

Etude des systèmes binaires en métrique de Ni

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, mars 2008)

Table des matières

1	Avertissement	1
2	Résumé	2
3	Modèle newtonien des systèmes binaires	3
4	Modèle relativiste des systèmes binaires	9
5	Précession du périastre des pulsars binaires	13
6	Décalage gravitationnel des pulsars binaires	13
7	Effet Einstein à la surface des étoiles à neutrons	16
8	Effet Shapiro chez les pulsars binaires	18
9	Précession géodétique des pulsars binaires	21
10	La conservation de l'énergie et/ou de la masse	27
11	Conjecture sur le problème des trois corps	29

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

01) [Gravitation relativiste : introduction](#)

- Relativité restreinte :

02) [Les vitesses en Relativité restreinte](#)

- Physique quantique :

03) Physique quantique : généralités

04) Physique quantique : l'aventure collective

- Gravitation :

05) La relativité générale a-t-elle été prise en défaut ?

06) Gravitation relativiste : principes fondamentaux

07) Gravitation et critère de Schild

08) L'hypothèse du champ d'entraînement

09) Métriques et géodésiques

10) Tenseur de Ricci

11) Potentiel gravitationnel

12) Ni ou Schwarzschild ?

13) Gravitation et vide quantique

14) L'hypothèse du flux à double sens

15) Étude du système solaire en métrique de Ni

16) Étude des systèmes binaires en métrique de Ni

17) Sur la matière noire

18) Trous noirs et trous gris

19) Ondes gravitationnelles

20) Gravitation et cosmologie

2 Résumé

Nous proposons ici un modèle des systèmes binaires déduit de la métrique de Ni, et nous montrons qu'il est compatible, comme la relativité générale, avec

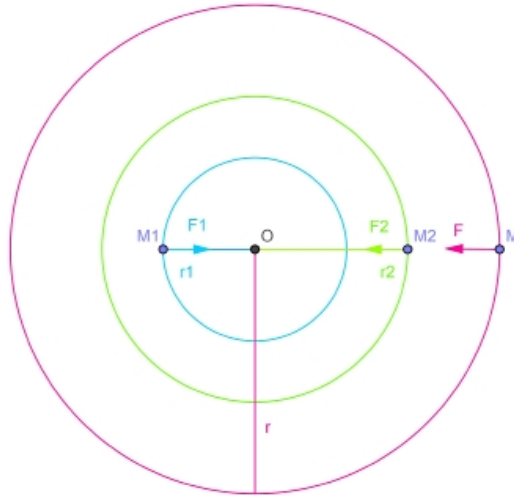
l'ensemble des observations. La question de l'accélération séculaire des pulsars binaires sera traitée dans le document sur les ondes gravitationnelles.

3 Modèle newtonien des systèmes binaires

Ici commence l'étude des systèmes binaires (plus particulièrement des pulsars binaires), systèmes qui constituent d'extraordinaires laboratoires où sont testées avec une précision inégalée les différentes théories de la gravitation. Nous nous contenterons, dans cette section, de rappeler quelques généralités classiques, établies par Newton.

Un système binaire est formé de deux corps célestes tournant autour de leur centre de gravité commun. Ce système peut être composé de deux étoiles quelconques (étoile double), d'un pulsar et d'une autre étoile (pulsar binaire), de deux pulsars (pulsar double)...

Nous considérerons deux étoiles M_1 et M_2 , de masses m_1 et m_2 , liées gravitationnellement (et supposées isolées dans l'espace).



La première idée de Newton est de se placer dans un repère lié à leur centre de gravité O . Ce point, situé sur la droite (M_1M_2) , est tel que $\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{m_2}{m_1}$, ou, en posant $r_1 = OM_1$ et $r_2 = OM_2$: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

De plus, si on note \vec{v}_O la vitesse de O , \vec{v}_1 celle de M_1 , \vec{v}_2 celle de M_2 , alors : $(m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_O = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$; puisque nous avons choisi un repère lié à O ,

nous aurons : $\vec{v}_O = \vec{0}$, donc $m_1 \cdot \vec{v}_1 = -m_2 \cdot \vec{v}_2$.

Les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont donc parallèles, de sens contraire, et leurs modules v_1 et v_2 vérifient : $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1}{r_2}$.

Notons \vec{F}_1 la force gravitationnelle exercée par M_2 sur M_1 , et \vec{F}_2 la force gravitationnelle exercée par M_1 sur M_2 ; ces forces sont parallèles, de sens contraire, et de même module : $F_1 = F_2 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2}$; elles transmettent aux deux mobiles les accélérations $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$ (parallèles et de sens contraire), qui ont pour modules : $\gamma_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{G \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2}$ et $\gamma_2 = \frac{F_2}{m_2} = \frac{G \cdot m_1}{(r_1 + r_2)^2}$.

On en déduit que $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{m_2}{m_1}$, et, par suite : $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

Ceci suffit à prouver que les trajectoires des deux mobiles sont homothétiques; le centre de l'homothétie est O , et son rapport est $-\frac{m_2}{m_1} = -\frac{r_1}{r_2}$ (ou $-\frac{m_1}{m_2} = -\frac{r_2}{r_1}$).

Si nous posons $r = r_1 + r_2$ et $m = m_1 + m_2$, il est facile de vérifier que $\frac{r_1}{r} = \frac{m_2}{m}$ et que $\frac{r_2}{r} = \frac{m_1}{m}$. En effet :

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{1}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{m_2}{m_2 + m_1} = \frac{m_2}{m}.$$

La seconde idée de Newton est d'imaginer un troisième mobile (fictif) M (de masse quelconque), situé par exemple sur la demi-droite $[OM_2]$, tel que $OM = r_1 + r_2 = r$, et se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (de module : $v = v_1 + v_2$). Nous voulons que la trajectoire de M soit homothétique aux deux précédentes; pour cela, il faut que l'accélération de M soit : $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_2 - \vec{\gamma}_1$, ou, plus simplement, de module :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{G \cdot m_2}{(r_1 + r_2)^2} + \frac{G \cdot m_1}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{G \cdot (m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{G \cdot m}{r^2}.$$

Ce mobile fictif va donc se déplacer exactement comme s'il subissait l'attraction d'une masse $m = m_1 + m_2$ immobile, située au point O . Or il est facile d'étudier la trajectoire de ce mobile, sur le modèle du système solaire (car seule l'attraction du corps central immobile est prise en compte); ensuite, les trajectoires de M_1 et M_2 se déduisent de la précédente par deux homothéties de rapports : $\pm \frac{r_1}{r} = \pm \frac{m_2}{m}$ et $\pm \frac{r_2}{r} = \pm \frac{m_1}{m}$.

On peut aussi remarquer que $\gamma_1 = \frac{G \cdot m_2}{r^2} = \frac{G \cdot m_2}{r_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{G \cdot m_2}{r_1^2} \cdot \frac{m_2^2}{m^2}$. Ceci montre que le premier mobile se comporte comme s'il était attiré par un corps de masse $m_2 \cdot \frac{m_2^2}{m^2}$, immobile au point O . De même, le second mobile se comporte comme s'il était attiré par un corps de masse $m_1 \cdot \frac{m_1^2}{m^2}$, immobile au point O .

On peut remarquer que l'étude du mouvement du mobile fictif M dans un repère immobile lié au centre de gravité O équivaut rigoureusement à l'étude du mouvement de M_2 dans un repère mobile lié à M_1 , ou à l'étude du mouvement de M_1 dans un repère mobile lié à M_2 . Comme ces repères mobiles sont aussi accélérés, on comprend facilement que, selon la règle de composition des accélérations, l'accélération de M_2 (resp. M_1) dans le repère lié à M_1 (resp. M_2) est $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. C'est aussi l'accélération du mobile fictif dans le repère lié à O .

Calculons les énergies cinétiques (newtoniennes) E_{c1} et E_{c2} des deux étoiles :

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \left(\frac{m_2}{m} \cdot v \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \frac{m_2^2}{m^2} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2}{m} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m} \cdot v^2 ;$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{m_1}{m} \cdot v \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{m_1^2}{m^2} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{m} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m} \cdot v^2.$$

Notons E_c l'énergie cinétique totale du système :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2}{m} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m} \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{m} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m} \cdot v^2 ;$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} \right) \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m} \cdot v^2.$$

On pourra considérer que c'est l'énergie cinétique du mobile fictif, à condition de lui attribuer une masse fictive : $m' = \frac{m_1 \cdot m_2}{m}$ (appelée : masse réduite). C'est ce que nous ferons : nous admettrons que le mobile fictif a pour masse $m' = \frac{m_1 \cdot m_2}{m} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ (vérifiant donc : $\frac{1}{m'} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$), et subit l'attraction d'un corps immobile de masse $m = m_1 + m_2$, situé au point O .

On aura remarqué que $E_{c1} = \frac{m_2}{m} \cdot E_c$ et que $E_{c2} = \frac{m_1}{m} \cdot E_c$.

Calculons les énergies potentielles E_{p1} et E_{p2} des deux étoiles :

$$E_{p1} = \int_{r_1}^{\infty} -F_1 \cdot dx = \int_{r_1}^{\infty} -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot dx,$$

où dx représente un déplacement élémentaire de l'étoile M_1 sur l'axe (OM_1) : $x = OM_1 = \frac{m_2}{m} \cdot M_1 M_2 = \frac{m_2}{m} \cdot r$. Nous faisons varier x de r_1 à l'infini (où l'énergie potentielle est censée s'annuler).

$$E_{p1} = \int_{r_1}^{\infty} -F_1 \cdot dx = - \int_{r_1}^{\infty} \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{\left(\frac{m}{m_2} \cdot x \right)^2} \cdot dx = - \int_{r_1}^{\infty} \frac{m_2^2}{m^2} \cdot \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{x^2} \cdot dx ;$$

$$E_{p1} = -\frac{m_2^2}{m^2} \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \int_{r_1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{m_2^2}{m^2} \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left[-\frac{1}{x} \right]_{r_1}^{\infty} = -\frac{m_2^2}{m^2} \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{1}{r_1} ;$$

$$E_{p1} = -\frac{m_2^2}{m^2} \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{1}{\frac{m_2}{m} \cdot r} = -\frac{m_2}{m} \cdot \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}.$$

De même, pour la seconde étoile :

$$E_{p2} = -\frac{m_1}{m} \cdot \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}.$$

Pour le mobile fictif, le calcul est plus facile (et nous ramène à notre étude préliminaire) :

$$E_p = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r} = -\frac{G \cdot m \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m}}{r} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}.$$

Comme on le voit, $E_p = E_{p1} + E_{p2}$; de plus : $E_{p1} = \frac{m_2}{m} \cdot E_p$ et $E_{p2} = \frac{m_1}{m} \cdot E_p$.

L'énergie (aussi bien cinétique que potentielle) de chacun des deux astres est proportionnelle à la masse de l'autre.

Si on le désire, on peut poser : $G_1 = \frac{m_2}{m} \cdot G$ et $G_2 = \frac{m_1}{m} \cdot G$. On a alors :

$$G_1 + G_2 = G, E_{p1} = -\frac{G_1 \cdot m_1 \cdot m_2}{r}, E_{p2} = -\frac{G_2 \cdot m_1 \cdot m_2}{r}, E_p = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}.$$

Calculons les moments cinétiques μ_1 et μ_2 des deux étoiles par rapport au point O ; nous notons α l'angle formé par le vecteur vitesse \vec{v} avec la normale au rayon vecteur \vec{r} :

$$\mu_1 = m_1 \cdot v_1 \cdot r_1 \cdot \cos\alpha = m_1 \cdot \frac{m_2}{m} \cdot v \cdot \frac{m_2}{m} \cdot r \cdot \cos\alpha = \frac{m_2}{m} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m} \cdot v \cdot r \cdot \cos\alpha ;$$

$$\mu_1 = \frac{m_2}{m} \cdot m' \cdot v \cdot r \cdot \cos\alpha.$$

De même :

$$\mu_2 = \frac{m_1}{m} \cdot m' \cdot v \cdot r \cdot \cos\alpha.$$

Bien sûr, le moment cinétique du mobile fictif est :

$$\mu = m' \cdot v \cdot r \cdot \cos\alpha.$$

On voit que $\mu = \mu_1 + \mu_2$; de plus : $\mu_1 = \frac{m_2}{m} \cdot \mu$ et $\mu_2 = \frac{m_1}{m} \cdot \mu$.

Le moment cinétique de chacun des deux astres est proportionnel à la masse de l'autre.

La troisième loi de Kepler : $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm}$, appliquée au mobile fictif M (masse centrale : $m = m_1 + m_2$, demi-grand-axe de l'orbite : $a = a_1 + a_2$) permet en principe de calculer m connaissant a . En pratique, l'étude spectrale permet souvent de connaître la variation des vitesses radiales des deux étoiles, donc, en intégrant, la variation de leurs distances par rapport à l'observateur. On peut en déduire le quotient $\frac{m_1}{m_2}$, mais il faudrait connaître l'angle i (inclinaison de l'axe de l'orbite par rapport à la ligne de visée) pour en déduire la valeur de a_1 et de a_2 de manière certaine. Cet angle i est généralement mal connu; les binaires à

éclipses font exception : dans ce cas, on a $i = 90^\circ$, ce qui permet de calculer a et m avec précision ; connaissant $\frac{m_1}{m_2}$ et $m_1 + m_2$, on a alors accès aux masses individuelles des deux étoiles.

Dans le cas des pulsars binaires, l'une des deux étoiles est une étoile à neutrons visible comme pulsar, c'est-à-dire qu'elle émet un faisceau de lumière qui vient balayer la Terre à chaque tour de l'étoile sur son axe. Ces pulsations, d'une très grande régularité, peuvent être exploitées pour obtenir un grand nombre d'informations encore plus pointues, et pour tester la relativité générale et les autres théories de la gravitation.

Remarquons que, dans ces calculs, r_1 et r_2 peuvent être constants (orbites circulaires) ou variables (orbites elliptiques).

Examinons d'un peu plus près le cas particulier des orbites circulaires (en utilisant toujours les idées de Newton, dans un cadre non relativiste). Commençons par le mobile fictif. On vient de voir que son accélération est : $\gamma = \frac{G.m}{r^2}$; on sait que, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme : $\gamma = \frac{v_c^2}{r}$. On en déduit que $v_c^2 = \gamma.r = \frac{G.m}{r^2}.r = \frac{G.m}{r}$, donc la vitesse circulaire est :

$$v_c = \sqrt{\frac{G.m}{r}}.$$

Nous en déduisons les vitesses circulaires individuelles des deux étoiles par homothétie :

$$v_{c1} = \frac{r_1}{r}.v_c = \frac{m_2}{m}.v_c = \frac{m_2}{m}.\sqrt{\frac{G.m}{r}} ;$$

$$v_{c2} = \frac{r_2}{r}.v_c = \frac{m_1}{m}.v_c = \frac{m_1}{m}.\sqrt{\frac{G.m}{r}}.$$

Remarquons que, dans le cas des orbites circulaires, l'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2}.m'.v_c^2 = \frac{1}{2}.\frac{m_1.m_2}{m}.\frac{G.m}{r} = \frac{1}{2}.\frac{G.m_1.m_2}{r} = \frac{1}{2}.|E_p|.$$

Par conséquent :

$$E = E_p + E_c = -\frac{G.m_1.m_2}{r} + \frac{1}{2}.\frac{G.m_1.m_2}{r} = -\frac{1}{2}.\frac{G.m_1.m_2}{r} = -E_c = \frac{1}{2}.E_p.$$

Après la vitesse circulaire, calculons la vitesse de libération. On doit avoir :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}.\frac{m_1.m_2}{m}.v_l^2 - \frac{G.m_1.m_2}{r} = 0 \quad (\text{donc } E_c = |E_p|) ;$$

$$v_l^2 = \frac{2.m}{m_1.m_2} \cdot \frac{G.m_1.m_2}{r} = 2 \cdot \frac{G.m}{r} ;$$

$$v_l = \sqrt{2 \cdot \frac{G.m}{r}} ;$$

$$v_{l1} = \frac{m_2}{m} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{G.m}{r}} ;$$

$$v_{l2} = \frac{m_1}{m} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{G.m}{r}} .$$

Supposons maintenant que $m_1 = m_2$ (ce qui entraîne : $r_1 = r_2$ et $v_1 = v_2$).

Les égalités $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1.m_2}{m_1+m_2} \cdot v^2 - \frac{G.m_1.m_2}{r}$ et $\mu = \frac{m_1.m_2}{m_1+m_2} \cdot v.r.\cos\alpha$ (sachant que $v = v_1 + v_2 = 2.v_1$, $r = r_1 + r_2 = 2.r_1$, et $\alpha = 0$, puisque les deux orbites sont maintenant circulaires et de même rayon) deviennent :

$$\begin{cases} E = m_1.v_1^2 - \frac{G.m_1^2}{2.r_1} ; \\ \mu = 2.m_1.v_1.r_1. \end{cases}$$

Nous pouvons exprimer la vitesse circulaire du mobile fictif en fonction du rayon :

$$v_c = \sqrt{\frac{Gm}{r}} = \sqrt{\frac{Gm_1}{r_1}} = \sqrt{\frac{Gm_2}{r_2}} ,$$

donc les vitesses individuelles des deux étoiles s'écrivent :

$$v_1 = v_2 = \frac{1}{2} \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{Gm_1}{r_1}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{Gm_2}{r_2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{Gm_1} \cdot (r_1)^{-\frac{1}{2}} .$$

Exprimons aussi l'énergie, le moment cinétique et la période en fonction de r_1 :

$$E = m_1.v_1^2 - \frac{G.m_1^2}{2.r_1} = \frac{G.m_1^2}{4r_1} - \frac{G.m_1^2}{2.r_1} = -\frac{G.m_1^2}{4r_1} = -\frac{G.m_1^2}{4} \cdot (r_1)^{-1} ;$$

$$\mu = 2.m_1.v_1.r_1 = m_1 \cdot \sqrt{\frac{Gm_1}{r_1}} \cdot r_1 = m_1 \cdot \sqrt{G.m_1.r_1} = m_1 \cdot \sqrt{G.m_1} \cdot (r_1)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = 4\pi r_1 \cdot \sqrt{\frac{r_1}{G.m_1}} = \frac{4\pi}{\sqrt{G.m_1}} \cdot (r_1)^{\frac{3}{2}} .$$

Imaginons maintenant qu'il soit possible de faire varier r_1 , tout en conservant une orbite circulaire.

Nous savons qu'une égalité de la forme $a = K.b^n$ (où a et b sont deux variables, et K une constante) donne, par différentiation (en passant, par exemple, par le logarithme) :

$$\frac{da}{a} = n \cdot \frac{db}{b} .$$

En appliquant cette règle aux égalités ci-dessus, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_1}{v_1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dr_1}{r_1} ; \\ \frac{dE}{E} = -\frac{dr_1}{r_1} ; \\ \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dr_1}{r_1} ; \\ \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} \cdot \frac{dr_1}{r_1} . \end{array} \right.$$

De plus, il est clair que $\frac{dv_1}{v_1} = \frac{dv_2}{v_2} = \frac{dv}{v}$, $\frac{dE_1}{E_1} = \frac{dE_2}{E_2} = \frac{dE}{E}$, $\frac{d\mu_1}{\mu_1} = \frac{d\mu_2}{\mu_2} = \frac{d\mu}{\mu}$ et $\frac{dr_1}{r_1} = \frac{dr_2}{r_2} = \frac{dr}{r}$.

Lorsque r décroît ($dr < 0$), alors v croît ($dv > 0$), E décroît ($dE < 0$, car E est l'énergie newtonienne, négative), μ décroît ($d\mu < 0$), T décroît ($dT < 0$).

Remarquons encore que $\frac{dT}{T} = 3 \cdot \frac{d\mu}{\mu}$.

Les égalités que nous venons de voir sont encore valables dans le cas d'une orbite elliptique d'excentricité (e) constante et de demi-grand axe (a) variable. Vérifions-le rapidement.

La troisième loi de Képler indique que T^2 est proportionnel à a^3 ; donc $2 \cdot \frac{dT}{T} = 3 \cdot \frac{da}{a}$, autrement dit : $\frac{dT}{T} = 1,5 \cdot \frac{da}{a}$.

D'après la seconde loi de Képler (loi des aires) : $\mu = r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = 2 \cdot \frac{dA}{dt} = 2 \cdot \frac{A}{T}$, où dA désigne l'aire balayée par le rayon vecteur pendant le temps dt , et A l'aire totale de l'ellipse. Donc $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dA}{A} - \frac{dT}{T}$. Comme A est proportionnel à a^2 , on a : $\frac{dA}{A} = 2 \cdot \frac{da}{a}$; par conséquent : $\frac{d\mu}{\mu} = 2 \cdot \frac{da}{a} - \frac{dT}{T} = 2 \cdot \frac{da}{a} - 1,5 \cdot \frac{da}{a} = 0,5 \cdot \frac{da}{a}$.

Donc on a bien $\frac{dT}{T} = 3 \cdot \frac{d\mu}{\mu}$, dans ce cas aussi.

Nous admettons que ces conclusions (non relativistes) sont valables lorsque les vitesses des deux étoiles sont faibles par rapport à c . C'est bien le cas pour les pulsars binaires; nous les étudierons donc en nous appuyant sur cette approximation newtonienne, même si nous ne sommes pas en mesure de prouver sa validité de manière rigoureuse.

4 Modèle relativiste des systèmes binaires

Comme on va le voir par la suite, l'étude des pulsars binaires, basée d'une part sur un modèle relativiste simple de type "système solaire" (celui que nous avons ébauché précédemment), d'autre part sur le modèle newtonien des systèmes doubles, est validée par un grand nombre d'observations. Par conséquent,

l'idée de construire un modèle relativiste des systèmes doubles sur ces bases simples s'en trouve confortée. Mais, attention : il ne faudrait pas croire qu'il existe, mathématiquement, une façon unique de passer du modèle du système solaire (qui nous a donné satisfaction) à un modèle général des systèmes doubles. En effet, dans notre modèle du système solaire, nous avons étudié le mouvement d'une planète de masse négligeable autour du Soleil supposé immobile. C'est donc un cas particulier de système double. On devra pouvoir passer du modèle général des systèmes doubles (deux corps de masses M et m quelconques) au cas particulier étudié jusqu'ici en faisant tendre le rapport $\frac{m}{M}$ vers 0. Mais, s'il existe une seule façon de descendre du cas général au cas particulier, il peut y en avoir, en théorie, une infinité pour remonter du cas particulier au cas général.

Nous allons étudier un système de deux étoiles (M_1, M_2); plus précisément, nous voulons décrire le mouvement de M_2 dans un repère lié à M_1 . Nous supposons que le système est isolé dans l'espace, ce qui signifie que l'orbite de M_2 est régie uniquement par le champ gravitationnel produit par M_1 ; l'action du reste de l'Univers étant supposée négligeable. Dans notre raisonnement, le seul champ gravitationnel pris en compte est celui de M_1 , donc l'immobilité gravitationnelle sera totalement définie par ce champ : "immobile" signifiera donc "immobile par rapport à M_1 ".

Est-il raisonnable de négliger l'influence gravitationnelle du reste de l'Univers? Dans la plupart des cas, oui! Pour le comprendre, il suffit de s'inspirer du fameux paradoxe d'Olbers : "Pourquoi le ciel est-il noir la nuit?" Contentons-nous de rappeler que, pour un observateur terrestre, la luminosité de toutes les étoiles lointaines réunies, aussi nombreuses soient-elles, est négligeable par rapport à celle de la seule étoile "proche" : le Soleil. La gravitation, comme la luminosité des étoiles, obéit à une loi en $\frac{1}{r^2}$. On peut donc admettre, de la même façon, que, pour un observateur situé dans l'Univers, relativement près d'une étoile, l'influence gravitationnelle de toutes les étoiles lointaines réunies sera négligeable par rapport à celle de la seule étoile proche.

L'étude du mouvement de M_2 dans un repère lié à M_1 équivaut à l'étude du mouvement du mobile fictif dans un repère immobile lié au centre de gravité O , et la pseudo-accélération à prendre en compte, comme on va le voir, est la somme des pseudo-accélération partielles : $\frac{G.m_1}{r^2} + \frac{G.m_2}{r^2} = \frac{G.m}{r^2}$.

Le rôle du Soleil dans le modèle du système solaire sera donc attribué à M_1 . Mais il y a une différence : dans le modèle du système solaire, la masse de la planète, supposée négligeable, n'exerce aucune action sur le Soleil, qui peut donc être considéré comme plongé dans un potentiel nul. Dans un système binaire quelconque, aucune des deux masses n'est négligeable par rapport à l'autre, donc l'étoile placée arbitrairement au centre n'est pas plongée dans un potentiel nul; il faut faire une manipulation pour ramener les calculs à un potentiel nul (ce qui est nécessaire pour comprendre ce que va voir un observateur distant).

On peut dire que le mouvement de M_2 , dans un repère lié à M_1 , est régi par l'action gravitationnelle de M_1 sur M_2 , donc par le potentiel $-\frac{G.m_1}{r}$. Ceci signifie que, du point de vue de M_1 , la trajectoire de M_2 s'explique par la contraction des règles locales dans la région de l'espace qu'il traverse (coefficient : $e^{-\frac{G.m_1}{r}}$) et par le ralentissement des horloges dans cette même région (coefficient : $e^{\frac{G.m_1}{r}}$). Mais le point de vue de M_1 est lui-même biaisé, car il juge par comparaison avec ses propres règles et horloges, qui, pour un observateur distant, semblent elles-mêmes modifiées par l'action de M_2 : ses règles sont contractées (coefficient : $e^{-\frac{G.m_2}{r}}$) et ses horloges ralenties (coefficient : $e^{\frac{G.m_2}{r}}$). En définitive, ces transformations (qui sont des homothéties) se composent, donc leurs coefficients se multiplient, ce qui donne : $e^{-\frac{G.m_1}{r}}.e^{-\frac{G.m_2}{r}} = e^{-\frac{G.m}{r}}$ pour les règles, et $e^{\frac{G.m_1}{r}}.e^{\frac{G.m_2}{r}} = e^{\frac{G.m}{r}}$ pour les horloges. C'est un coup de billard à deux bandes !

Ce raisonnement vaut pour M_2 , mais aussi pour M_1 ; tout se passe donc comme si les deux étoiles évoluaient dans un même potentiel, qui s'écrit ainsi : $\Phi = -\frac{G.(m_1+m_2)}{r} = -\frac{G.m}{r}$.

Pour étudier le mouvement de M_2 autour de M_1 , ou, si on préfère, le mouvement du mobile fictif autour du centre de gravité, nous reprenons les équations du mouvement d'une planète autour du Soleil, avec une pseudo-accélération égale à $\frac{G.m}{r^2}$, et un potentiel égal à $-\frac{G.m}{r}$. Ce potentiel peut être considéré comme une quantité caractérisant l'interaction entre les deux étoiles.

L'énergie et le moment cinétique du mobile fictif seront alors données par les formules :

$$\begin{cases} 1) E = m'.c^2.e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.ch\frac{w}{c} ; \\ 2) \mu = m'.c.e^{\frac{G.m}{r.c^2}}.r.sh\frac{w}{c}.sin\alpha. \end{cases}$$

Pour être cohérents, nous devons considérer que w représente la rapidité relative des deux mobiles, évaluée par un observateur situé dans le même potentiel $\Phi = -\frac{G.m}{r}$.

D'autre part, la distance r doit être évaluée par un observateur distant unique ; mais notre raisonnement fait intervenir deux observateurs distants, l'un lié à M_1 , l'autre à M_2 . Aucun des deux ne convient : nous devons considérer un observateur distant "neutre", c'est-à-dire celui qui est lié au centre de gravité du système.

Vérifions que ces équations sont cohérentes avec celles de Newton, en sup-

posant $G.m \ll r.c^2$ et $w \ll c$:

$$E \approx m'.c^2. \left(1 - \frac{G.m}{r.c^2}\right). \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}\right) \approx m'.c^2. \left(1 - \frac{G.m}{r.c^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}\right) ;$$

$$E \approx m'.c^2 - \frac{G.m.m'}{r} + \frac{1}{2}.m'.v^2.$$

Le premier terme : $m'.c^2$, correspond à l'énergie de masse du mobile fictif ; bien sûr, il ne figure pas dans les équations de Newton. Le second terme : $-\frac{G.m.m'}{r}$, correspond à son énergie potentielle ; et le troisième : $\frac{1}{2}.m'.v^2$, s'identifie à son énergie cinétique newtonienne.

Pour le moment cinétique, nous obtenons :

$$\mu \approx m'.c.r.\frac{v}{c}.sin\alpha \approx m'.v.r.sin\alpha.$$

Cette formule est bien celle de Newton.

Comme nous parlons ici du mobile fictif, sa masse m' est également fictive, et nous pouvons l'éliminer : elle n'intervient pas dans le calcul de l'orbite. On utilisera donc les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \bar{E} = e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.ch\frac{w}{c} = c^{te} ; \\ 2) \bar{\mu} = e^{\frac{G.m}{r.c^2}}.r.sh\frac{w}{c}.sin\alpha = c^{te}. \end{array} \right.$$

Après avoir calculé l'orbite du mobile fictif, on déduit celles des deux étoiles par des homothéties de rapports $\pm \frac{m_2}{m}$ et $\mp \frac{m_1}{m}$.

Retenons que r est estimé par un observateur distant lié au centre de gravité du système, et que w est estimé dans un potentiel $\Phi = -\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}$.

Nous dirons que $e^{-\frac{G.m}{r.c^2}}.ch\frac{w}{c}$ est le coefficient de liaison des deux étoiles. Ce coefficient est le chef d'orchestre du mouvement orbital des deux étoiles. Il est directement relié à la pseudo-force de liaison \vec{F} .

L'énergie de liaison n'appartient en propre ni à la première étoile, ni à la seconde : elle appartient au système, et caractérise l'interaction entre les deux astres. Les énergies individuelles des deux étoiles sont pour ainsi dire inséparables. Ceci vient du fait que les "pseudo-forces" sont définies à fois par les deux étoiles, et que l'"immobilité gravitationnelle" de chacune est définie intégralement par l'autre, puisque nous avons négligé, dans nos calculs, l'influence du reste de l'Univers.

5 Précession du périastre des pulsars binaires

La précession du périastre existe en principe dans tous les systèmes binaires, mais c'est dans le cas des pulsars binaires qu'elle prend des proportions particulièrement remarquables, ce qui permet de la mesurer assez facilement. Ceci vient du fait que ces pulsars binaires forment des couples très serrés, qui tournent très vite.

Dans la section sur la précession, nous avons vu la formule qui donne l'angle de précession (pour un tour d'orbite) : $\Delta\theta = \frac{6\pi Gm}{c^2 a(1-e^2)}$; nous appliquons cette formule au mobile fictif M ($m = m_1 + m_2$ et $a = a_1 + a_2$). D'autre part, la troisième loi de Kepler nous dit que $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm}$, ce qui va nous permettre d'éliminer a dans la formule précédente : $\frac{1}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GmT^2}$, donc $\frac{1}{a} = \left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot T^{-\frac{2}{3}}$. En substituant dans la formule de la précession, il vient :

$$\Delta\theta = \frac{6\pi Gm}{c^2(1-e^2)} \cdot \left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot T^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{c^2(1-e^2)} \cdot (2\pi)^{\frac{5}{3}} \cdot (Gm)^{\frac{2}{3}} \cdot T^{-\frac{2}{3}}.$$

Divisons par T pour obtenir la précession par unité de temps (notée $\dot{\omega}$) :

$$\dot{\omega} \approx \frac{3G^{\frac{2}{3}}(m_1 + m_2)^{\frac{2}{3}}}{c^2(1-e^2)} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{5}{3}}.$$

Les astronomes savent mesurer la période T , l'excentricité e , et la précession $\dot{\omega}$, si son amplitude est suffisante (comme c'est le cas chez les pulsars binaires) ; ceci leur permet alors de calculer la somme des masses des deux étoiles.

Un tel calcul ne permet pas, à lui seul, de tester les théories de la gravitation, pour plusieurs raisons : d'abord, il faut évaluer la somme des masses $m_1 + m_2$ par d'autres méthodes, pour croiser les résultats et vérifier leur cohérence ; ensuite, plusieurs théories peuvent conduire aux mêmes formules ; par exemple, la métrique de Ni et celle de Schwarzschild, comme nous l'avons vu, donnent une seule et même formule pour la précession du périastre.

6 Décalage gravitationnel des pulsars binaires

Une seconde technique permet d'évaluer indirectement les masses m_1 et m_2 (ou du moins d'établir une contrainte très stricte sur leurs valeurs possibles) : elle utilise le décalage gravitationnel, c'est-à-dire l'effet Einstein. Elle se base sur le fait que le rythme de l'écoulement du temps dépend du potentiel gravitationnel. Elle ne s'applique qu'aux pulsars binaires (ou aux pulsars doubles), car

c'est seulement dans ce cas qu'on dispose d'un "chronomètre embarqué" suffisamment précis. Nous supposons que le pulsar est M_1 , l'autre étoile étant M_2 . C'est le champ gravitationnel de M_2 qui perturbe la fréquence apparente des pulsations du pulsar M_1 : le "chronomètre" ralentit quand les deux étoiles se rapprochent (parce-que le champ gravitationnel est plus fort), et il accélère quand elles s'éloignent. On va donc comparer la fréquence des pulsations à l'apoastre et au périastre. Mais il faut se rappeler que cette fréquence apparente dépend aussi de la vitesse, d'après la relativité restreinte : au périastre, le déplacement du pulsar étant plus rapide qu'à l'apoastre, le chronomètre semble ralentir ; cet effet s'ajoute à l'effet Einstein.

Etudions d'abord l'effet Einstein proprement dit. C'est la distance entre le pulsar et l'autre étoile qui va intervenir ici ; donc il est pratique de supposer que cette autre étoile est fixe, et que le pulsar décrit autour d'elle une ellipse de demi-grand axe $a = a_1 + a_2$ (identique à l'orbite décrite par le mobile fictif M). Appelons b la distance maximale (apoastre) et d la distance minimale (périastre). On a donc : $a = \frac{b+d}{2}$, ou $b+d = 2a$. L'excentricité e de l'orbite est donnée par : $e = \frac{b-d}{b+d}$; par conséquent : $b - d = (b + d)e = 2ae$, $1 + e = \frac{2b}{b+d} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$, $1 - e = \frac{2d}{b+d} = \frac{2d}{2a} = \frac{d}{a}$, $1 - e^2 = (1 + e)(1 - e) = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{a} = \frac{bd}{a^2}$.

D'après la formule : $dt_{dist} = e^{\frac{k}{r}} dt_{loc} = e^{\frac{Gm}{rc^2}} dt_{loc}$, calculons, pour une même valeur de dt_{loc} (par exemple la période de pulsation du pulsar), le quotient des périodes apparentes (évaluées par un observateur terrestre) au périastre et à l'apoastre :

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}} dt_{loc}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}} dt_{loc}} \approx \left(1 + \frac{Gm_2}{dc^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{Gm_2}{bc^2}\right) \approx 1 + \frac{Gm_2}{dc^2} - \frac{Gm_2}{bc^2} \approx 1 + \frac{Gm_2}{c^2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) ;$$

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}} \approx 1 + \frac{Gm_2}{c^2} \cdot \frac{b-d}{bd} = 1 + \frac{Gm_2}{c^2} \frac{2ae}{a^2(1-e^2)} = 1 + \frac{2Gm_2e}{c^2a(1-e^2)}.$$

Nous avons vu précédemment que $\frac{1}{a} = \left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot T^{-\frac{2}{3}} = (Gm)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (où $m = m_1 + m_2$) ; nous pouvons donc écrire :

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}} \approx 1 + \frac{2Gm_2e}{c^2(1-e^2)} \cdot G^{-\frac{1}{3}} \cdot m^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

On peut encore remarquer que l'excentricité e est généralement assez proche de 0, donc $\frac{e}{1-e^2} \approx e \cdot (1+e^2) \approx e + e^3$; il n'est pas question de négliger e (qui est au centre de notre calcul), mais on pourra généralement négliger e^3 , ce qui revient à supprimer le facteur $(1 - e^2)$ du dénominateur.

$$\frac{e^{\frac{Gm_2}{dc^2}}}{e^{\frac{Gm_2}{bc^2}}} \approx 1 + \frac{2e}{c^2} \cdot G^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Nous allons maintenant étudier le ralentissement du chronomètre lié à la vitesse, selon la transformation de Lorentz, qu'on pourra résumer, dans le cas présent, par : $dt_{dist} = ch \frac{w}{c} \cdot dt_{loc} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \cdot dt_{loc}$. Calculons une nouvelle fois le quotient des périodes apparentes, évaluées par un observateur terrestre, au périastre et à l'apoastre :

$$\frac{ch \frac{w_{d_1}}{c} \cdot dt_{loc}}{ch \frac{w_{b_1}}{c} \cdot dt_{loc}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_{b_1}^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{d_1}^2}{c^2}}} \approx \left(1 - \frac{v_{b_1}^2}{2c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{v_{d_1}^2}{2c^2}\right) \approx 1 + \frac{v_{d_1}^2 - v_{b_1}^2}{2c^2}.$$

On aura compris que v_{b_1} et v_{d_1} désignent la vitesse du pulsar à l'apoastre et au périastre; on considère cette fois-ci l'orbite du pulsar autour du centre de gravité O (orbite dont le demi-grand-axe est a_1 ; b_1 correspond à son apoastre et d_1 à son périastre); nous allons calculer v_{b_1} et v_{d_1} grâce à la seconde loi de Kepler (loi des aires). L'aire totale de l'orbite (balayée pendant le temps T) est égale à $\pi a_1^2(1 - e^2)$; on a donc : $\frac{b_1 v_{b_1}}{2} = \frac{d_1 v_{d_1}}{2} = \frac{\pi a_1^2(1 - e^2)}{T}$, d'où on tire : $v_{d_1}^2 - v_{b_1}^2 = \left(\frac{2\pi a_1^2(1 - e^2)}{T}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{b_1^2}\right)$.

$$\frac{ch \frac{w_{d_1}}{c}}{ch \frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1 + \frac{4\pi^2 a_1^4(1 - e^2)^2}{2c^2 T^2} \cdot \frac{b_1^2 - d_1^2}{b_1^2 d_1^2}.$$

Nous avons vu que $b_1 = a_1(1 + e)$, que $d_1 = a_1(1 - e)$, et que $b_1 d_1 = a_1^2(1 - e^2)$; donc : $\frac{b_1^2 - d_1^2}{b_1^2 d_1^2} = \frac{a_1^2[(1+e)^2 - (1-e)^2]}{a_1^4(1-e^2)^2} = \frac{4e}{a_1^2(1-e^2)^2}$;

$$\frac{ch \frac{w_{d_1}}{c}}{ch \frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1 + \frac{4\pi^2 a_1^4(1 - e^2)^2}{2c^2 T^2} \cdot \frac{4e}{a_1^2(1 - e^2)^2} = 1 + \frac{2e}{c^2} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-2} \cdot a_1^2.$$

Nous savons que $\frac{a_1}{a} = \frac{m_2}{m}$; donc $a_1^2 = a^2 \cdot \left(\frac{m_2}{m}\right)^2$. D'autre part, $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm}$ (troisième loi de Kepler), donc $a^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot (Gm)^{\frac{2}{3}}$, et $a_1^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot (Gm)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2^2}{m^2}$.

$$\frac{ch \frac{w_{d_1}}{c}}{ch \frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1 + \frac{2e}{c^2} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot (Gm)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2^2}{m^2} = 1 + \frac{2e}{c^2} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (Gm)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2^2}{m^2};$$

$$\frac{ch \frac{w_{d_1}}{c}}{ch \frac{w_{b_1}}{c}} \approx 1 + \frac{2e}{c^2} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot G^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}}.$$

Combinons maintenant les deux effets, en multipliant les deux coefficients de ralentissement du "chronomètre" (le coefficient dû à l'effet Einstein, et le coefficient justifié par la relativité restreinte); nous obtenons :

$$\frac{e \frac{Gm_2}{dc^2}}{e \frac{Gm_2}{bc^2}} \cdot \frac{ch \frac{w_{d_1}}{c}}{ch \frac{w_{b_1}}{c}} \approx \left(1 + \frac{2e}{c^2} \cdot G^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) \cdot \left(1 + \frac{2e}{c^2} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot G^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}}\right);$$

$$\frac{e \frac{Gm_2}{dc^2} \cdot \frac{ch \frac{w_{d1}}{c}}{e \frac{Gm_2}{bc^2} \cdot \frac{ch \frac{w_{b1}}{c}}{c}} \approx 1 + \frac{2e}{c^2} \cdot G^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2e}{c^2} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot G^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}};$$

$$\frac{e \frac{Gm_2}{dc^2} \cdot \frac{ch \frac{w_{d1}}{c}}{e \frac{Gm_2}{bc^2} \cdot \frac{ch \frac{w_{b1}}{c}}{c}} \approx 1 + \frac{2e}{c^2} \cdot G^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}} + \frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}}\right).$$

Comme $\frac{m_2}{m^{\frac{1}{3}}} + \frac{m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}} = \frac{m_2 \cdot m + m_2^2}{m^{\frac{4}{3}}} = \frac{m_2 \cdot (m_1 + m_2) + m_2^2}{(m_1 + m_2)^{\frac{4}{3}}} = \frac{m_2 \cdot (m_1 + 2m_2)}{(m_1 + m_2)^{\frac{4}{3}}}$,
on obtient, finalement :

$$\frac{e \frac{Gm_2}{dc^2} \cdot \frac{ch \frac{w_{d1}}{c}}{e \frac{Gm_2}{bc^2} \cdot \frac{ch \frac{w_{b1}}{c}}{c}} \approx 1 + \frac{2e}{c^2} \cdot G^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{m_2 \cdot (m_1 + 2m_2)}{(m_1 + m_2)^{\frac{4}{3}}}.$$

Par conséquent, la mesure du retard gravitationnel entre l'apoastre et le périastre (et de la période T) permet de calculer la quantité $\frac{m_2 \cdot (m_1 + 2m_2)}{(m_1 + m_2)^{\frac{4}{3}}}$, ce qui est un renseignement précieux, surtout si on connaît déjà $m_1 + m_2$ grâce à la précession du périastre (voir section précédente) : on peut alors calculer individuellement la masse du pulsar (m_1) et celle de l'autre étoile (m_2).

7 Effet Einstein à la surface des étoiles à neutrons

Comme nous l'avons vu précédemment, à la surface d'une étoile à neutrons telle que $M = 1,4 M_\odot$ et $r = 14 km$, l'effet Einstein, calculé selon les métriques de Ni et de Schwarzschild, donne des résultats qui diffèrent de 17% ; un tel écart pourrait en principe être mis en évidence, ce qui permettrait de départager au moins ces deux théories. Malheureusement, la technique dont nous avons parlé dans la section précédente, appliquée aux pulsars binaires actuellement étudiés, permet de mesurer l'effet Einstein à une distance largement supérieure à 100 000 km , ce qui est beaucoup trop loin.

Si nous désirons départager vraiment les métriques de Ni et de Schwarzschild (ou seulement tester cette dernière dans le domaine des champs forts, ce qui est absolument indispensable), c'est directement à la surface des étoiles à neutrons qu'il faut mesurer l'effet Einstein. Cette expérience a été réalisée par le satellite XMM-Newton, qui a mesuré, sur le spectre d'une étoile à neutrons, un décalage vers le rouge des raies du fer et de l'oxygène : $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0,35$, soit un quotient $\frac{\lambda_{réception}}{\lambda_{émission}} = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} = 1 + z = 1,35$ (ce qui correspond au coefficient de dilatation du temps à la surface de l'astre, si on admet que le redshift dû à la vitesse radiale est négligeable). Bien que la masse et le rayon exacts de cette étoile soient inconnus, on peut essayer d'interpréter ce résultat.

Selon la métrique de Schwarzschild, le coefficient de dilatation du temps est donné par la formule : $\frac{\lambda_{réception}}{\lambda_{émission}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2k}{r}}}$; dans le cas présent, on a

$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}} \approx 1,35$; le calcul donne alors : $\frac{k}{r} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,35^2}\right) \approx 0,225$.

Selon la métrique de Ni, ce coefficient est donné par : $\frac{\lambda_{réception}}{\lambda_{émission}} = e^{\frac{k}{r}} = 1,35$, d'où on tire : $\frac{k}{r} = \text{Log } 1,35 \approx 0,300$.

D'autre part, M et r sont liés par la formule : $r \approx 16 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{\odot}}{M}}$. Il s'agit d'une formule approximative et provisoire, basée sur l'étude théorique (très difficile) de l'état de la matière à l'intérieur des étoiles à neutrons.

Remarquons au passage que, lorsque M augmente, r diminue : ce phénomène paradoxal est bien établi, et concerne aussi bien les étoiles à neutrons que les naines blanches.

Amusons-nous à calculer la masse approximative de cette étoile, dans le cadre de la métrique de Schwarzschild. Nous utiliserons les deux égalités suivantes, dans lesquelles $r = r_{dist}$ et $x = \frac{M}{M_{\odot}}$:

$$r_{loc} \approx 16 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{\odot}}{M}} = 16 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 16 \cdot x^{-\frac{1}{3}} ;$$

$$r_{loc} = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2k}{r}}}.$$

Dans le cas présent, nous avons : $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2k}{r}}} \approx 1,35$ et $\frac{k}{r} \approx 0,225$; donc :

$$r_{loc} \approx 16 \cdot x^{-\frac{1}{3}} \approx 1,35 \cdot r.$$

De plus : $\frac{k}{r} \approx 0,225$, donc $r \approx \frac{k}{0,225}$; d'autre part, $\frac{k}{k_{\odot}} = \frac{M}{M_{\odot}} = x$, donc $k = k_{\odot} \cdot x \approx 1,47 \cdot x$, et $r = \frac{1,47 \cdot x}{0,225}$, ce qui nous donne :

$$r_{loc} = 16 \cdot x^{-\frac{1}{3}} \approx 1,35 \cdot \frac{1,47 \cdot x}{0,225} \approx 8,82 \cdot x ;$$

$$x^{\frac{4}{3}} \approx \frac{16}{8,82} \approx 1,81 ;$$

$$x = \frac{M}{M_{\odot}} \approx 1,81^{0,75} \approx 1,56.$$

Calculons maintenant la masse approximative de cette étoile, dans le cadre de la métrique de Ni. Nous utiliserons les deux égalités suivantes, dans lesquelles on pose toujours $r = r_{dist}$ et $x = \frac{M}{M_{\odot}}$:

$$r_{loc} \approx 16 \cdot x^{-\frac{1}{3}} ;$$

$$r_{loc} = r \cdot e^{\frac{k}{r}}.$$

Dans le cas présent, on a $e^{\frac{k}{r}} \approx 1,35$, donc $r_{loc} \approx 1,35.r$.

De plus, on a vu que $\frac{k}{r} = \text{Log } e^{\frac{k}{r}} = \text{Log } 1,35 \approx 0,3$, donc $r \approx \frac{k}{0,3}$.

Comme précédemment, on a $k = k_{\odot}.x \approx 1,47.x$, donc $r \approx \frac{k}{0,3} \approx \frac{1,47.x}{0,3}$, ce qui entraîne :

$$r_{loc} \approx 1,35.r \approx \frac{1,35.1,47.x}{0,3} \approx 6,615.x.$$

On a donc :

$$r_{loc} \approx 16.x^{-\frac{1}{3}} \approx 6,615.x ;$$

$$x^{\frac{4}{3}} \approx \frac{16}{6,615} \approx 2,4 ;$$

$$x = \frac{M}{M_{\odot}} \approx 2,4^{0,75} \approx 1,9.$$

Dans cet exemple, les métriques de Ni et de Schwarzschild donnent, l'une comme l'autre, une valeur vraisemblable pour la masse de l'étoile. Pour arriver à un résultat réellement discriminant, il serait bon d'étudier des étoiles plus massives, car, au-delà de deux masses solaires, les deux métriques divergent fortement ; mais les étoiles à neutrons dépassent rarement $2.M_{\odot}$... Actuellement, la plupart des pulsars connus ont une masse proche de $1,4.M_{\odot}$; quelques-uns ont une masse supérieure, jusqu'à $2,14.M_{\odot}$ environ. La recherche et l'étude d'étoiles à neutrons encore plus massives, proches de la limite de formation des trous noirs (vers $2,8.M_{\odot}$) pourrait fournir des données essentielles.

8 Effet Shapiro chez les pulsars binaires

Nous considérons, ici encore, un système double formé d'un pulsar (M_1) et d'une autre étoile (M_2) ; nous supposons, pour simplifier, que l'orbite est circulaire ; nous appelons i l'angle formé par la normale au plan de l'orbite avec la ligne de visée. Si l'angle i était rigoureusement égal à 90° , le pulsar serait éclipsé par l'étoile à chaque révolution, donnant lieu à un effet Shapiro maximal : le temps de parcours de la lumière, du pulsar jusqu'à nous, serait fortement augmenté, juste avant et juste après l'éclipse. Si i est proche de 90° , l'effet Shapiro, sans être maximal, pourra cependant être observé. Si i est proche de 0° , il n'y aura pas d'effet observable. Ce phénomène existe chez tous les systèmes binaires, mais dans le cas d'un pulsar, le "chronomètre embarqué" permet une mesure beaucoup plus précise.

Nous appellerons "moitié distale de l'orbite" la moitié de l'orbite qui est la plus éloignée de l'observateur, et "moitié proximale" celle qui est la plus proche. La position du pulsar sur son orbite (circulaire) sera repérée par un angle ωt , l'origine étant le milieu de la moitié distale de l'orbite (point où le plan défini

par la normale à l'orbite et la ligne de visée, coupe l'orbite). Lorsque le pulsar se trouve dans la moitié distale de l'orbite, sa lumière met plus de temps pour nous parvenir, pour deux raisons : d'abord, le pulsar étant plus loin de nous, sa lumière a naturellement une distance plus grande à parcourir, ce qui va prendre plus de temps (c'est le "retard normal", tel qu'on pourrait le calculer en mécanique newtonienne, en se basant sur la géométrie d'Euclide); ensuite, l'autre étoile "crée de l'espace" dans son voisinage (d'où un "retard anormal", qui correspond à l'effet Shapiro proprement dit.

Etudions d'abord l'effet Shapiro proprement dit. Nous avons obtenu la formule : $\Delta T = \frac{4GM}{c^3} \left[2 + \text{Log}4 + \text{Log}\frac{r_t}{r_s} + \text{Log}\frac{r_m}{r_s} \right]$, pour un aller-retour Terre-Mercure-Terre (en passant au ras de la surface solaire); r_t était la distance Terre-Soleil, r_m la distance Mercure-Soleil, r_s le rayon du Soleil. Maintenant nous envisageons un aller simple pulsar-Terre, en passant près de l'étoile M_2 . Notons d_t la distance de la Terre par rapport à l'étoile M_2 , $r = r_1 + r_2$ la distance entre le pulsar et l'étoile M_2 , et d_{min} la distance minimale entre le rayon lumineux (pulsar \rightarrow Terre) et l'étoile M_2 .

Lorsque le pulsar se trouve dans la moitié distale de l'orbite, le retard Shapiro est donné par :

$$\Delta t_{dist} = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + \text{Log}4 + \text{Log}\frac{d_t}{r_{min}} + \text{Log}\frac{r}{r_{min}} \right] = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + \text{Log}4 + \text{Log}\frac{d_t \cdot r}{r_{min}^2} \right].$$

Lorsqu'il se trouve dans la moitié proximale, la formule devient :

$$\Delta t_{prox} = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + \text{Log}4 + \text{Log}\frac{d_t}{r_{min}} - \text{Log}\frac{r}{r_{min}} \right] = \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + \text{Log}4 + \text{Log}\frac{d_t}{r} \right].$$

On peut montrer assez facilement que $r_{min}^2 = r^2(\cos^2 \omega t \cdot \cos^2 i + \sin^2 \omega t)$; ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \Delta t_{dist} &= \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + \text{Log}4 + \text{Log}\frac{d_t \cdot r}{r^2(\cos^2 \omega t \cdot \cos^2 i + \sin^2 \omega t)} \right] ; \\ \Delta t_{dist} &= \frac{2Gm_2}{c^3} \left[2 + \text{Log}4 + \text{Log}\frac{d_t}{r} - \text{Log}(\cos^2 \omega t \cdot \cos^2 i + \sin^2 \omega t) \right] ; \\ \Delta t_{dist} &= \Delta t_{prox} - \frac{2Gm_2}{c^3} \text{Log}(\cos^2 \omega t \cdot \cos^2 i + \sin^2 \omega t). \end{aligned}$$

Mais les astronomes ne mesurent pas un retard Shapiro absolu : il n'ont accès qu'à un retard relatif, c'est-à-dire aux variations de ΔT d'un point de l'orbite à l'autre; ce retard est défini à une constante près. Le quotient $\frac{d_t}{r}$ n'est pas constant, puisqu'il s'agit de la distance de la Terre à l'étoile M_2 , qui tourne autour du centre de gravité du système; les variations de d_t , au cours d'une révolution, sont de l'ordre de r_2 ; comme $\text{Log}\frac{d_t \pm r_2}{r} = \text{Log}\frac{d_t(1 \pm \frac{r_2}{d_t})}{r} =$

$\text{Log} \frac{d_t}{r} + \text{Log} \left(1 \pm \frac{r_2}{d_t} \right) \approx \text{Log} \frac{d_t}{r} \pm \frac{r_2}{d_t} \approx \text{Log} \frac{d_t}{r}$ (car $r_2 \ll d_t$), on pourra admettre que $\text{Log} \frac{d_t}{r}$ est constant, ce qui nous autorise à poser :

$$\Delta t_{prox} = 0 ;$$

$$\Delta t_{dist} = -\frac{2Gm_2}{c^3} \text{Log}(\cos^2 \omega t \cdot \cos^2 i + \sin^2 \omega t).$$

Voyons maintenant le retard normal. Le pulsar tourne autour du centre de gravité O du système sur une orbite circulaire de rayon r_1 , d'inclinaison i , donc son excès de distance (par rapport à la distance $O \rightarrow$ Terre, prise comme référence) est $r_1 \cdot \cos \omega t \cdot \sin i$, donc le retard normal est :

$$\delta t = \frac{r_1 \cdot \cos \omega t \cdot \sin i}{c}.$$

Nous savons que $\frac{r_1}{m_2} = \frac{r_2}{m_1} = \frac{r_1+r_2}{m_1+m_2} = \frac{r}{m}$, donc $r_1 = \frac{m_2}{m} \cdot r$; d'autre part, d'après la troisième loi de Kepler : $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm}$, donc $r = \left[Gm \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}$.

$$r_1 = \frac{m_2}{m} \cdot \left[Gm \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} = \frac{m_2}{m} \cdot G^{\frac{1}{3}} \cdot m^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{m_2}{m^{\frac{2}{3}}} \cdot G^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

La formule du retard normal s'écrit donc :

$$\delta t = \frac{m_2}{m^{\frac{2}{3}}} \cdot G^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\cos \omega t \cdot \sin i}{c}.$$

Pour les astronomes, il est facile de distinguer le retard Shapiro du retard normal : le retard Shapiro s'annule sur la moitié proximale de l'orbite, et a une courbe caractéristique sur la moitié distale; le retard normal, quant à lui, est une courbe sinusoïdale parfaite.

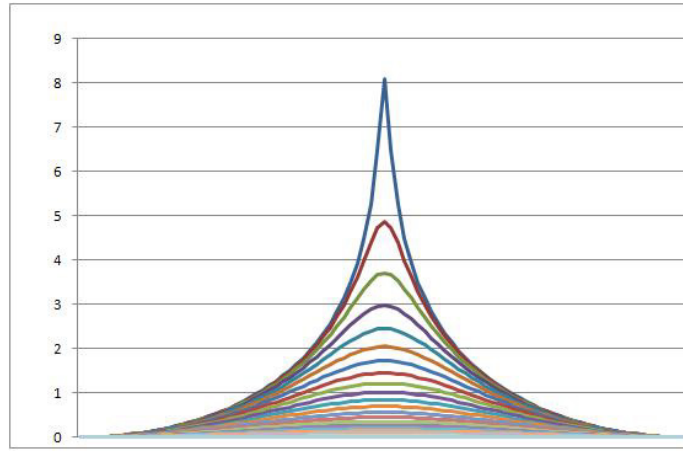
Le retard normal permet de déterminer la quantité $\frac{m_2}{(m_1+m_2)^{\frac{2}{3}}} \cdot \sin i$, ce qui serait peu utilisable, si on ne connaissait pas la valeur de i .

Heureusement, le retard Shapiro peut permettre de déterminer i , à condition que cet angle ne soit pas trop fermé; pour cela, il faut examiner le profil de la courbe, qui forme un pic d'autant plus étroit que i est plus proche de 90° .

Dans la figure ci-dessous, nous avons représenté (pour la moitié distale de l'orbite : $-\frac{\pi}{2} < \omega t < \frac{\pi}{2}$) la fonction suivante : $-\text{Log}(\cos^2 \omega t \cdot \cos^2 i + \sin^2 \omega t)$. Il reste à la multiplier par $\frac{2Gm_2}{c^3}$ pour obtenir le retard Shapiro. Chaque courbe correspond à une valeur de l'inclinaison i . De haut en bas : $i = 89^\circ$, $i = 85^\circ$, $i = 81^\circ$, $i = 77^\circ$, $i = 73^\circ$, etc. On peut voir que la largeur du pic à mi-hauteur

croît quand i décroît : c'est ce qui permet de déterminer l'inclinaison de l'orbite.

Une fois l'angle i déterminé, l'effet Shapiro permet de calculer m_2 (d'après la hauteur du pic). Donc, dans le meilleur des cas, le retard Shapiro combiné au retard normal, permet de déterminer l'inclinaison de l'orbite, et les masses individuelles des deux étoiles. Il reste alors à recouper ces résultats avec ceux qui ont été obtenus par les autres techniques, pour tester les différentes théories.



On peut remarquer que la formule de l'effet Shapiro obtenue avec la métrique triviale de Ni ne diffère pas de celle qui est obtenue grâce à la relativité générale.

9 Précession géodétique des pulsars binaires

Soit \vec{S} le moment cinétique d'un corps. La précession (évolution du vecteur \vec{S} dans le temps) est "gérée" par un vecteur noté $\vec{\Omega}$, tel que : $\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{S}$. Pour étudier la précession, il faut calculer ce vecteur $\vec{\Omega}$.

Dans le cas de la Terre, la précession des équinoxes est due au couple exercé par les forces de marées du Soleil et de la Lune sur le renflement équatorial de la Terre. Ce mécanisme est négligeable chez les pulsars, car ce sont des astres très compacts. Mais deux autres mécanismes entrent en jeu : la précession de Thomas et la précession de de Sitter.

La précession de Thomas est un phénomène lié à la relativité restreinte. Elle concerne les objets qui subissent une accélération $\vec{\gamma}$ non gravitationnelle, et s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\vec{\gamma} \wedge \vec{v}}{c^2}.$$

Si les vecteurs $\vec{\gamma}$ et \vec{v} sont perpendiculaires, cette formule devient (sous forme scalaire) :

$$\Omega = \frac{\gamma \cdot v}{2c^2}.$$

La précession de de Sitter est un phénomène lié à la gravitation : lorsqu'un mobile en chute libre (se déplaçant sur une géodésique) subit une "accélération" (ou pseudo-accélération) gravitationnelle, cette accélération produit une précession différente de celle de Thomas : en effet, elle est causée par la déformation de l'espace-temps ; elle est liée au potentiel gravitationnel Φ , et n'a rien à voir avec la relativité restreinte. Elle se calcule à l'aide de la formule suivante (dans laquelle $\vec{\nabla}\Phi$ désigne le gradient du potentiel) :

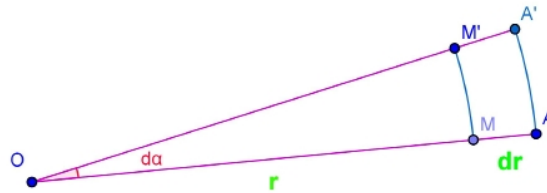
$$\vec{\Omega} = -\frac{3}{2} \frac{\vec{\nabla}\Phi \wedge \vec{v}}{c^2}.$$

Si les vecteurs $\vec{\gamma}$ et \vec{v} sont perpendiculaires, cette formule devient (sous forme scalaire) :

$$\Omega = \frac{3}{2} \frac{\gamma \cdot v}{c^2}.$$

Voici quelques explications sur ces deux phénomènes.

Considérons un mobile M en mouvement sur une orbite circulaire de centre O et de rayon r . Plaçons, sur la demi-droite $[OM)$, un point A tel que $OA = r + dr$ (et $MA = dr$). Lorsque le point M tourne d'un angle $d\alpha$ autour de O , le point A tourne du même angle, et le segment $[MA]$ également. C'est, du moins, le point de vue d'un observateur lié à O . Mais qu'en est-il pour un observateur lié à M ?



En mécanique Galiléenne, l'observateur lié au mobile M va calculer l'angle de rotation $d\alpha_M$ du segment $[MA]$ par la procédure suivante : il va mesurer MM' (déplacement élémentaire de M) et AA' (déplacement élémentaire de A), puis il va calculer la différence et la diviser par dr :

$$d\alpha_M = \frac{AA' - MM'}{dr} = \frac{(r + dr)d\alpha - rd\alpha}{dr} = \frac{dr \cdot d\alpha}{dr} = d\alpha.$$

Pas de surprise : pour l'observateur mobile, le segment $[MA]$ semble tourner de la même façon que pour l'observateur immobile.

Que se passe-t-il en relativité restreinte ? Les mesures de MM' et AA' vont être biaisées, car l'observateur mobile utilise des règles raccourcies dans le sens du déplacement : la longueur des règles étant multipliée par $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, le résultat de ces deux mesures sera divisé par $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. La mesure de dr , elle, sera inchangée. Donc :

$$d\alpha_M = \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot d\alpha.$$

Quand l'observateur immobile (ou non accéléré) estime que le segment $[MA]$ a fait un tour sur lui-même, l'observateur mobile (lié à M) estime qu'il a fait un peu plus d'un tour ; ceci signifie que les axes de référence utilisés par l'observateur mobile ont légèrement tourné en sens inverse. Pour un tour d'orbite, un gyroscope transporté par M va dériver, par rapport à un gyroscope immobile, d'un angle proche de $-\pi \frac{v^2}{c^2}$. Ce décalage correspond à la précession de Thomas.

Remarquons que c'est le mobile M qui subit la précession, et non O , car c'est M qui est accéléré, et non O : la notion d'accélération, en relativité restreinte, n'est pas relative. En relativité générale non plus.

La valeur de cette précession peut s'écrire :

$$\Omega = -\frac{d\alpha_M - d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \omega$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire, on a : $v = r\omega$ et $\gamma = r\omega^2$, donc $\gamma v = r^2\omega^3$; par conséquent :

$$\Omega = -\frac{v^2\omega}{2c^2} = -\frac{r^2\omega^3}{2c^2} = -\frac{\gamma \cdot v}{2c^2},$$

ce qui est la forme scalaire de la formule de la précession de Thomas, que nous

avons utilisée précédemment.

Étudions maintenant la précession de de Sitter, qui se produit lorsque l'espace-temps est déformé par la gravité. On va supposer qu'au point O se trouve une masse m ; posons : $k = \frac{Gm}{c^2}$. D'après ce que nous avons vu dans la première partie de cette étude, en raison du champ gravitationnel produit par cette masse, un observateur local (immobile par rapport à O) situé en M n'appréciera pas les distances MM' , AA' et dr de la même façon que l'observateur distant (également immobile par rapport à O); en effet, toutes ses mesures de distances (locales) seront multipliées par le coefficient de dilatation de l'espace : $e^{-\frac{k}{r}}$. On aura donc :

$$d\alpha_{loc} = \frac{d(re^{-\frac{k}{r}} d\alpha)}{e^{-\frac{k}{r}} dr} = \frac{r \cdot \frac{k}{r^2} e^{-\frac{k}{r}} dr + e^{-\frac{k}{r}} dr}{e^{-\frac{k}{r}} dr} d\alpha = \left(1 + \frac{k}{r}\right) \cdot d\alpha.$$

Dans le cas d'une orbite circulaire, on a : $\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-k}}$ (voir section sur les orbites circulaires), donc : $\frac{v^2}{c^2} \approx \frac{k}{r}$; par conséquent : $d\alpha_{loc} \approx \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot d\alpha$.

Mais, attention : l'observateur mobile lié à M ne se confond pas avec l'observateur local (qui est immobile); en effet, le premier utilise des règles raccourcies. Pour passer de l'observateur local à l'observateur mobile, on procède comme pour la précession de Thomas :

$$d\alpha_M = \frac{d\alpha_{loc}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot d\alpha \approx \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot d\alpha.$$

Pour un tour d'orbite, un gyroscope transporté par M va dériver, par rapport à un gyroscope immobile, d'un angle égal à $-3\pi \frac{v^2}{c^2}$. Ce décalage correspond à la précession de de Sitter; c'est le triple de la précession de Thomas. On a donc (en valeur scalaire) : $\Omega = -\frac{3\gamma \cdot v}{2c^2}$.

Voyons maintenant comment ces deux formules s'appliquent dans le cas des pulsars binaires.

Considérons, une fois encore, le pulsar M_1 et l'étoile M_2 tournant sur des orbites circulaires autour du centre de gravité O . Nous voulons évaluer la précession $\vec{\Omega}$ du pulsar, causée par le champ gravitationnel de l'étoile et par le mouvement orbital.

Dans un repère lié à O , M_1 , qui a pour vitesse v_1 , subit une force $F_1 = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$ (où $r = r_1 + r_2$), ce qui produit une accélération centripète $\gamma_1 = \frac{Gm_2}{r^2}$; M_2 , qui

a pour vitesse v_2 , subit une force $F_2 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = F_1$ (de sens contraire), ce qui produit une accélération centripète $\gamma_2 = \frac{Gm_1}{r^2}$.

Calculer la précession du pulsar M_1 revient à calculer comment tournent ses axes de coordonnées, par rapport à ceux de O (observateur de référence, supposé immobile, ou, en tout cas, non accéléré). Pour cela, nous allons procéder en deux temps : tout d'abord, nous allons nous placer dans un repère lié à l'étoile M_2 pour calculer la précession du pulsar M_1 ; il s'agit d'une précession de de Sitter, puisque l'orbite du pulsar est dictée par le champ gravitationnel de l'étoile ; ensuite nous ferons un changement de repère pour nous placer dans un repère immobile lié à O (ce qui fait intervenir une précession de Thomas, puisque le nouveau repère est accéléré par rapport au précédent, cette accélération étant non gravitationnelle). Remarquons tout d'abord que ces deux précessions sont de même sens : si le pulsar et l'étoile orbitent dans le sens direct, alors les deux précessions sont rétrogrades, et réciproquement. Il suffit donc de calculer leurs modules et de les additionner.

Si l'étoile M_2 était immobile, elle produirait sur le pulsar M_1 , en orbite autour d'elle, une précession de de Sitter ($\vec{\Omega}_1$) facile à calculer. En effet, M_2 exerce sur M_1 une accélération : $\gamma_1 = \frac{Gm_2}{r^2}$, et M_1 se déplace (par rapport à M_2) à la vitesse $v = v_1 + v_2$. Comme \vec{v} est perpendiculairement à $\vec{\gamma}_1$, la précession de de Sitter (en module) s'écrit :

$$\Omega_1 = \frac{3}{2c^2} \cdot \frac{Gm_2}{r^2} \cdot v.$$

Mais c'est le point O qui est supposé immobile, et non M_2 ; nous allons donc effectuer un changement de repère : nous passons du repère lié à M_2 au repère lié à O . Ces deux repères sont accélérés l'un par rapport à l'autre, cette accélération ayant pour module γ_2 . Ce changement de repère équivaut à appliquer à tous les mobiles (y compris M_1) une accélération complémentaire $-\vec{\gamma}_2$, non gravitationnelle, ce qui produit la précession de Thomas $\vec{\Omega}_2$. Dans le nouveau repère, M_1 subit donc cette accélération $-\vec{\gamma}_2$, et sa vitesse est \vec{v}_1 (perpendiculaire à $\vec{\gamma}_2$), donc la précession complémentaire se calcule ainsi :

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma_2 \cdot v_1}{c^2} = \frac{1}{2c^2} \cdot \frac{Gm_1}{r^2} \cdot v_1.$$

Comme $m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$, on pourra écrire : $\Omega_2 = \frac{1}{2c^2} \cdot \frac{Gm_2}{r^2} \cdot v_2$.

Compte-tenu du fait que ces deux précessions sont de même sens, la précession totale du pulsar M_1 sera donc (en module) :

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 + \Omega_2 = \frac{3}{2c^2} \cdot \frac{Gm_2}{r^2} \cdot v + \frac{1}{2c^2} \cdot \frac{Gm_2}{r^2} \cdot v_2 ; \\ \Omega &= \frac{Gm_2}{2r^2c^2} \cdot (3v + v_2) = \frac{Gm_2}{2r^2c^2} \cdot (3r \cdot \omega + r_2 \cdot \omega) = \frac{Gm_2}{2r \cdot c^2} \cdot \left(3 + \frac{r_2}{r} \right) \cdot \omega. \end{aligned}$$

Comme $\frac{m_1}{r_2} = \frac{m_2}{r_1} = \frac{m}{r}$, on a $\frac{r_2}{r} = \frac{m_1}{m}$, et par suite :

$$\Omega = \frac{Gm_2}{2r.c^2} \cdot \left(3 + \frac{m_1}{m}\right) \cdot \omega = \frac{Gm_2}{2r.c^2} \cdot \frac{3m + m_1}{m} \cdot \omega = \frac{Gm_2}{2r.c^2} \cdot \frac{4m_1 + 3m_2}{m} \cdot \omega.$$

Remplaçons ω par $\frac{2\pi}{T}$, puis r par $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (Gm)^{\frac{1}{3}}$ (troisième loi de Kepler) :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{Gm_2}{2r.c^2} \cdot \frac{4m_1 + 3m_2}{m} \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{G}{2rc^2} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{m_2(3m + m_1)}{m} ; \\ \Omega &= \frac{G}{2c^2} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{m_2(3m + m_1)}{m} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot (Gm)^{-\frac{1}{3}} ; \\ \Omega &= \frac{G^{\frac{2}{3}}}{2c^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{m_2(4m_1 + 3m_2)}{m^{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

Chez les pulsars, la précession modifie lentement la direction du faisceau lumineux qui balaie la Terre comme un phare ; il en résulte que l'intensité apparente de ce faisceau évolue dans le temps. Actuellement, la précession géodétique de plusieurs pulsars binaires a pu être évaluée (de manière encore approximative), ce qui permet de calculer la quantité $\frac{m_2(4m_1+3m_2)}{m^{\frac{4}{3}}}$. L'accord avec les valeurs de m_1 et m_2 , obtenues par d'autres techniques, semble satisfaisant. Ce résultat, bien entendu, ne permet pas de départager les métriques de Ni et de Schwarzschild.

Une autre façon d'accéder à la précession géodétique consiste à placer des gyroscopes dans des satellites en orbite terrestre. Cette expérience a été réalisée avec succès, avec une précision nettement meilleure, grâce au satellite Gravity Probe B.

Le fait que l'expérience confirme le calcul de de Sitter a une très grande importance théorique : c'est la preuve que la gravité agit sur la géométrie de l'espace-temps, ou (ce qui, mathématiquement, revient au même) qu'elle modifie les règles et les horloges que les observateurs locaux utilisent pour effectuer leurs mesures. Il n'est plus permis de considérer le champ gravitationnel, à la manière de Newton, comme un simple champ d'accélération, car un champ d'accélération (au sens strict du terme, c'est-à-dire sans courbure de l'espace-temps) ne peut pas produire de précession de de Sitter.

Les paragraphes qui précèdent donnent les outils essentiels pour travailler sur les systèmes binaires ; nous allons aborder maintenant des questions plus délicates et formuler des conjectures.

10 La conservation de l'énergie et/ou de la masse

Dans le document sur le champ d'entraînement, nous avons réfléchi à la notion de masse au repos en relativité restreinte, et nous avons démontré la formule suivante :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c}.$$

Rappelons que m_1 et m_2 étaient les masses au repos de deux corps, $\Delta \vec{w}$ leur rapidité relative, et m la "masse au repos" du système (évaluée dans le repère lié au centre de gravité). Nous avons fait observer que $m > m_1 + m_2$, sauf pour $\Delta \vec{w} = \vec{0}$.

Ce raisonnement est valable en relativité restreinte; il ne fait pas intervenir la gravitation. Le coefficient $ch \frac{\Delta \vec{w}}{c}$ correspond au coefficient de liaison des deux mobiles, dans le cas particulier où la gravité n'entre pas en jeu. Si on veut la prendre en compte, le coefficient de liaison devient : $e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}}.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c}$. La formule pourrait alors devenir :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}}.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c}.$$

Nous avons vu que la conservation de l'énergie du système double équivaut à la conservation du coefficient de liaison : $e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}}.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c}$.

Attention : la formule proposée ci-dessus n'a pas été démontrée, contrairement à celle qui concerne la relativité restreinte. Il ne s'agit que d'une conjecture. Si elle est exacte, alors elle signifie que la conservation du coefficient de liaison entraîne aussi la conservation de la masse au repos du système, évaluée dans le repère du centre de gravité.

On peut remarquer que, si $e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}}.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c} = 1$ (cas particulier d'une orbite d'évasion : parabole), on a : $m = m_1 + m_2$.

Si $e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}}.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c} > 1$ (cas d'une orbite ouverte : hyperbole), on a : $m > m_1 + m_2$.

Si $e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}}.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c} < 1$ (cas d'une orbite fermée : ellipse), alors on a : $m < m_1 + m_2$.

Le coefficient de liaison permet de caractériser l'"énergie orbitale", synthèse de deux éléments antagonistes : l'"énergie de liaison" et l'énergie cinétique, associées respectivement aux coefficients $e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}}$ et $ch \frac{\Delta \vec{w}}{c}$.

Voici encore une autre façon de montrer l'étroite parenté entre la formule proposée ci-dessus et ce qui a été dit auparavant.

Pour r suffisamment grand par rapport au rayon de Schwarzschild $\frac{G.(m_1+m_2)}{c^2}$, on a : $G.(m_1 + m_2) \ll r.c^2$, donc $e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}} \approx 1 - \frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}$, et par conséquent, l'égalité précédente, qui s'écrivait :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2.e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r.c^2}}.ch \frac{\Delta \vec{w}}{c}$$

va devenir :

$$m^2 \approx m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2. \left(1 - \frac{G.(m_1 + m_2)}{r.c^2} \right).ch \frac{\Delta \vec{w}}{c}.$$

Si, de plus, la vitesse v est très inférieure à c , on a : $v^2 \ll c^2$, et par conséquent $ch \frac{\Delta \vec{w}}{c} \approx 1 + \frac{v^2}{2.c^2}$; donc :

$$m^2 \approx m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2. \left(1 - \frac{G.(m_1 + m_2)}{r.c^2} \right). \left(1 + \frac{v^2}{2.c^2} \right) ;$$

$$m^2 \approx m_1^2 + m_2^2 + 2.m_1.m_2. \left(1 + \frac{v^2}{2.c^2} - \frac{G.(m_1 + m_2)}{r.c^2} \right) ;$$

$$m^2 \approx (m_1 + m_2)^2 + 2.m_1.m_2. \left(\frac{v^2}{2.c^2} - \frac{G.(m_1 + m_2)}{r.c^2} \right) ;$$

$$\frac{m^2}{(m_1 + m_2)^2} \approx 1 + 2. \frac{m_1.m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \left(\frac{v^2}{2.c^2} - \frac{G.(m_1 + m_2)}{r.c^2} \right) ;$$

$$\frac{m}{m_1 + m_2} \approx 1 + \frac{m_1.m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \left(\frac{v^2}{2.c^2} - \frac{G.(m_1 + m_2)}{r.c^2} \right) ;$$

$$m \approx m_1 + m_2 + \frac{1}{2}. \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}. \frac{v^2}{c^2} - \frac{G.m_1.m_2}{r.c^2} ;$$

$$m.c^2 \approx m_1.c^2 + m_2.c^2 + \frac{1}{2}.m'.v^2 - \frac{G.m_1.m_2}{r},$$

où $m' = \frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}$ est la masse réduite (ou masse du mobile fictif) dont nous avons parlé dans le paragraphe sur le modèle newtonien des systèmes binaires.

Sous cette forme, nous reconnaissons le terme $\frac{1}{2}.m'.v^2$ (où $v = v_1 + v_2$ est la vitesse relative des deux étoiles), qui correspond exactement à l'énergie cinétique totale dans le modèle newtonien, et le terme $-\frac{G.m_1.m_2}{r}$, qui représente l'énergie potentielle. Les termes $m_1.c^2$ et $m_2.c^2$ ne figurent pas dans le modèle de Newton : ce sont les "énergies de masse", introduites par la relativité restreinte.

Insistons sur le fait que la formule que nous avons introduite dans ce paragraphe est une conjecture, mais elle est suffisamment simple et cohérente pour apporter un éclairage intéressant sur le problème des systèmes doubles. Nous voyons qu'elle s'identifie aux formules de Newton pour $G.(m_1 + m_2) \ll r.c^2$

et $v \ll c$. Ce qui peut surprendre, c'est qu'il est impossible de séparer formellement l'énergie cinétique de l'énergie potentielle, qui se combinent dans le coefficient de liaison (cette séparation n'apparaissant que dans l'approximation newtonienne); on ne peut pas séparer non plus la part d'énergie cinétique et d'énergie potentielle attribuable à chaque étoile : il faut parler de l'énergie globale du système.

On pourrait reprocher à notre formule d'être seulement une loi de conservation (conservation de la masse globale m , ou de l'énergie totale du système, quand v et r varient). Dans la théorie de Newton, la notion de force est l'élément central. C'est à partir d'elle qu'on démontre les lois de conservation. Mais n'oublions pas qu'en physique quantique la force telle qu'elle est définie par Newton (cette entité qu'on a l'habitude de représenter par un vecteur, une "flèche"), proportionnelle à l'accélération, n'existe pas. Quand on parle de "forces", il s'agit d'échanges quantifiés entre des structures matérielles. La trajectoire d'un mobile n'est que la résultante simplifiée, idéalisée, d'une multitude d'échanges discrets, respectant certaines lois de conservation.

11 Conjecture sur le problème des trois corps

Ce qui vient d'être dit sur les systèmes binaires doit pouvoir se généraliser à un système comprenant trois (ou plusieurs) corps, ce système étant supposé isolé dans l'espace. On peut proposer, sans démonstration, la généralisation suivante :

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2.m_1.m_2.e^{-\frac{G.(m_1+m_2)}{r_{12}.c^2}}.ch\frac{w_{12}}{c} \dots$$

$$\dots + 2.m_2.m_3.e^{-\frac{G.(m_2+m_3)}{r_{23}.c^2}}.ch\frac{w_{23}}{c} + 2.m_3.m_1.e^{-\frac{G.(m_3+m_1)}{r_{31}.c^2}}.ch\frac{w_{31}}{c}.$$

On aura compris que r_{12} , r_{23} et r_{31} sont les distances relatives des trois corps, et w_{12} , w_{23} et w_{31} leurs rapidités relatives.

$$m^2 = \sum_i m_i^2 + 2. \sum_{i \neq j} m_i.m_j.e^{-\frac{G.(m_i+m_j)}{r_{ij}.c^2}}.ch\frac{w_{ij}}{c} = c^{te}.$$

Toutes les quantités figurant dans cette formule doivent être évaluées dans un même repère : celui du centre de gravité.

Cette conjecture, non démontrée, est liée à la conservation de la masse, ou de l'énergie totale, d'un système quelconque isolé dans l'espace. La gravitation pourrait se résumer par des échanges respectant la conservation de l'énergie, ou de la masse. Mais la masse doit être conçue comme délocalisée : c'est une énergie de liaison. Et pour qu'il y ait une énergie de liaison, il faut un système composé de plusieurs particules, qui elles-mêmes ont toutes les chances d'être

aussi des systèmes formés de particules de niveau inférieur.

C'est aussi un trait d'union entre la conception de la gravitation basée sur la courbure de l'espace-temps et les géodésiques (c'est bien à l'aide de l'équation des géodésiques qu'on démontre que le coefficient de liaison est constant) et la conception basée sur la notion de force (effectivement, en dérivant la formule ci-dessus par rapport au temps, on fait apparaître les termes de la forme $\frac{dw_{ij}}{dt}$, qui permettent de ramener le problème à un jeu de $n.(n - 1)$ pseudo-forces, n étant le nombre de corps pris en compte).

Le fait que la masse totale m soit globalement constante n'implique pas que les produits $e^{-\frac{G.(m_i+m_j)}{r_{ij}.c^2}}.ch\frac{w_{ij}}{c}$ soient tous constants. Autrement dit, les coefficients de liaison peuvent varier, dans la mesure où le bilan énergétique total est préservé. Nous en avons vu un exemple avec l'effet catapulte.

Les idées qui viennent d'être proposées ici suggèrent que les phénomènes gravitationnels pourraient être basés sur une loi très simple : la conservation de la masse. Mais ce n'est qu'une hypothèse, et pour le moment la formulation en termes de pseudo-forces, de potentiel gravitationnel et de courbure de l'espace-temps est plus opérationnelle.