égalités prouvent (au signe près) que :

$$\frac{du}{\sqrt{(u_2 - u)(u - u_1)}} = d\psi.$$

L'équation du mouvement devient donc :

$$d\theta \approx \left[1 + k\frac{3(u_1 + u_2)}{2} \right] d\psi.$$

Si k est très petit par rapport à r_1 et r_2 , le terme $k\frac{3(u_1 + u_2)}{2}$ peut être négligé en première approximation ; on obtient alors : $d\theta \approx d\psi$, donc :

$$u \approx \frac{1}{2}(u_2 + u_1) + \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos\theta ;$$

$$u \approx \frac{1}{2}(u_2 + u_1) \left[1 + \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} \cos\theta \right].$$

Rappelons que $u = \frac{1}{r}$;

posons $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}(u_2 + u_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{r_1+r_2}{2r_1r_2}$, et $e = \frac{u_2-u_1}{u_2+u_1} = \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$;
notre équation s'écrit alors :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e \cos \theta) ;$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

Cette équation est celle d'une **ellipse** ; c'est la **première loi de Kepler** !
Le nombre p est le paramètre de l'orbite ; e est son excentricité. Si $r_1 > r_2$, on a : $0 < e < 1$.

Nous allons maintenant étudier la période de révolution T d'une planète ;
repreons les égalités :

$$E = m_0 c^2 e^{-\frac{2k}{r}} \frac{dt}{ds} \approx m_0 c^2 \frac{dt}{ds} ;$$

$$\mu = m_0 c r^2 e^{\frac{2k}{r}} \frac{d\theta}{ds} \approx m_0 c r^2 \frac{d\theta}{ds} \approx 2m_0 c \frac{dA}{ds}.$$

Nous désignons par dA l'aire balayée pendant le temps dt par le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète.

$$dt \approx \frac{E}{m_0 c^2} ds \approx \frac{E}{m_0 c^2} \frac{2m_0 c}{\mu} dA \approx \frac{2E}{\mu c} dA ;$$

$$\frac{dA}{dt} \approx \frac{\mu c}{2E}.$$

Pour une planète donnée (μ et E fixés) cette quantité est constante, donc l'aire balayée par le rayon vecteur qui joint le Soleil à la planète est proportionnelle au temps. On reconnaît la **seconde loi de Kepler** (ou loi des aires).

En intégrant dt sur un tour complet de l'orbite :

$$T \approx \frac{2E}{\mu c} A.$$

Rappelons que : $\bar{\mu} = \frac{\mu}{m_0 c}$, $\bar{\mu}^2 \approx \frac{2kr_1 r_2}{r_1+r_2}$, $\bar{E} = \frac{E}{m_0 c^2}$, $\bar{E}^2 \approx 1 - \frac{2k}{r_1+r_2}$.
On en tire :

$$\frac{E^2}{\mu^2 c^2} = \frac{\bar{E}^2}{\bar{\mu}^2} \approx \frac{1 - \frac{2k}{r_1+r_2}}{\frac{2kr_1 r_2}{r_1+r_2}} \approx \frac{r_1 + r_2}{2kr_1 r_2} \approx \frac{1}{pk} ;$$

$$T^2 \approx \frac{4E^2}{\mu^2 c^4} A^2 \approx \frac{4}{pkc^2} A^2.$$

Notons a le demi-grand axe de l'ellipse : $a = \frac{r_1+r_2}{2}$.
 L'aire de l'ellipse est donnée par la formule :
 $A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$; $A^2 = \pi^2 a^4 (1-e^2) = \pi^2 a^3 [a(1-e^2)] = \pi^2 a^3 p$ (car $p = a(1-e^2)$). Donc :

$$T^2 \approx \frac{4}{pkc^2} A^2 \approx \frac{4\pi^2 a^3 p}{pkc^2} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{GM} ;$$

$$T^2 \approx \frac{4\pi^2 a^3}{GM}.$$

On reconnaît la **troisième loi de Kepler** (ou loi des périodes).

9 Orbites paraboliques

L'étude des orbites paraboliques se déduit facilement de celle des orbites elliptiques : il suffit de faire tendre r_1 vers l'infini, donc u_1 vers 0. Comme $\bar{E}^2 = \frac{u_1^2 e^{-2ku_1} - u_2^2 e^{-2ku_2}}{u_1^2 e^{2k(u_2-u_1)} - u_2^2 e^{2k(u_1-u_2)}}$, on voit facilement que \bar{E} tend vers 1, ce qui est cohérent avec les égalités (moins rigoureuses) : $r_1 + r_2 \approx \frac{2k}{1-\bar{E}^2}$ et $r_1 r_2 \approx \frac{\bar{\mu}^2}{1-\bar{E}^2}$. D'autre part, $e = \frac{u_2-u_1}{u_2+u_1} = \frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$; on voit donc que l'excentricité de l'orbite tend vers 1. L'équation de l'orbite, en coordonnées polaires, devient donc :

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}.$$

Cette équation est celle d'une **parabole**.

10 Orbites hyperboliques

Il nous reste à étudier le cas où $\bar{E} > 1$. D'après les égalités $r_1 + r_2 \approx \frac{2k}{1-\bar{E}^2}$ et $r_1 r_2 \approx \frac{\bar{\mu}^2}{1-\bar{E}^2}$, on voit que l'un des deux nombres r_1 et r_2 doit être négatif. Les égalités : $r_1 \approx \frac{k + \sqrt{k^2 - \bar{\mu}^2(1-\bar{E}^2)}}{1-\bar{E}^2}$ et $r_2 \approx \frac{k - \sqrt{k^2 - \bar{\mu}^2(1-\bar{E}^2)}}{1-\bar{E}^2}$ montrent que c'est r_1 qui devient négatif (et, également, que la somme $r_1 + r_2$ est négative). Ceci nous pose un problème d'interprétation : le nombre r_1 (négatif) ne désigne plus

l'aphélie (point de l'orbite qui est le plus éloigné du Soleil) ; d'ailleurs il n'y a plus d'aphélie ! Mais peu importe : ce nombre r_1 peut toujours être défini, d'une manière purement formelle, par l'égalité (approximative) $r_1 \approx \frac{k + \sqrt{k^2 - \mu^2(1 - \bar{E}^2)}}{1 - \bar{E}^2}$, ou, de manière plus rigoureuse, par les formules vues dans la section sur les orbites elliptiques. Ce qui est important, c'est le fait que tous les calculs faits dans cette section restent valables, y compris l'équation polaire à laquelle nous avons abouti :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

La seule chose qui va changer, c'est l'excentricité : $e = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}$; en effet, on peut vérifier facilement que cette excentricité est supérieure à 1 (en remarquant que le nombre $u_1 + u_2 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2}$ est positif) ; or, dans ce cas où l'excentricité est supérieure à 1, l'équation ci-dessus (avec $-\text{Arccos}(-\frac{1}{e}) < \theta < \text{Arccos}(-\frac{1}{e})$) est celle d'une **branche d'hyperbole**.

11 Précession du périhélie

Revenons aux orbites elliptiques ; nous avons dit que la métrique triviale de Ni permet de retrouver, en première approximation, les lois de Képler. Nous allons nous intéresser ici à l'écart par rapport aux lois de Képler. Nous allons voir que l'axe de l'orbite n'est pas stable, comme le croyaient Képler et Newton, mais tourne lentement. C'est ce qu'on appelle la précession du périhélie (ou du périastre).

Nous avons vu que $e = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$, donc $e^2 = \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + r_2)^2}$, et :

$$\begin{aligned} 1 - e^2 &= \frac{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} ; \\ a(1 - e^2) &= \frac{r_1 + r_2}{2} \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}} ; \\ a(1 - e^2) &= \frac{2}{u_2 + u_1} = p ; \\ \frac{u_1 + u_2}{2} &= \frac{1}{p} = \frac{1}{a(1 - e^2)}. \end{aligned}$$

Reprenons l'équation : $d\theta \approx \left[1 + k \frac{3(u_1 + u_2)}{2} \right] d\psi$, mais, cette fois-ci, au lieu de supprimer le terme $k \frac{3(u_1 + u_2)}{2}$, remplaçons-le (selon la formule ci-dessus) par

$\frac{3k}{a(1-e^2)}$. L'équation du mouvement devient :

$$d\theta \approx \left[1 + \frac{3k}{a(1-e^2)} \right] d\psi.$$

Le terme que nous avons réintroduit est responsable de la précession du périhélie. Sur un tour d'orbite (du périhélie au périhélie), la variation de ψ est : $\Delta\psi = 2\pi$; celle de θ est :

$$\Delta\theta = 2\pi \left[1 + \frac{3k}{a(1-e^2)} \right] = 2\pi + \frac{6\pi k}{a(1-e^2)} = 2\pi + \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}.$$

La précession du périhélie est donc, pour chaque tour d'orbite :

$$\frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}.$$

C'est précisément la formule à laquelle conduisent la relativité générale et la métrique de Schwarzschild.

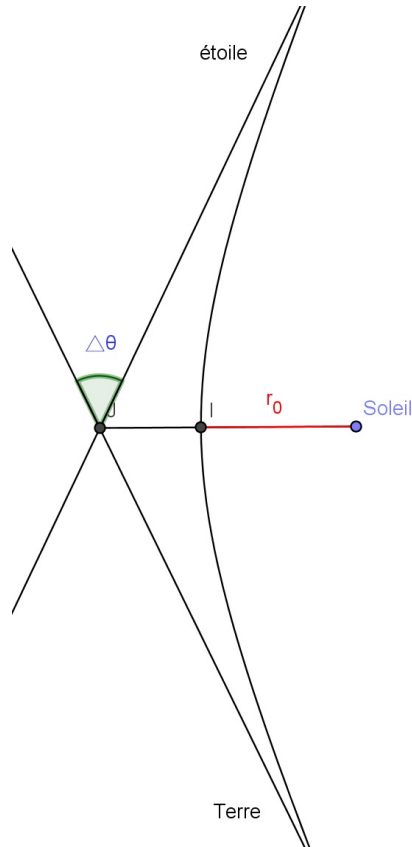
Dans le cas de Mercure, on savait (depuis Le Verrier) que les perturbations dues aux autres planètes devaient produire une précession de $532''$ par siècle; mais l'observation donnait $575''$ (soit $43''$ de trop). Cette différence de $43''$ par siècle a pu être expliquée grâce à la relativité générale. Le calcul a été fait par Einstein lui-même, qui a considéré ce résultat comme un test majeur de sa théorie. Une autre explication a été proposée, basée sur l'aplatissement (hypothétique) du Soleil; mais des mesures récentes l'ont exclue : l'aplatissement est trop faible. D'autre part, la précession des autres planètes (beaucoup plus faible que celle de Mercure) a pu être mesurée, et la formule ci-dessus a été confirmée. Mais c'est surtout l'étude du pulsar binaire PSR 1913+16 qui a apporté une confirmation spectaculaire; en effet, dans ce système double très serré, la précession du périastre est de $4,2^\circ$ par an, soit $41''$ par jour; presque autant que la précession du périhélie de Mercure en un siècle! D'autres pulsars binaires, actuellement en cours d'étude, confirment cette précession d'une manière encore plus précise.

12 Déflexion de la lumière

Dans cette partie, nous allons chercher à savoir comment un rayon lumineux est dévié lorsqu'il passe à proximité du Soleil (ou de tout autre corps massif). Cette déviation est liée au fait que les distances locales, par rapport à l'évaluation de l'observateur distant, sont de plus en plus importantes quand on se rapproche du Soleil, ce qui équivaut à une courbure de l'espace : en chaque

point, les observateurs locaux voient passer la lumière en ligne droite, mais l'observateur distant va voir une ligne courbe.

Nous supposons qu'un rayon lumineux arrive de l'infini, passe à la distance r_0 du Soleil, et repart vers l'infini. L'angle polaire θ s'annule quand $r = r_0$.



Dans un premier temps, nous n'étudierons qu'une demi-trajectoire (de $r = r_0$ à $r = \infty$).

Nous partons des deux équations suivantes (voir la partie "géodésiques") :

$$a) ds^2 = c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 - r^2 e^{\frac{2k}{r}} d\theta^2 ;$$

$$b) r^2 e^{\frac{4k}{r}} \frac{d\theta}{dt} = K.$$

Nous allons écrire que $ds^2 = 0$ (particularité des rayons lumineux), préciser la constante K , et éliminer dt pour exprimer $d\theta$ en fonction de dr .

Puisque $ds^2 = 0$, on tire de l'équation a) :

$$c^2 dt^2 = e^{\frac{4k}{r}} dr^2 + r^2 e^{\frac{4k}{r}} d\theta^2.$$

L'équation b) nous donne :

$$c^2 dt^2 = \frac{c^2 r^4 e^{\frac{8k}{r}} d\theta^2}{K^2}.$$

Les deux réunies conduisent à :

$$e^{\frac{4k}{r}} dr^2 = \frac{c^2 r^4 e^{\frac{8k}{r}} d\theta^2}{K^2} - r^2 e^{\frac{4k}{r}} d\theta^2 ;$$

$$dr^2 = r^2 \left[\frac{c^2 r^2 e^{\frac{4k}{r}}}{K^2} - 1 \right] d\theta^2.$$

Pour $r = r_0$, dr s'annule, donc le crochet aussi, ce qui nous donne :

$$K = cr_0 e^{\frac{2k}{r_0}}.$$

Donc :

$$dr^2 = r^2 \left[\frac{r^2 e^{\frac{4k}{r}}}{r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}} - 1 \right] d\theta^2.$$

Posons encore $u = \frac{1}{r}$; on a : $du^2 = \frac{dr^2}{r^4}$; donc :

$$du^2 = \left[\frac{e^{\frac{4k}{r}}}{r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}} - \frac{1}{r^2} \right] d\theta^2 = \left[u_0^2 e^{4k(u-u_0)} - u^2 \right] d\theta^2 = e^{4ku} \left[u_0^2 e^{-4ku_0} - u^2 e^{-4ku} \right] d\theta^2 ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 = \frac{e^{-4ku}}{u_0^2 e^{-4ku_0} - u^2 e^{-4ku}}.$$

A partir d'ici, nous allons supposer r suffisamment grand par rapport à k pour autoriser un développement limité à l'ordre un en ku . On écrit que $e^{-4ku} \approx 1 - 4ku$.

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1 - 4ku}{u_0^2(1 - 4ku_0) - u^2(1 - 4ku)} = \frac{1 - 4ku}{(u_0^2 - u^2) - 4k(u_0^3 - u^3)} ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1 - 4ku}{(u_0^2 - u^2) \left(1 - 4k \frac{u_0^3 - u^3}{u_0^2 - u^2} \right)} ;$$

$$\left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 \approx \frac{1 - 4ku}{(u_0^2 - u^2) \left(1 - 4k \frac{u_0^2 + u_0 u + u^2}{u_0 + u} \right)} ;$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 &\approx \frac{1}{(u_0^2 - u^2)}(1 - 4ku) \left(1 + 4k \frac{u_0^2 + u_0u + u^2}{u_0 + u}\right) ; \\
\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 &\approx \frac{1}{(u_0^2 - u^2)} \left[1 + 4k \left(\frac{u_0^2 + u_0u + u^2}{u_0 + u} - u\right)\right] ; \\
\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 &\approx \frac{1}{(u_0^2 - u^2)} \left[1 + 4k \left(\frac{u_0^2 + u_0u + u^2}{u_0 + u} - \frac{u_0u + u^2}{u_0 + u}\right)\right] ; \\
\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 &\approx \frac{1}{(u_0^2 - u^2)} \left(1 + 4k \frac{u_0^2}{u_0 + u}\right) ; \\
d\theta &\approx \frac{\pm du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} \left(1 + 2ku_0 \frac{1}{1 + \frac{u}{u_0}}\right) ; \\
d\theta &\approx \frac{\pm d\left(\frac{u}{u_0}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_0}\right)^2}} \left(1 + 2ku_0 \frac{1}{1 + \frac{u}{u_0}}\right) .
\end{aligned}$$

Posons : $\frac{u}{u_0} = \cos \phi$. Notre équation devient :

$$d\theta \approx \frac{\pm d(\cos \phi)}{\sqrt{1 - (\cos \phi)^2}} \left(1 + 2ku_0 \frac{1}{1 + \cos \phi}\right) = \frac{\pm \sin \phi d\phi}{\sin \phi} \left(1 + \frac{2ku_0}{1 + \cos \phi}\right) .$$

Choisissons le signe + (simple convention sur le sens de déplacement).

$$d\theta \approx d\phi + 2ku_0 \frac{d\phi}{1 + \cos \phi} .$$

On sait que $\cos \phi = 2\cos^2 \frac{\phi}{2} - 1$; donc $\frac{d\phi}{1 + \cos \phi} = \frac{d\frac{\phi}{2}}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} = d \tan \frac{\phi}{2}$.

Sur une demi-trajectoire du rayon lumineux, la variation de l'angle θ est donnée par :

$$\Delta\theta \approx \Delta\phi + 2ku_0 \Delta \left(\tan \frac{\phi}{2}\right) .$$

Sur cette demi-trajectoire, r varie de r_0 à l'infini, u varie de u_0 à 0, $\cos \phi$ varie de 1 à 0, ϕ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\phi}{2}$ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, $\tan \frac{\phi}{2}$ varie de 0 à 1 ; donc :

$$\Delta\theta \approx \Delta\phi + 2ku_0 \Delta \left(\tan \frac{\phi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2ku_0 ,$$

et, sur la trajectoire complète :

$$\Delta\theta \approx \pi + 4ku_0 \approx \pi + \frac{4k}{r_0} \approx \pi + \frac{4GM}{r_0 c^2} .$$

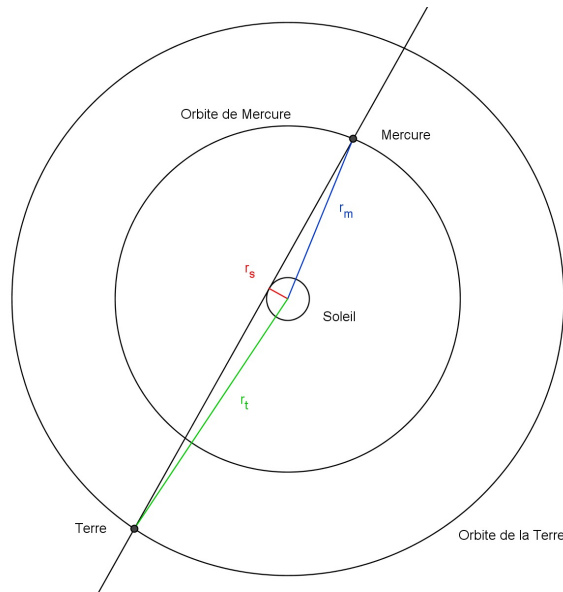
La déflexion de la lumière est donnée par le terme :

$$\frac{4GM}{r_0 c^2}.$$

C'est exactement la formule à laquelle conduit la relativité générale. Elle a été confirmée par Eddington, par la mesure directe sur des étoiles occultées par le Soleil. Ces mesures, peu précises à l'époque, ont été affinées depuis, et sont maintenant vraiment convaincantes. D'autre part, les observations de mirages gravitationnels par les astronomes se sont multipliées, et la déviation de la lumière par les corps massifs ne fait plus de doute.

13 Effet Shapiro

Lorsqu'un rayon lumineux passe à proximité du Soleil (ou de tout autre corps massif), il semble prendre du retard par rapport à ce que prévoyaient les calculs classiques. Ce retard (appelé "retard Shapiro") est dû à la fois au fait que la distance à parcourir est plus grande (les distances locales sont supérieures à l'évaluation de l'observateur distant), et au fait que le temps (local) s'écoule plus lentement. Ces deux raisons réunies entraînent que la vitesse apparente de la lumière (évaluée par l'observateur distant) est inférieure à c .



Pour étudier l'effet Shapiro, nous allons commencer, comme pour la déflexion de la lumière, avec les équations suivantes :

$$a) ds^2 = c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 - r^2 e^{\frac{2k}{r}} d\theta^2 = 0 ;$$

$$b) r^2 e^{\frac{4k}{r}} \frac{d\theta}{dt} = K = cr_0 e^{\frac{2k}{r_0}}.$$

En effet, nous nous intéressons toujours à un rayon lumineux passant près du Soleil (à la distance r_0). Mais cette fois-ci, au lieu d'éliminer dt , nous allons éliminer $d\theta$, afin d'étudier le temps que met la lumière pour nous parvenir, en passant très près du Soleil.

L'idée originale de Shapiro est de mesurer le temps mis par un rayonnement électromagnétique pour faire l'aller-retour Terre-Mercure-Terre par exemple lorsque la planète est sur le point de passer derrière le Soleil. On s'aperçoit alors que la durée de cet aller-retour augmente brutalement juste avant l'occultation.

On va voir que cette variation est calculable avec la métrique de Ni, aussi bien qu'avec celle de Schwarzschild.

D'après b) :

$$d\theta = \frac{c r_0 e^{\frac{2k}{r_0}}}{r^2 e^{\frac{4k}{r}}} dt.$$

On fait la substitution dans a) :

$$c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 - r^2 e^{\frac{2k}{r}} \frac{c^2 r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}}{r^4 e^{\frac{8k}{r}}} dt^2 = 0 ;$$

$$c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 - e^{\frac{2k}{r}} dr^2 - \frac{c^2 r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}}{r^2 e^{\frac{6k}{r}}} dt^2 = 0 ;$$

$$c^2 e^{-\frac{2k}{r}} dt^2 \left[1 - \frac{r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}}{r^2 e^{\frac{4k}{r}}} \right] = e^{\frac{2k}{r}} dr^2 ;$$

$$c^2 dt^2 = \frac{e^{\frac{4k}{r}}}{1 - \frac{r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}}{r^2 e^{\frac{4k}{r}}}} dr^2 = \frac{\frac{e^{\frac{4k}{r}}}{r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}}}{\frac{1}{r_0^2 e^{\frac{4k}{r_0}}} - \frac{1}{r^2 e^{\frac{4k}{r}}}} dr^2 = \frac{u_0^2 e^{4k(u-u_0)}}{u_0^2 e^{-4ku_0} - u^2 e^{-4ku}} dr^2.$$

Nous supposons que k est petit par rapport à r (donc ku et ku_0 très petits aussi), et nous développons les exponentielles à l'ordre un en k :

$$c^2 dt^2 \approx \frac{u_0^2 [1 + 4k(u - u_0)]}{u_0^2 (1 - 4ku_0) - u^2 (1 - 4ku)} dr^2 = \frac{u_0^2 [1 + 4k(u - u_0)]}{(u_0^2 - u^2) - 4k(u_0^3 - u^3)} dr^2 ;$$

$$c^2 dt^2 \approx \frac{u_0^2 [1 + 4k(u - u_0)]}{(u_0^2 - u^2) \left[1 - 4k \frac{u_0^3 - u^3}{u_0^2 - u^2} \right]} dr^2 = \frac{u_0^2 [1 + 4k(u - u_0)]}{(u_0^2 - u^2) \left[1 - 4k \frac{u_0^2 + u_0 u + u^2}{u_0 + u} \right]} dr^2 ;$$

$$c^2 dt^2 \approx \frac{u_0^2 [1 + 4k(u - u_0)] \left[1 + 4k \frac{u_0^2 + u_0 u + u^2}{u_0 + u} \right]}{(u_0^2 - u^2)} dr^2 ;$$

$$\begin{aligned}
c^2 dt^2 &\approx \frac{u_0^2}{(u_0^2 - u^2)} \left[1 + 4k(u - u_0) + 4k \frac{u_0^2 + u_0 u + u^2}{u_0 + u} \right] dr^2 ; \\
c^2 dt^2 &\approx \frac{u_0^2}{(u_0^2 - u^2)} \left[1 + 4k \frac{u^2 - u_0^2}{u_0 + u} + 4k \frac{u_0^2 + u_0 u + u^2}{u_0 + u} \right] dr^2 ; \\
c^2 dt^2 &\approx \frac{u_0^2}{(u_0^2 - u^2)} \left[1 + 4k \frac{u_0 u + u^2}{u_0 + u} + 4k \frac{u^2}{u_0 + u} \right] dr^2 ; \\
cdt &\approx \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} \left[1 + 2ku + 2k \frac{u^2}{u_0 + u} \right] dr.
\end{aligned}$$

Nous allons passer maintenant à l'intégration, que nous allons fractionner en trois parties :

$$A = \frac{u_0 dr}{\sqrt{u_0^2 - u^2}}, B = 2k \frac{u^2}{u_0 + u} \frac{u_0 dr}{\sqrt{u_0^2 - u^2}}, \text{ et } C = 2ku \frac{u_0 dr}{\sqrt{u_0^2 - u^2}}.$$

On posera : $\frac{u}{u_0} = \cos \phi$.

$$A = \frac{u_0 dr}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = - \frac{du}{u^2 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_0}\right)^2}} = \frac{u_0 \sin \phi d\phi}{u_0^2 \cos^2 \phi \sqrt{1 - \cos^2 \phi}} ;$$

$$A = \frac{\sin \phi d\phi}{u_0 \cos^2 \phi \sin \phi} = \frac{d\phi}{u_0 \cos^2 \phi} = r_0 \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} = r_0 d(\tan \phi).$$

Remarquons que $\cos \phi = \frac{u}{u_0} = \frac{r_0}{r}$, $\sin \phi = \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}$, $\tan \phi = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}}{\frac{r_0}{r}} = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}$. On a donc :

$$A = r_0 d(\tan \phi) = d\left(\sqrt{r^2 - r_0^2}\right).$$

Si on néglige les termes B et C , on trouve donc que le temps nécessaire au rayon lumineux pour aller de r_0 (point de sa trajectoire le plus proche du Soleil) à r (ou inversement) est : $\Delta t \approx \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{c}$, ce qui correspond exactement au résultat qu'on obtiendrait dans un espace-temps euclidien (car $\sqrt{r^2 - r_0^2}$ correspond alors à la distance parcourue, calculée par le théorème de Pythagore classique). Mais dans notre espace-temps courbe, la distance va être plus grande, et le temps de parcours aussi : les termes B et C vont nous le montrer.

$$B = 2k \frac{u^2}{u_0 + u} \frac{u_0 dr}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = 2k \frac{u^2}{u_0 + u} \frac{u_0 \left(-\frac{du}{u^2}\right)}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = 2k \frac{1}{u_0 + u} \frac{-du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_0}\right)^2}} ;$$

$$B = 2k \frac{1}{u_0(1 + \cos \phi)} \frac{u_0 \sin \phi d\phi}{\sin \phi} = 2k \frac{d\phi}{1 + \cos \phi}.$$

Comme $\cos \phi = 2\cos^2 \frac{\phi}{2} - 1$, on a : $\frac{d\phi}{1 + \cos \phi} = \frac{2d(\frac{\phi}{2})}{2\cos^2 \frac{\phi}{2}} = d\left(\tan \frac{\phi}{2}\right)$, on obtient :

$$B = 2k d\left(\tan \frac{\phi}{2}\right).$$

Mais on sait que $\tan \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}}$, et que $\cos \phi = \frac{r_0}{r}$, donc :

$$B = 2k d\left(\tan \frac{\phi}{2}\right) = 2k \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}} = 2k \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 + \frac{r_0}{r}}} = 2k \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}.$$

Au temps de parcours de la lumière, de r_0 à r (ou inversement), nous devons donc ajouter un correctif égal à $\frac{2k}{c} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}$; ce correctif est compris entre 0 et $\frac{2k}{c}$: il est proche de $\frac{2k}{c} = \frac{2GM}{c^3}$ quand r est grand par rapport à r_0 .

Etudions maintenant le troisième terme (C) :

$$C = 2ku \frac{u_0 dr}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = 2k \frac{u \left(-\frac{du}{u^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_0}\right)^2}} = 2k \frac{-du}{u \sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_0}\right)^2}} ;$$

$$C = 2k \frac{u_0 \sin \phi d\phi}{u_0 \cos \phi \sin \phi} = 2k \frac{d\phi}{\cos \phi}.$$

On sait que $\frac{d\phi}{\cos \phi} = d\text{Log} \left| \tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$; de plus :

$$\tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\phi}{2} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\phi}{2} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \tan \frac{\phi}{2}}{1 - \tan \frac{\phi}{2}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}}{1 - \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}} = \frac{\sqrt{r + r_0} + \sqrt{r - r_0}}{\sqrt{r + r_0} - \sqrt{r - r_0}} ;$$

$$\tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{(\sqrt{r + r_0} + \sqrt{r - r_0})^2}{(r + r_0) - (r - r_0)} = \frac{r + r_0 + 2\sqrt{(r + r_0)(r - r_0)} + r - r_0}{2r_0} = \frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} ;$$

$$\tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{r}{r_0} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} \right), \text{ donc :}$$

$$C = 2k d \left[\text{Log} \left(\frac{r}{r_0} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} \right) \right) \right].$$

Pour $r = r_0$, le crochet s'annule ; pour r très grand par rapport à r_0 , il est voisin de $2\frac{r}{r_0}$. Donc au temps de parcours de la lumière entre r_0 et r ($r \gg r_0$),

nous devons ajouter un nouveau correctif proche de $\frac{2k}{c} \text{Log} \left(2 \frac{r}{r_0} \right)$.

C'est ce terme correctif C qui est "l'effet Shapiro principal", et je réserverai le nom d'"effet Shapiro secondaire" au terme B .

En pratique, l'effet Shapiro se mesure de la façon suivante : au moment où une sonde spatiale, ou une planète (par exemple Mercure), va être occultée par le Soleil, on envoie un faisceau radar vers la cible, et on mesure le temps d'aller-retour. Notons par exemple r_m la distance de Mercure au Soleil, et r_t la distance de la Terre au Soleil ; au moment de l'occultation, on a : $r_0 = r_s$ (rayon du Soleil). Le parcours de la lumière se décompose en quatre parties : Terre-Soleil, Soleil-Mercure, Mercure-Soleil, Soleil-Terre ; donc l'anomalie du temps de parcours doit être :

$$\frac{4k}{c} \text{Log} \left(2 \frac{r_t}{r_s} \right) + \frac{4k}{c} \text{Log} \left(2 \frac{r_m}{r_s} \right) = \frac{4k}{c} \text{Log} \left(4 \frac{r_t r_m}{r_s^2} \right) = \frac{4GM}{c^3} \text{Log} \left(4 \frac{r_t r_m}{r_s^2} \right)$$

(où M est la masse du Soleil).

Pour l'effet Shapiro secondaire, on obtient : $4 \cdot \frac{2GM}{c^3} = \frac{8GM}{c^3}$.

En regroupant les effets Shapiro principal et secondaire, on trouve un retard de l'écho radar de l'ordre de :

$$\Delta T = \frac{4GM}{c^3} \left[\text{Log} \left(4 \frac{r_t r_m}{r_s^2} \right) + 2 \right].$$

Cette formule est la même qu'en relativité générale.

On peut, bien sûr, remplacer Mercure par une sonde spatiale ; c'est ainsi que l'effet Shapiro a pu être vérifié avec une bonne précision, en 1975, par la sonde Viking. Mais c'est aujourd'hui l'étude des pulsars binaires qui fournit la confirmation la plus précise (et de loin).

Remarquons une chose étrange : si nous faisons tendre r_s vers 0 dans la formule ci-dessus, il est clair que ΔT tend vers l'infini. Ceci signifie que, si nous remplaçons le Soleil par une particule de rayon nul et de masse non nulle, le temps mis par la lumière pour nous en parvenir sera infini. On peut se demander si cette "absurdité" vient du fait que nous avons fait des approximations dans notre calcul ; mais ce n'est pas le cas ! Ceci est vrai, d'ailleurs, aussi bien en relativité générale que dans le modèle proposé ici.

Examinons cette curiosité d'un peu plus près. Considérons une sphère de rayon r , au centre de laquelle se trouve une masse M ponctuelle. Rappelons que r est le rayon estimé par l'observateur distant. Pour celui-ci, l'aire de cette sphère est : $4\pi r^2$; pour des observateurs locaux (situés sur la sphère) les distances élémentaires sont multipliées par le coefficient $e^{\frac{k}{r}} = e^{\frac{GM}{rc^2}} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$,

donc l'aire élémentaire est multipliée par le carré de ce coefficient. L'aire totale (obtenue en sommant les mesures locales des observateurs locaux) est donc : $A = 4\pi r^2 e^{\frac{2GM}{rc^2}}$. Evaluons maintenant le volume infinitésimal compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$; pour l'observateur local, la différence des rayons n'est pas dr , mais $e^{\frac{GM}{rc^2}} dr$; donc le volume infinitésimal est : $dV = 4\pi r^2 e^{\frac{2GM}{rc^2}} e^{\frac{GM}{rc^2}} dr = 4\pi r^2 e^{\frac{3GM}{rc^2}} dr$. Mais on s'aperçoit que la quantité $r^2 e^{\frac{3GM}{rc^2}} = r^2 e^{-\frac{3\Phi}{c^2}}$ tend vers l'infini quand r tend vers 0 ! Ceci signifie que l'aire d'une sphère (évaluée en sommant les observations locales) ayant en son centre une particule massive ponctuelle tend vers l'infini quand son rayon tend vers 0 ! Ceci serait extrêmement troublant... si les particules massives et ponctuelles existaient ! Mais tout nous porte à croire que les densités infinies n'existent pas...

14 La "création d'espace"

Comme nous venons de le voir, l'effet Shapiro permet de prendre sur le fait un phénomène très curieux : lorsque la lumière passe à proximité d'un corps massif, elle a un excédent de distance à parcourir, comme si la présence de matière produisait une dilatation de l'espace dans son voisinage.

Bien entendu, au lieu de dire que l'espace se dilate (c'est le point de vue de l'observateur local), on pourrait dire que les objets qu'il contient rétrécissent (c'est le point de vue de l'observateur distant). Ces deux points de vue sont complémentaires.

Ce phénomène que j'appelle "création d'espace" n'est pas un rêve : il existe bel et bien, et a été vérifié avec une grande précision, en particulier grâce à l'étude des pulsars binaires. C'est l'extrapolation à des corps beaucoup plus compacts qui reste à étudier : dans ce cas, la métrique de Ni et celle de Schwarzschild divergent, ce qui a de profondes répercussions sur la conception des trous noirs, par exemple.