Tenseur de Ricci

Jean-Pierre Chabert (Lambesc, décembre 2015)

Table des matières

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

01) Gravitation relativiste : introduction

- Relativité restreinte :

02) Les vitesses en Relativité restreinte

- Physique quantique :

03) Physique quantique : généralités

04) Physique quantique : l'aventure collective

- Gravitation :

05) La relativité générale a-t-elle été prise en défaut ?

06) Gravitation relativiste : principes fondamentaux

07) Gravitation et critère de Schild

08) L'hypothèse du champ d'entraînement

09) Métriques et géodésiques

10) Tenseur de Ricci

11) Potentiel gravitationnel

12) Ni ou Schwarzschild ?

13) Gravitation et vide quantique

14) L'hypothèse du flux à double sens

2 Résumé

Ce document prolonge celui qui concerne les métriques, en apportant, pour chacune d'elles, des précisions sur son tenseur de Ricci. Certains paragraphes sont d'intérêt mineur ; d'autres, au contraire, font apparaître des liens inattendus entre métriques et tenseurs de Ricci, les plus intéressants étant formulés sous forme de théorèmes. Certains de ces théorèmes, joints à ceux que nous verrons dans le document sur le potentiel gravitationnel, vont jouer un rôle important dans notre conception de la gravitation.

3 Tenseur de Ricci dans le cas général

Dans tout ce document, nous étudions les métriques statiques, à symétrie sphérique, diagonalisables. On pourra imaginer le champ produit par une masse ponctuelle, immobile. Comme notre but est de sélectionner les métriques qui peuvent s'interpréter en termes de gravitation, nous dirons qu'une métrique est "éligible" si elle respecte le limite newtonienne, et si, de plus, elle est compatible avec les trois grand tests classiques, selon le formalisme post-newtonien paramétrisé.

Les métriques que nous allons étudier sont donc de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\theta.d\phi^2).$$

Nous noterons $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ et $\ddot{\gamma}$ les dérivées partielles d'ordre un et deux de α, β et γ par rapport à r :

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial\alpha}{\partial r} \,;\, \ddot{\alpha} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial r^2} \,;\, \dot{\beta} = \frac{\partial\beta}{\partial r} \,;\, \ddot{\beta} = \frac{\partial^2\beta}{\partial r^2} \,;\, \dot{\gamma} = \frac{\partial\gamma}{\partial r} \,;\, \ddot{\gamma} = \frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}.$$

Comme, dans le cas présent, α, β et γ ne dépendent que de r, on aurait pu se dispenser de parler de dérivées "partielles".

Attention : contrairement à un usage répandu chez les physiciens, il ne s'agit pas de dérivées par rapport au temps !

Selon l'usage du calcul tensoriel, nous noterons :

$$\begin{cases} dx^1 = c.dt \ ; \\ dx^2 = dr \ ; \\ dx^3 = d\theta \ ; \\ dx^4 = d\phi. \end{cases}$$

Les indices placés en haut ne sont pas des exposants, mais des indices contravariants ; les indices placés en bas sont covariants.

En coordonnées sphériques, les composantes covariantes de la métrique sont :

$$\begin{cases} g_{11} = \alpha \ ; \\ g_{22} = -\beta \ ; \\ g_{33} = -\gamma.r^2 \ ; \\ g_{44} = -\gamma.r^2.sin^2\theta. \end{cases}$$

Ses composantes contravariantes sont :

$$\begin{cases} g^{11} = \frac{1}{\alpha} \ ; \\ g^{22} = -\frac{1}{\beta} \ ; \\ g^{33} = -\frac{1}{\gamma.r^2} \ ; \\ g^{44} = -\frac{1}{\gamma.r^2.sin^2\theta}. \end{cases}$$

Les deux matrices sont diagonales (pour $i \neq j$, on a $g_{ij} = g^{ij} = 0$) et inverses l'une de l'autre.

Notre but est de calculer le tenseur de courbure de Ricci R_{ij} associé à cette métrique, puis le scalaire de Ricci R.

Pour cela, commençons par calculer les dérivées partielles de la métrique par rapport aux coordonnées.

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \dot{\alpha} \ ; \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = -\frac{\partial \beta}{\partial r} = -\dot{\beta} \ ; \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{\partial (\gamma.r^2)}{\partial r} = -(\dot{\gamma}.r^2 + 2.\gamma.r) \ ; \\ \frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} = -\frac{\partial (\gamma.r^2.sin^2\theta)}{\partial r} = -(\dot{\gamma}.r^2 + 2.\gamma.r).sin^2\theta \ ; \\ \frac{\partial g_{44}}{\partial x^3} = -\frac{\partial (\gamma.r^2.sin^2\theta)}{\partial \theta} = -2.\gamma.r^2.sin\theta.cos\theta. \end{cases}$$

Toutes les autres dérivées partielles sont nulles.

Nous allons ensuite calculer les symboles de Christoffel, définis par :

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2}.g^{li}.\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right).$$

Attention : nous avons utilisé précédemment la lettre Γ pour désigner la pseudo-accélération ; ici, nous l'utilisons, selon l'usage du calcul tensoriel, pour désigner les symboles de Christoffel. En dimension quatre, il y a 64 symboles différents ; mais ici, compte-tenu du fait que g^{ij} s'annule pour $i \neq j$, et que beaucoup de dérivées partielles sont nulles, le nombre de symboles de Christoffel à calculer sera limité ; ils seront tous de la forme :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}.g^{ii}.\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right).$$

Commençons avec $i = 1$:

$$\Gamma^1_{jk} = \frac{1}{2}.g^{11}.\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}.g^{11}.\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^k}\right).$$

Pour que cette expression soit non nulle, on doit avoir soit $j=1$ et $k=2$, soit $j=2$ et $k=1$. Ces deux cas sont semblables :

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2}.g^{11}.\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{2}.g^{11}.\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{\alpha}.\dot{\alpha}=\frac{\dot{\alpha}}{2\alpha}.$$

Continuons avec $i=2$:

$$\Gamma^2_{jk}=\frac{1}{2}.g^{22}.\left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{j2}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^2}\right).$$

On doit avoir : $j=k=1$ ou $j=k=2$ ou $j=k=3$ ou $j=k=4$.

$$\Gamma^2_{11}=\frac{1}{2}.g^{22}.\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}.g^{22}.\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\ ;$$

$$\Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{\beta}\right).\dot{\alpha}=\frac{\dot{\alpha}}{2.\beta}.$$

$$\Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}.g^{22}.\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{2}.g^{22}.\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\ ;$$

$$\Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{\beta}\right).(-\dot{\beta})=\frac{\dot{\beta}}{2\beta}.$$

$$\Gamma^2_{33}=\frac{1}{2}.g^{22}.\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}+\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}.g^{22}.\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\ ;$$

$$\Gamma^2_{33}=-\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{\beta}\right).(-\dot{\gamma}.r^2-2.\gamma.r)=-\frac{1}{2}.\frac{\dot{\gamma}.r^2+2.\gamma.r}{\beta}\ ;$$

$$\Gamma^2_{44}=\frac{1}{2}.g^{22}.\left(\frac{\partial g_{24}}{\partial x^4}+\frac{\partial g_{42}}{\partial x^4}-\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}.g^{22}.\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2}\ ;$$

$$\Gamma^2_{44}=-\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{\beta}\right).(-\dot{\gamma}.r^2-2.\gamma.r).sin^2\theta=-\frac{1}{2}.\frac{\dot{\gamma}.r^2+2.\gamma.r}{\beta}.sin^2\theta.$$

Etudions ensuite le cas $i=3$:

$$\Gamma^3_{jk}=\frac{1}{2}.g^{33}.\left(\frac{\partial g_{3k}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{j3}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^3}\right).$$

On doit avoir soit $j=2$ et $k=3$, soit $j=3$ et $k=2$, soit $j=4$ et $k=4$. Les deux premiers cas sont semblables.

$$\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\frac{1}{2}.g^{33}.\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\ ;$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{\gamma.r^2}\right).(-\dot{\gamma}.r^2 - 2.\gamma.r) = \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{1}{r} \ ;$$

$$\Gamma^3_{44} = -\frac{1}{2}.g^{33}.\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3} \ ;$$

$$\Gamma^3_{44} = -\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{\gamma.r^2}\right).(-2.\gamma.r^2.sin\theta.cos\theta) = -sin\theta.cos\theta.$$

Etudions enfin le cas $i = 4$:

$$\Gamma^4_{jk} = \frac{1}{2}.g^{44}.\left(\frac{\partial g_{4k}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j4}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^4}\right) = \frac{1}{2}.g^{44}.\left(\frac{\partial g_{4k}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j4}}{\partial x^k}\right).$$

On doit avoir soit $j = 2$ et $k = 4$, soit $j = 4$ et $k = 2$, soit $j = 3$ et $k = 4$, soit $j = 4$ et $k = 3$. Les deux premiers cas sont semblables ; les deux derniers aussi.

$$\Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42} = \frac{1}{2}.g^{44}.\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} \ ;$$

$$\Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42} = \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{\gamma.r^2.sin^2\theta}\right).(-\dot{\gamma}.r^2 - 2.\gamma.r).sin^2\theta = \frac{\dot{\gamma}}{2\gamma} + \frac{1}{r} \ ;$$

$$\Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43} = \frac{1}{2}.g^{44}.\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3} \ ;$$

$$\Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43} = \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{\gamma.r^2.sin^2\theta}\right).(-2.\gamma.r^2.sin\theta.cos\theta) = \frac{cos\theta}{sin\theta}.$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{\dot{\alpha}}{2\alpha} \ ; \\ \Gamma^2_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{2.\beta} \ ; \\ \Gamma^2_{22} = \frac{\dot{\beta}}{2\beta} \ ; \\ \Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}.\frac{\dot{\gamma}.r^2+2.\gamma.r}{\beta} \ ; \\ \Gamma^2_{44} = -\frac{1}{2}.\frac{\dot{\gamma}.r^2+2.\gamma.r}{\beta}.sin^2\theta \ ; \\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \Gamma^4_{24} = \Gamma^4_{42} = \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{1}{r} \ ; \\ \Gamma^3_{44} = -sin\theta.cos\theta \ ; \\ \Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43} = \frac{cos\theta}{sin\theta}. \end{cases}$$

Nous avons déjà dit que les symboles de Christoffel sont utilisés pour calculer les équations des géodésiques ; ils permettent aussi de calculer les composantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, selon la formule :

$$R^l_{mns} = \frac{\partial \Gamma^l_{mn}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^l_{ms}}{\partial x^n} + \sum_{i=1}^{4} \left(\Gamma^i_{mn}.\Gamma^l_{si} - \Gamma^i_{ms}.\Gamma^l_{ni} \right).$$

En fait, il ne sera pas nécessaire d'effectuer la sommation, car chaque terme sera non nul pour, au plus, une valeur de i.

Nous n'avons pas besoin de calculer toutes ces composantes, car notre but est de calculer le tenseur de Ricci, défini par :

$$R_{ij} = \sum_{y=1}^{4} R^y_{iyj}.$$

En reprenant la définition du tenseur de Riemann-Christoffel rappelée ci-dessus, et en renommant les indices : $i \to z$, $l \to y$, $n \to y$, $m \to i$, $s \to j$, nous pouvons écrire :

$$R^y_{iyj} = \frac{\partial \Gamma^y_{iy}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^y_{ij}}{\partial x^y} + \sum_{z=1}^{4} \left(\Gamma^z_{iy}.\Gamma^y_{jz} - \Gamma^z_{ij}.\Gamma^y_{yz} \right) \;;$$

$$R_{ij} = \sum_{y=1}^{4} R^y_{iyj} = \sum_{y=1}^{4} \left(\frac{\partial \Gamma^y_{iy}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^y_{ij}}{\partial x^y} \right) + \sum_{y=1}^{4} \sum_{z=1}^{4} \left(\Gamma^z_{iy}.\Gamma^y_{jz} - \Gamma^z_{ij}.\Gamma^y_{yz} \right).$$

Pour $i \neq j$, on peut vérifier que $R_{ij} = 0$. Pour cela, on fixe les valeurs de i et j : $(i,\ j) = (1,\ 2)$, puis $(i,\ j) = (1,\ 3)$, $(i,\ j) = (1,\ 4)$, $(i,\ j) = (2,\ 3)$, $(i,\ j) = (2,\ 4)$, $(i,\ j) = (3,\ 4)$; dans chaque cas, on cherche pour quelles valeurs de y les dérivées partielles sont non nulles (on voit qu'elles sont toutes nulles) ; puis on examine les symboles de Christoffel, et on cherche pour quelles valeurs de y ils peuvent être non nuls ; pour chacune de ces valeurs de y, on cherche ensuite pour quelles valeurs de z l'un des produits $\Gamma^z_{iy}.\Gamma^y_{jz}$ ou $\Gamma^z_{ij}.\Gamma^y_{yz}$ est non nul. On constate que tous ces produits sont nuls, sauf, dans le calcul de R_{23}, les produits $\Gamma^4_{24}.\Gamma^4_{34}$ et $\Gamma^3_{32}.\Gamma^4_{43}$. Mais comme $\Gamma^4_{24} = \Gamma^3_{32}$ et $\Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43}$, on a : $\Gamma^4_{24}.\Gamma^4_{34} - \Gamma^3_{32}.\Gamma^4_{43} = 0$. Il en résulte qu'on a bien, dans tous les cas, $R_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Il nous reste donc à calculer les quatre termes non nuls R_{ii} $(i = 1, 2, 3, 4)$ du tenseur de Ricci, et, pour chacun d'eux, nous avons besoin de 4 termes du tenseur de Riemann-Christoffel, de la forme : R^1_{i1i}, R^2_{i2i}, R^3_{i3i}, R^4_{i4i} ; ce qui signifie que nous faisons des calculs séparés pour les quatre valeurs possibles de y.

$$R^y_{iyi} = \frac{\partial \Gamma^y_{iy}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^y_{ii}}{\partial x^y} + \sum_{z=1}^{4} \left(\Gamma^z_{iy}.\Gamma^y_{iz} - \Gamma^z_{ii}.\Gamma^y_{yz} \right) \;;$$

$$R_{ii} = \sum_{y=1}^{4} R^y_{iyi}.$$

$$R^1_{111} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} + \Gamma^z_{11}.\Gamma^1_{1z} - \Gamma^z_{11}.\Gamma^1_{1z} = \Gamma^2_{11}.\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}.\Gamma^1_{12} = 0 \ ;$$

$$R^2_{121} = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} + \Gamma^z_{12}.\Gamma^2_{1z} - \Gamma^z_{11}.\Gamma^2_{2z} = -\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} + \Gamma^1_{12}.\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{11}.\Gamma^2_{22} \ ;$$

$$R^3_{131} = \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^3_{11}}{\partial x^3} + \Gamma^z_{13}.\Gamma^3_{1z} - \Gamma^z_{11}.\Gamma^3_{3z} = -\Gamma^2_{11}.\Gamma^3_{32} \ ;$$

$$R^4_{141} = \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma^4_{11}}{\partial x^4} + \Gamma^z_{14}.\Gamma^4_{1z} - \Gamma^z_{11}.\Gamma^4_{4z} = -\Gamma^2_{11}.\Gamma^4_{42}.$$

$$R_{11} = R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} + R^4_{141} \ ;$$

$$R_{11} = -\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} + \Gamma^2_{11}.\left(\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{32} - \Gamma^4_{42}\right).$$

$$R^1_{212} = \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} + \Gamma^z_{21}.\Gamma^1_{2z} - \Gamma^z_{22}.\Gamma^1_{1z} = \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \Gamma^1_{21}.\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{22}.\Gamma^1_{12} \ ;$$

$$R^2_{222} = \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial x^2} + \Gamma^z_{22}.\Gamma^2_{2z} - \Gamma^z_{22}.\Gamma^2_{2z} = 0 \ ;$$

$$R^3_{232} = \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^3_{22}}{\partial x^3} + \Gamma^z_{23}.\Gamma^3_{2z} - \Gamma^z_{22}.\Gamma^3_{3z} = \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} + \Gamma^3_{23}.\Gamma^3_{23} - \Gamma^2_{22}.\Gamma^3_{32} \ ;$$

$$R^4_{242} = \frac{\partial \Gamma^4_{24}}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma^4_{22}}{\partial x^4} + \Gamma^z_{24}.\Gamma^4_{2z} - \Gamma^z_{22}.\Gamma^4_{4z} = \frac{\partial \Gamma^4_{24}}{\partial x^2} + \Gamma^4_{24}.\Gamma^4_{24} - \Gamma^2_{22}.\Gamma^4_{42}.$$

$$R_{22} = R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232} + R^4_{242} \ ;$$

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma^4_{24}}{\partial x^2} + \left(\Gamma^1_{21}\right)^2 + \left(\Gamma^3_{23}\right)^2 + \left(\Gamma^4_{24}\right)^2 - \Gamma^2_{22}.\left(\Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{32} + \Gamma^4_{42}\right).$$

$$R^1_{313} = \frac{\partial \Gamma^1_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^1} + \Gamma^z_{31}.\Gamma^1_{3z} - \Gamma^z_{33}.\Gamma^1_{1z} = -\Gamma^2_{33}.\Gamma^1_{12} \ ;$$

$$R_{323}^{2}=\frac{\partial\Gamma_{32}^{2}}{\partial x^{3}}-\frac{\partial\Gamma_{33}^{2}}{\partial x^{2}}+\Gamma_{32}^{z}.\Gamma_{3z}^{2}-\Gamma_{33}^{z}.\Gamma_{2z}^{2}=-\frac{\partial\Gamma_{33}^{2}}{\partial x^{2}}+\Gamma_{32}^{3}.\Gamma_{33}^{2}-\Gamma_{33}^{2}.\Gamma_{22}^{2}\ ;$$

$$R_{333}^{3}=\frac{\partial\Gamma_{33}^{3}}{\partial x^{3}}-\frac{\partial\Gamma_{33}^{3}}{\partial x^{3}}+\Gamma_{33}^{z}.\Gamma_{3z}^{3}-\Gamma_{33}^{z}.\Gamma_{3z}^{3}=0\ ;$$

$$R_{343}^{4}=\frac{\partial\Gamma_{34}^{4}}{\partial x^{3}}-\frac{\partial\Gamma_{33}^{4}}{\partial x^{4}}+\Gamma_{34}^{z}.\Gamma_{3z}^{4}-\Gamma_{33}^{z}.\Gamma_{4z}^{4}=\frac{\partial\Gamma_{34}^{4}}{\partial x^{3}}+\left(\Gamma_{34}^{4}\right)^{2}-\Gamma_{33}^{2}.\Gamma_{42}^{4}.$$

$$R_{33}=R_{313}^{1}+R_{323}^{2}+R_{333}^{3}+R_{343}^{4}\ ;$$

$$R_{33}=-\frac{\partial\Gamma_{33}^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial\Gamma_{34}^{4}}{\partial x^{3}}+\left(\Gamma_{34}^{4}\right)^{2}+\Gamma_{33}^{2}.\left(\Gamma_{32}^{3}-\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{42}^{4}\right).$$

$$R_{414}^{1}=\frac{\partial\Gamma_{41}^{1}}{\partial x^{4}}-\frac{\partial\Gamma_{44}^{1}}{\partial x^{1}}+\Gamma_{41}^{z}.\Gamma_{4z}^{1}-\Gamma_{44}^{z}.\Gamma_{1z}^{1}=-\Gamma_{44}^{2}.\Gamma_{12}^{1}\ ;$$

$$R_{424}^{2}=\frac{\partial\Gamma_{42}^{2}}{\partial x^{4}}-\frac{\partial\Gamma_{44}^{2}}{\partial x^{2}}+\Gamma_{42}^{z}.\Gamma_{4z}^{2}-\Gamma_{44}^{z}.\Gamma_{2z}^{2}=-\frac{\partial\Gamma_{44}^{2}}{\partial x^{2}}+\Gamma_{42}^{4}.\Gamma_{44}^{2}-\Gamma_{44}^{2}.\Gamma_{22}^{2}\ ;$$

$$R_{434}^{3}=\frac{\partial\Gamma_{43}^{3}}{\partial x^{4}}-\frac{\partial\Gamma_{44}^{3}}{\partial x^{3}}+\Gamma_{43}^{z}.\Gamma_{4z}^{3}-\Gamma_{44}^{z}.\Gamma_{3z}^{3}=-\frac{\partial\Gamma_{44}^{3}}{\partial x^{3}}+\Gamma_{43}^{4}.\Gamma_{44}^{3}-\Gamma_{44}^{2}.\Gamma_{32}^{3}\ ;$$

$$R_{444}^{4}=\frac{\partial\Gamma_{44}^{4}}{\partial x^{4}}-\frac{\partial\Gamma_{44}^{4}}{\partial x^{4}}+\Gamma_{44}^{z}.\Gamma_{4z}^{4}-\Gamma_{44}^{z}.\Gamma_{4z}^{4}=0.$$

$$R_{44}=R_{414}^{1}+R_{424}^{2}+R_{434}^{3}+R_{444}^{4}\ ;$$

$$R_{44}=-\frac{\partial\Gamma_{44}^{2}}{\partial x^{2}}-\frac{\partial\Gamma_{44}^{3}}{\partial x^{3}}+\Gamma_{43}^{4}.\Gamma_{44}^{3}+\Gamma_{44}^{2}.\left(\Gamma_{42}^{4}-\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{32}^{3}\right).$$

Nous allons avoir besoin des dérivées suivantes :

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^{2}}{\partial x^{2}}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\dot{\alpha}}{2.\beta}\right)=\frac{\ddot{\alpha}.\beta-\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{2.\beta^{2}}\ ;$$

$$\frac{\partial\Gamma_{21}^{1}}{\partial x^{2}}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\dot{\alpha}}{2\alpha}\right)=\frac{\ddot{\alpha}.\alpha-\dot{\alpha}^{2}}{2.\alpha^{2}}\ ;$$

$$\frac{\partial\Gamma_{23}^{3}}{\partial x^{2}}=\frac{\partial\Gamma_{24}^{4}}{\partial x^{2}}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma}+\frac{1}{r}\right)=\frac{\ddot{\gamma}.\gamma-\dot{\gamma}^{2}}{2.\gamma^{2}}-\frac{1}{r^{2}}\ ;$$

$$\frac{\partial\Gamma_{33}^{2}}{\partial x^{2}}=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}.\frac{\dot{\gamma}.r^{2}+2.\gamma.r}{\beta}\right)=-\frac{1}{2}.\frac{\beta.(\ddot{\gamma}.r^{2}+2.\dot{\gamma}.r+2.\dot{\gamma}.r+2.\gamma)-\dot{\beta}.(\dot{\gamma}.r^{2}+2.\gamma.r)}{\beta^{2}}\ ;$$

$$\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2.\beta^2}.\left((\beta.\ddot{\gamma} - \dot{\beta}.\dot{\gamma}).r^2 + (4.\beta.\dot{\gamma} - 2.\dot{\beta}.\gamma).r + 2.\beta.\gamma\right) \ ;$$

$$\frac{\partial \Gamma^4_{34}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{cos\theta}{sin\theta}\right) = -\frac{1}{sin^2\theta} \ ;$$

$$\frac{\partial \Gamma^2_{44}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}.\frac{\dot{\gamma}.r^2 + 2.\gamma.r}{\beta}.sin^2\theta\right) \ ;$$

$$\frac{\partial \Gamma^2_{44}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2.\beta^2}.\left((\beta.\ddot{\gamma} - \dot{\beta}.\dot{\gamma}).r^2 + (4.\beta.\dot{\gamma} - 2.\dot{\beta}.\gamma).r + 2.\beta.\gamma\right).sin^2\theta \ ;$$

$$\frac{\partial \Gamma^3_{44}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-sin\theta.cos\theta\right) = sin^2\theta - cos^2\theta.$$

Récapitulons :

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} = \frac{\ddot{\alpha}.\beta - \dot{\alpha}.\dot{\beta}}{2.\beta^2} \ ; \\
\frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial x^2} = \frac{\ddot{\alpha}.\alpha - \dot{\alpha}^2}{2.\alpha^2} \ ; \\
\frac{\partial \Gamma^3_{23}}{\partial x^2} = \frac{\partial \Gamma^4_{24}}{\partial x^2} = \frac{\ddot{\gamma}.\gamma - \dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} - \frac{1}{r^2} \ ; \\
\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2.\beta^2}.\left((\beta.\ddot{\gamma} - \dot{\beta}.\dot{\gamma}).r^2 + (4.\beta.\dot{\gamma} - 2.\dot{\beta}.\gamma).r + 2.\beta.\gamma\right) \ ; \\
\frac{\partial \Gamma^4_{34}}{\partial x^3} = -\frac{1}{sin^2\theta} \ ; \\
\frac{\partial \Gamma^2_{44}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2.\beta^2}.\left((\beta.\ddot{\gamma} - \dot{\beta}.\dot{\gamma}).r^2 + (4.\beta.\dot{\gamma} - 2.\dot{\beta}.\gamma).r + 2.\beta.\gamma\right).sin^2\theta \ ; \\
\frac{\partial \Gamma^3_{44}}{\partial x^3} = sin^2\theta - cos^2\theta.
\end{array}\right.$$

Reprenons maintenant les expressions de R_{11}, R_{22}, R_{33} et R_{44}, et substituons, aux symboles de Christoffel et à leurs dérivées, les expressions que nous venons de calculer :

$$R_{11} = -\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^2} + \Gamma^2_{11}.\left(\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{32} - \Gamma^4_{42}\right) \ ;$$

$$R_{11} = -\frac{\ddot{\alpha}.\beta - \dot{\alpha}.\dot{\beta}}{2.\beta^2} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\beta}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$R_{11} = -\frac{\ddot{\alpha}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{2.\beta^2} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\beta}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{2}{r}\right) \ ;$$

$$R_{11} = -\frac{\ddot{\alpha}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{2.\beta^2} + \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\beta^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma} - \frac{\dot{\alpha}}{\beta.r} \ ;$$

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} - \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right).$$

$$R_{22} = \frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^3_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^4_{24}}{\partial x^2} + \left(\Gamma^1_{21}\right)^2 + \left(\Gamma^3_{23}\right)^2 + \left(\Gamma^4_{24}\right)^2 - \Gamma^2_{22}.\left(\Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{32} + \Gamma^4_{42}\right) \ ;$$

$$R_{22} = \frac{\ddot{\alpha}.\alpha - \dot{\alpha}^2}{2.\alpha^2} + \frac{\ddot{\gamma}.\gamma - \dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{\ddot{\gamma}.\gamma - \dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} - \frac{1}{r^2}...$$

$$...+\left(\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{1}{r} + \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$R_{22} = \frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{\dot{\alpha}^2}{2.\alpha^2} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} + \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma.r} + \frac{2}{r^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{\beta.r} \ ;$$

$$R_{22} = \frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{\beta.r} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma.r}.$$

$$R_{33} = -\frac{\partial\Gamma^2_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma^4_{34}}{\partial x^3} + \left(\Gamma^4_{34}\right)^2 + \Gamma^2_{33}.\left(\Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22} - \Gamma^4_{42}\right) \ ;$$

$$R_{33} = \frac{(\beta.\ddot{\gamma} - \dot{\beta}.\dot{\gamma}).r^2 + (4.\beta.\dot{\gamma} - 2.\dot{\beta}.\gamma).r + 2.\beta.\gamma}{2.\beta^2} - \frac{1}{sin^2\theta} + \left(\frac{cos\theta}{sin\theta}\right)^2 ...$$

$$... - \left(\frac{\dot{\gamma}.r^2 + 2.\gamma.r}{2.\beta}\right).\left(\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{1}{r} - \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$R_{33} = \frac{(\beta.\ddot{\gamma} - \dot{\beta}.\dot{\gamma}).r^2 + (4.\beta.\dot{\gamma} - 2.\dot{\beta}.\gamma).r + 2.\beta.\gamma}{2.\beta^2} - 1 + \left(\frac{\dot{\gamma}.r^2 + 2.\gamma.r}{2.\beta}\right).\left(\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{2.\beta}\right) \ ;$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left[\frac{(\beta.\ddot{\gamma} - \dot{\beta}.\dot{\gamma}).r^2 + (4.\beta.\dot{\gamma} - 2.\dot{\beta}.\gamma).r}{2.\beta\gamma} + 1 - \frac{\beta}{\gamma} + \left(\frac{\dot{\gamma}.r^2 + 2.\gamma.r}{2.\gamma}\right).\left(\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{2.\beta}\right)\right]$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left[\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma} + \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma}\right).r^2 + \left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{2.\beta}\right).r + 1 - \frac{\beta}{\gamma}\right] \ ;$$

$$R_{33}=\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma}+\frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2+\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r+\frac{\gamma}{\beta}-1.$$

$$R_{44}=-\frac{\partial\Gamma^2_{44}}{\partial x^2}-\frac{\partial\Gamma^3_{44}}{\partial x^3}+\Gamma^4_{43}.\Gamma^3_{44}+\Gamma^2_{44}.\left(\Gamma^4_{42}-\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{22}-\Gamma^3_{32}\right)\ ;$$

$$R_{44}=\frac{(\beta.\ddot{\gamma}-\dot{\beta}.\dot{\gamma}).r^2+(4.\beta.\dot{\gamma}-2.\dot{\beta}.\gamma).r+2.\beta.\gamma}{2.\beta^2}.sin^2\theta-(sin^2\theta-cos^2\theta)...$$

$$...-\frac{cos\theta}{sin\theta}.sin\theta.cos\theta-\left(\frac{\dot{\gamma}.r^2+2.\gamma.r}{2.\beta}.sin^2\theta\right).\left(\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma}+\frac{1}{r}-\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}-\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{1}{r}\right)\ ;$$

$$R_{44}=\frac{(\beta.\ddot{\gamma}-\dot{\beta}.\dot{\gamma}).r^2+(4.\beta.\dot{\gamma}-2.\dot{\beta}.\gamma).r+2.\beta.\gamma}{2.\beta^2}.sin^2\theta-sin^2\theta...$$

$$...+\left(\frac{\dot{\gamma}.r^2+2.\gamma.r}{2.\beta}.sin^2\theta\right).\left(\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}+\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}\right).$$

On remarque que $R_{44}=R_{33}.sin^2\theta$, ce qui permet d'aller directement au résultat :

$$R_{44}=\left[\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma}+\frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2+\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r+\frac{\gamma}{\beta}-1\right].sin^2\theta.$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} R_{11}=\frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}}+\frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha}+\frac{\dot{\beta}}{4.\beta}-\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{1}{r}\right)\ ; \\ R_{22}=\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}+\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2}-\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right)+\frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta}+\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\ ; \\ R_{33}=\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma}+\frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2+\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r+\frac{\gamma}{\beta}-1\ ; \\ R_{44}=R_{33}.sin^2\theta\ ; \\ R_{ij}=0\ \text{ pour }\ i\neq j. \end{cases}$$

Pour passer des composantes covariantes aux composantes mixtes, on procède de la façon suivante :

$$R^1_1=g^{11}.R_{11}=\frac{1}{\alpha}.R_{11}=\frac{\dot{\alpha}}{\alpha.\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}}+\frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha}+\frac{\dot{\beta}}{4.\beta}-\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{1}{r}\right)\ ;$$

$$R_2^2 = g^{22}.R_{22} = -\frac{1}{\beta}.R_{22} = -\frac{1}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{\beta.r} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma.r}\right) \ ;$$

$$R_3^3 = g^{33}.R_{33} = -\frac{1}{\gamma.r^2}.R_{33}...$$

$$... = -\frac{1}{\gamma.r^2}.\left[\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r + \frac{\gamma}{\beta} - 1\right] \ ;$$

$$R_4^4 = g^{44}.R_{44} = -\frac{1}{\gamma.r^2.sin^2\theta}.R_{44}.$$

Comme $R_{44} = R_{33}.sin^2\theta$, on obtient : $R_4^4 = -\frac{1}{\gamma.r^2}.R_{33} = R_3^3$.

4 Tenseur de Ricci en métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild est caractérisée par :

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \frac{2.k}{r} \ ; \\ \\ \beta = \frac{1}{1-\frac{2.k}{r}} \ ; \\ \\ \gamma = 1. \end{cases}$$

C'est une métrique radiale ($\gamma = 1$), ce qui entraîne : $\dot{\gamma} = \ddot{\gamma} = 0$.

Elle est aussi symétrique, car $\alpha.\beta = 1$. Ceci entraîne que $Log\alpha + Log\beta = 0$, et, en différenciant : $\frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$.

Remarquons aussi que $\dot{\alpha} = \frac{2.k}{r^2}$ et que $\ddot{\alpha} = -\frac{4.k}{r^3}$.

Nous allons utiliser ces remarques pour simplifier les expressions générales des composantes du tenseur de Ricci, que nous avons calculées précédemment :

$$\begin{cases} R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ; \\ \\ R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right) \ ; \\ \\ R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r + \frac{\gamma}{\beta} - 1 \ ; \\ \\ R_{44} = R_{33}.sin^2\theta \ ; \\ \\ R_{ij} = 0 \ \text{ pour } \ i \neq j. \end{cases}$$

$$R_{11} = \frac{\dot\alpha}{\beta}.\left(-\frac{\ddot\alpha}{2.\dot\alpha} + \frac{\dot\alpha}{4.\alpha} + \frac{\dot\beta}{4.\beta} - \frac{\dot\gamma}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \;;$$

$$R_{11} = \frac{\dot\alpha}{\beta}.\left(-\frac{\ddot\alpha}{2.\dot\alpha} + \frac{\dot\alpha}{4.\alpha} - \frac{\dot\alpha}{4.\alpha} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\dot\alpha}{\beta}.\left(-\frac{\ddot\alpha}{2.\dot\alpha} - \frac{1}{r}\right) \;;$$

$$R_{11} = \frac{1}{\beta}.\left(-\frac{\ddot\alpha}{2} - \frac{\dot\alpha}{r}\right) = \frac{1}{\beta}.\left(\frac{2.k}{r^3} - \frac{2.k}{r^3}\right) = 0.$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot\alpha}{2.\alpha} + \frac{\ddot\gamma}{\gamma} - \frac{\dot\alpha^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot\gamma^2}{2.\gamma^2} - \frac{\dot\alpha.\dot\beta}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot\beta.\dot\gamma}{2.\beta.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot\beta}{\beta} + \frac{2.\dot\gamma}{\gamma}\right) \;;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot\alpha}{2.\alpha} - \frac{\dot\alpha^2}{4.\alpha^2} + \frac{\dot\alpha^2}{4.\alpha^2}\right) + \frac{1}{r}.\left(\frac{\dot\alpha}{\alpha}\right) \;;$$

$$R_{22} = \frac{\ddot\alpha}{2.\alpha} + \frac{\dot\alpha}{\alpha.r} = \frac{1}{2.\alpha}.\left(\ddot\alpha + \frac{2.\dot\alpha}{r}\right) = \frac{1}{2.\alpha}.\left(-\frac{4.k}{r^3} + \frac{4.k}{r^3}\right) = 0.$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot\gamma}{2.\gamma} - \frac{\dot\beta.\dot\gamma}{4.\beta.\gamma} + \frac{\dot\alpha.\dot\gamma}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot\gamma}{\gamma} - \frac{\dot\beta}{2.\beta} + \frac{\dot\alpha}{2.\alpha}\right).r + \frac{\gamma}{\beta} - 1 \;;$$

$$R_{33} = \frac{1}{\beta}.\left(\frac{\dot\alpha}{2.\alpha} + \frac{\dot\alpha}{2.\alpha}\right).r + \frac{1}{\beta} - 1 = \alpha.\frac{\dot\alpha}{\alpha}.r + \alpha - 1 \;;$$

$$R_{33} = \dot\alpha.r + \alpha - 1 = \frac{2.k}{r} + 1 - \frac{2.k}{r} - 1 = 0.$$

$$R_{44} = R_{33}.sin^2\theta = 0.$$

Le calcul des composantes mixtes de ce tenseur est évident :

$$R_1^1 = g^{11}.R_{11} = \frac{1}{\alpha}.R_{11} = 0 \;;$$

$$R_2^2 = g^{22}.R_{22} = -\alpha.R_{22} = 0 \;;$$

$$R_3^3 = g^{33}.R_{33} = -\frac{1}{r^2}.R_{33} = 0 \;;$$

$$R_4^4 = g^{44}.R_{44} = -\frac{1}{r^2.sin^2\theta}.R_{44} = 0.$$

Le scalaire de Ricci est : $R = R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 + R_4^4 = 0.$

Ce qu'il faut retenir, c'est que les coordonnées covariantes (resp. mixtes, contravariantes) du tenseur de Ricci dans le vide, dans le voisinage d'un point matériel, calculées selon la métrique de Schwarzschild, s'expriment par la matrice suivante :

$$(R_{ij}) = (R^i_j) = (R^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La métrique de Schwarzschild possède donc cette propriété "extraordinaire" : son tenseur de Ricci est identiquement nul (dans le vide).

5 Tenseur de Ricci en métrique de Ni

La métrique triviale de Ni est caractérisée par :

$$\begin{cases} \alpha = e^{-\frac{2.k}{r}} \ ; \\ \\ \beta = \gamma = e^{\frac{2.k}{r}}. \end{cases}$$

C'est une métrique isotrope, puisque $\beta = \gamma$.

Elle est aussi symétrique, car $\alpha.\beta = 1$. Ceci entraîne que $Log\alpha + Log\beta = 0$, et, en différenciant : $\frac{\dot\beta}{\beta} = -\frac{\dot\alpha}{\alpha}$.

Puisque $\gamma = \beta$, on a aussi : $\frac{\dot\gamma}{\gamma} = -\frac{\dot\alpha}{\alpha}$.

Remarquons que $\dot\alpha = \frac{2.k}{r^2}.e^{-\frac{2.k}{r}}$ et que $\ddot\alpha = \left(\frac{4.k^2}{r^4} - \frac{4.k}{r^3}\right).e^{-\frac{2.k}{r}}$.

Et aussi : $\dot\beta = \dot\gamma = -\frac{2.k}{r^2}.e^{\frac{2.k}{r}}$ et $\ddot\beta = \ddot\gamma = \left(\frac{4.k^2}{r^4} + \frac{4.k}{r^3}\right).e^{\frac{2.k}{r}}$.

Nous allons utiliser ces remarques pour simplifier les expressions générales des composantes du tenseur de Ricci, que nous avons calculées précédemment :

$$\begin{cases} R_{11} = \frac{\dot\alpha}{\beta}.\left(-\frac{\ddot\alpha}{2.\dot\alpha} + \frac{\dot\alpha}{4.\alpha} + \frac{\dot\beta}{4.\beta} - \frac{\dot\gamma}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ; \\ \\ R_{22} = \left(\frac{\ddot\alpha}{2.\alpha} + \frac{\ddot\gamma}{\gamma} - \frac{\dot\alpha^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot\gamma^2}{2.\gamma^2} - \frac{\dot\alpha.\dot\beta}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot\beta.\dot\gamma}{2.\beta.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot\beta}{\beta} + \frac{2.\dot\gamma}{\gamma}\right) \ ; \\ \\ R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot\gamma}{2.\gamma} - \frac{\dot\beta.\dot\gamma}{4.\beta.\gamma} + \frac{\dot\alpha.\dot\gamma}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot\gamma}{\gamma} - \frac{\dot\beta}{2.\beta} + \frac{\dot\alpha}{2.\alpha}\right).r + \frac{\gamma}{\beta} - 1 \ ; \\ \\ R_{44} = R_{33}.sin^2\theta \ ; \\ \\ R_{ij} = 0 \ \text{ pour } \ i \neq j. \end{cases}$$

$$R_{11} = \frac{\dot\alpha}{\beta}.\left(-\frac{\ddot\alpha}{2.\dot\alpha} + \frac{\dot\alpha}{4.\alpha} + \frac{\dot\beta}{4.\beta} - \frac{\dot\gamma}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}}+\frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha}-\frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}-\frac{1}{r}\right) = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}-\frac{1}{r}\right)\ ;$$

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\left(\frac{4.k^2}{r^4}-\frac{4.k}{r^3}\right).e^{-\frac{2.k}{r}}}{2.\frac{2.k}{r^2}.e^{-\frac{2.k}{r}}}+\frac{\frac{2.k}{r^2}.e^{-\frac{2.k}{r}}}{2.e^{-\frac{2.k}{r}}}-\frac{1}{r}\right) = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{k}{r^2}+\frac{1}{r}+\frac{k}{r^2}-\frac{1}{r}\right)=0.$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}+\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2}-\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right)+\frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta}+\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\ ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}+\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{2.\alpha^2}+\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{2.\alpha^2}\right)+\frac{1}{r}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}-\frac{2.\dot{\alpha}}{\alpha}\right)\ ;$$

$$R_{22} = \frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}+\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2-\frac{\dot{\alpha}}{\alpha.r}\ ;$$

$$R_{22} = \frac{\left(\frac{4.k^2}{r^4}-\frac{4.k}{r^3}\right).e^{-\frac{2.k}{r}}}{2.e^{-\frac{2.k}{r}}}+\frac{\left(\frac{4.k^2}{r^4}+\frac{4.k}{r^3}\right).e^{\frac{2.k}{r}}}{e^{\frac{2.k}{r}}}-\left(\frac{\frac{2.k}{r^2}.e^{-\frac{2.k}{r}}}{e^{-\frac{2.k}{r}}}\right)^2-\frac{\frac{2.k}{r^2}.e^{-\frac{2.k}{r}}}{r.e^{-\frac{2.k}{r}}}\ ;$$

$$R_{22} = \frac{2.k^2}{r^4}-\frac{2.k}{r^3}+\frac{4.k^2}{r^4}+\frac{4.k}{r^3}-\frac{4.k^2}{r^4}-\frac{2.k}{r^3}=\frac{2.k^2}{r^4}.$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma}+\frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2+\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r+\frac{\gamma}{\beta}-1$$

$$R_{33} = \left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}\right).r^2+\left(-\frac{2.\dot{\alpha}}{\alpha}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r\ ;$$

$$R_{33} = \left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{\dot{\alpha}^2}{2.\alpha^2}\right).r^2-\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}.r\ ;$$

$$R_{33} = \left(\frac{\left(\frac{4.k^2}{r^4}+\frac{4.k}{r^3}\right).e^{\frac{2.k}{r}}}{2.e^{\frac{2.k}{r}}}-\frac{\left(\frac{2.k}{r^2}.e^{-\frac{2.k}{r}}\right)^2}{2.\left(e^{-\frac{2.k}{r}}\right)^2}\right).r^2-\frac{\frac{2.k}{r^2}.e^{-\frac{2.k}{r}}}{e^{-\frac{2.k}{r}}}.r\ ;$$

$$R_{33} = \left(\frac{2.k^2}{r^4}+\frac{2.k}{r^3}-\frac{2.k^2}{r^4}\right).r^2-\frac{2.k}{r}\ ;$$

$$R_{33} = \frac{2.k^2}{r^2}+\frac{2.k}{r}-\frac{2.k^2}{r^2}-\frac{2.k}{r}=0.$$

Pour passer des composantes covariantes aux composantes mixtes, on procède de la façon suivante :

$$R_1^1 = g^{11}.R_{11} = \frac{1}{\alpha}.R_{11} = 0\ ;$$

$$R_2^2 = g^{22}.R_{22} = -\alpha.R_{22} = (-\alpha).\frac{2.k^2}{r^4} = -\frac{2.k^2}{r^4}.e^{-\frac{2.k}{r}} \;;$$

$$R_3^3 = g^{33}.R_{33} = -\frac{\alpha}{r^2}.R_{33} = 0 \;;$$

$$R_4^4 = g^{44}.R_{44} = -\frac{\alpha}{r^2.sin^2\theta}.R_{44} = 0.$$

Le scalaire de Ricci R se calcule de la façon suivante :

$$R = R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 + R_4^4 = R_2^2 = -\frac{2k^2}{r^4}.e^{-\frac{2k}{r}}.$$

Il faut rappeler que le tenseur de Ricci se transforme selon les règles de l'algèbre linéaire quand on change de repère ; le scalaire de Ricci, quant à lui, est invariant.

Nous allons calculer aussi les composantes contravariantes du tenseur de Ricci :

$$R^{11} = R^{33} = R^{44} = 0 \;;$$

$$R^{22} = g^{22}.R_2^2 = -\alpha.R_2^2 = -e^{-\frac{2k}{r}}.\left(-\frac{2k^2}{r^4}.e^{-\frac{2k}{r}}\right) = \frac{2k^2}{r^4}.e^{-\frac{4.k}{r}}.$$

En définitive, en coordonnées sphériques, les coordonnées covariantes (respectivement : mixtes, contravariantes) du tenseur de Ricci dans le vide, dans le voisinage d'un point matériel, calculées selon la métrique triviale de Ni, s'expriment par les trois matrices suivantes :

$$(R_{ij}) = \frac{2k^2}{r^4}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;$$

$$(R_j^i) = -\frac{2k^2}{r^4}.e^{-\frac{2k}{r}}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;$$

$$(R^{ij}) = \frac{2k^2}{r^4}.e^{-\frac{4k}{r}}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous dirons que le tenseur de Ricci de la métrique de Ni est radial ; ceci signifie que sa seule composante non nulle correspond à la direction radiale, définie par la distance radiale r.

Attention : la métrique de Ni n'est pas elle-même radiale, mais isotrope, car, en tout point, elle modifie les règles de manière identique dans toutes les directions.

6 Tenseur de Ricci d'une métrique isotrope ($\beta = \gamma$)

La métrique est dite isotrope si la masse ponctuelle produit une modification des règles selon toutes les directions indifféremment. Autrement dit, on a :

$$\gamma = \beta.$$

Les métriques que nous allons étudier ici sont donc de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \beta.(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\theta.d\phi^2).$$

Nous allons reprendre les expressions de R_{11}, R_{22} et R_{33} obtenues dans le cas général, et nous allons remplacer γ par β, $\dot{\gamma}$ par $\dot{\beta}$ et $\ddot{\gamma}$ par $\ddot{\beta}$.

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} - \frac{1}{r}\right) \;;$$

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} - \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{1}{r}\right).$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right) \;;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\beta}^2}{2.\beta^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot{\beta}^2}{2.\beta^2}\right) + \frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2.\dot{\beta}}{\beta}\right) \;;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right) + \frac{1}{r}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}.$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r + \frac{\gamma}{\beta} - 1 \;;$$

$$R_{33}=\left(\frac{\ddot{\beta}}{2.\beta}-\frac{\dot{\beta}^2}{4.\beta^2}+\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right).r^2+\left(\frac{2.\dot{\beta}}{\beta}-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r\ ;$$

$$R_{33}=\left(\frac{\ddot{\beta}}{2.\beta}-\frac{\dot{\beta}^2}{4.\beta^2}+\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right).r^2+\left(\frac{3.\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r.$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} R_{11}=\frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}}+\frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha}-\frac{\dot{\beta}}{4.\beta}-\frac{1}{r}\right)\ ; \\ R_{22}=\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}+\frac{\ddot{\beta}}{\beta}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2}-\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right)+\frac{1}{r}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}\ ; \\ R_{33}=\left(\frac{\ddot{\beta}}{2.\beta}-\frac{\dot{\beta}^2}{4.\beta^2}+\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right).r^2+\left(\frac{3.\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r\ ; \\ R_{44}=R_{33}.sin^2\theta\ ; \\ R_{ij}=0\ \text{ pour }\ i\neq j. \end{cases}$$

7 Tenseur de Ricci d'une métrique radiale ($\gamma = 1$)

La métrique est dite radiale si la masse ponctuelle produit une modification des règles dans la direction radiale seulement. Autrement dit, on a :

$$\gamma = 1.$$

Les métriques que nous allons étudier ici sont donc de la forme :

$$ds^2=\alpha.c^2.dt^2-\beta.dr^2-(r^2.d\theta^2+r^2.sin^2\theta.d\phi^2).$$

Nous allons reprendre les expressions de R_{11}, R_{22}, R_{33} et R_{44} obtenues dans le cas général, et nous allons remplacer γ par 1 et $\dot{\gamma}$ et $\ddot{\gamma}$ par 0.

$$R_{11}=\frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}}+\frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha}+\frac{\dot{\beta}}{4.\beta}-\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{1}{r}\right)=\frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}}+\frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha}+\frac{\dot{\beta}}{4.\beta}-\frac{1}{r}\right)\ ;$$

$$R_{22}=\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}+\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2}-\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right)+\frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta}+\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\ ;$$

$$R_{22}=\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right)-\frac{1}{r}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}\ ;$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r + \frac{\gamma}{\beta} - 1 \ ;$$

$$R_{33} = \frac{1}{\beta}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r + \frac{1}{\beta} - 1.$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{1}{r}\right) \ ; \\ R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right) - \frac{1}{r}.\frac{\dot{\beta}}{\beta} \ ; \\ R_{33} = \frac{1}{\beta}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r + \frac{1}{\beta} - 1 \ ; \\ R_{44} = R_{33}.sin^2\theta \ ; \\ R_{ij} = 0 \ \text{ pour } \ i \neq j. \end{cases}$$

8 Tenseur de Ricci d'une métrique symétrique ($\alpha.\beta = 1$)

Une métrique est dite symétrique si les coefficients α et β sont inverses :

$$\alpha.\beta = 1.$$

Les métriques que nous allons étudier ici sont donc de la forme :

$$ds^2 = \alpha.c^2.dt^2 - \frac{1}{\alpha}.dr^2 - \gamma.(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\theta.d\phi^2).$$

Nous allons reprendre les expressions de R_{11}, R_{22} et R_{33} obtenues dans le cas général, et nous allons les adapter.

Remarquons que l'égalité $\alpha.\beta = 1$ équivaut à : $Log\alpha + Log\beta = 0$, ou encore : $\frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$.

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$R_{11} = \alpha.\dot{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$R_{11} = \alpha.\dot{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right).$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right) \ ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} + \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{2.\alpha.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right) \ ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{2.\alpha.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right).$$

$$R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r + \frac{\gamma}{\beta} - 1 \ ;$$

$$R_{33} = \alpha.\gamma.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \alpha.\gamma.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r + \alpha.\gamma - 1 \ ;$$

$$R_{33} = \alpha.\gamma.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{2.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \alpha.\gamma.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right).r + \alpha.\gamma - 1.$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} R_{11} = \alpha.\dot{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ; \\ R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{2.\alpha.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right) \ ; \\ R_{33} = \alpha.\gamma.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{2.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \alpha.\gamma.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right).r + \alpha.\gamma - 1 \ ; \\ R_{44} = R_{33}.sin^2\theta \ ; \\ R_{ij} = 0 \ \text{ pour } \ i \neq j. \end{cases}$$

9 Tenseur de Ricci d'une métrique radiale et symétrique ($\gamma = 1,\ \alpha.\beta = 1$)

Reprenons les expressions des composantes du tenseur de Ricci en métrique symétrique, et remplaçons γ par 1, $\dot{\gamma}$ par 0, et $\ddot{\gamma}$ par 0 :

$$R_{11} = \alpha.\dot{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) \ ;$$

$$R_{11} = \alpha.\dot{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} - \frac{1}{r}\right) = -\frac{\alpha}{2}.\left(\ddot{\alpha} + \frac{2.\dot{\alpha}}{r}\right).$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{2.\alpha.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right) \;\; ;$$

$$R_{22} = \frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{1}{r}.\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{2.\alpha}.\left(\ddot{\alpha} + \frac{2.\dot{\alpha}}{r}\right).$$

$$R_{33} = \alpha.\gamma.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{2.\alpha.\gamma}\right).r^2 + \alpha.\gamma.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right).r + \alpha.\gamma - 1 \; ;$$

$$R_{33} = \dot{\alpha}.r + \alpha - 1.$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} R_{11} = -\frac{\alpha}{2}.\left(\ddot{\alpha} + \frac{2.\dot{\alpha}}{r}\right) \;\; ; \\ R_{22} = \frac{1}{2.\alpha}.\left(\ddot{\alpha} + \frac{2.\dot{\alpha}}{r}\right) \;\; ; \\ R_{33} = \dot{\alpha}.r + \alpha - 1 \; ; \\ R_{44} = R_{33}.sin^2\theta \; ; \\ R_{ij} = 0 \;\; \text{pour} \;\; i \neq j. \end{cases}$$

10 Métrique radiale et symétrique, à tenseur de Ricci identiquement nul ($\gamma = 1,\ \alpha.\beta = 1,\ R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = 0$)

Posons-nous maintenant la question suivante : à quelle condition ces coefficients vont-ils s'annuler ? Autrement dit, quelle est la condition pour que le tenseur de Ricci soit identiquement nul ?

Nous devons avoir :

$$\begin{cases} R_{11} = -\frac{\alpha}{2}.\left(\ddot{\alpha} + \frac{2.\dot{\alpha}}{r}\right) = 0 \; ; \\ R_{22} = \frac{1}{2.\alpha}.\left(\ddot{\alpha} + \frac{2.\dot{\alpha}}{r}\right) = 0 \; ; \\ R_{33} = \dot{\alpha}.r + \alpha - 1 = 0. \end{cases}$$

Les deux conditions sont : $\ddot{\alpha} + \frac{2.\dot{\alpha}}{r} = 0$ et $\dot{\alpha}.r + \alpha - 1 = 0$.

Etudions la première condition :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2.\dot{\alpha}}{r} \;\; ;$$

Cette équation différentielle a pour solution :

$$\dot{\alpha} = \frac{K}{r^2} \ ;$$

$$\alpha = -\frac{K}{r} + K'.$$

K et K' sont deux constantes.

Prenons la seconde condition et faisons les substitutions :

$$\dot{\alpha}.r + \alpha - 1 = 0 \ ;$$

$$\frac{K}{r^2}.r - \frac{K}{r} + K' - 1 = 0 \ ;$$

$$K' - 1 = 0.$$

On obtient donc :

$$\alpha = 1 - \frac{K}{r}.$$

Si on veut respecter la limite newtonienne, il faut prendre : $K = \frac{2.G.M}{c^2}$. La métrique obtenue est celle de Schwarzschild.

Théorème

La seule métrique radiale, symétrique, à tenseur de Ricci identiquement nul, qui soit éligible, est la métrique de Schwarzschild.

11 Métrique radiale à tenseur de Ricci identiquement nul ($\gamma = 1,\ R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = 0$)

Supprimons l'une des hypothèses : supposons seulement que la métrique soit radiale. Le tenseur de Ricci peut-il être identiquement nul ?

Récupérons les composantes du tenseur de Ricci d'une métrique radiale, et écrivons les conditions :

$$\begin{cases} R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{1}{r}\right) = 0 \ ; \\ R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right) - \frac{1}{r}.\frac{\dot{\beta}}{\beta} = 0 \ ; \\ R_{33} = \frac{1}{\beta}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r + \frac{1}{\beta} - 1 = 0. \end{cases}$$

La première condition s'écrit :

$$-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}}+\frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha}+\frac{\dot{\beta}}{4.\beta}-\frac{1}{r}=0\ ;$$

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta}=\frac{2.\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}}-\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}+\frac{4}{r}=\frac{\frac{\ddot{\alpha}}{2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha}+\frac{\dot{\alpha}}{r}}{\frac{\dot{\alpha}}{4}}.$$

Passons à la seconde :

$$\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}-\frac{1}{r}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}=0\ ;$$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}=\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}+\frac{1}{r}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}=\frac{\dot{\beta}}{\beta}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha}+\frac{1}{r}\right)\ ;$$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha}=\frac{\dot{\beta}}{\beta}.\left(\frac{\dot{\alpha}}{4}+\frac{\alpha}{r}\right)\ ;$$

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta}=\frac{\frac{\ddot{\alpha}}{2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha}}{\frac{\dot{\alpha}}{4}+\frac{\alpha}{r}}.$$

Rapprochons ces deux résultats :

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta}=\frac{\frac{\ddot{\alpha}}{2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha}+\frac{\dot{\alpha}}{r}}{\frac{\dot{\alpha}}{4}}=\frac{\frac{\ddot{\alpha}}{2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha}}{\frac{\dot{\alpha}}{4}+\frac{\alpha}{r}}=\frac{\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha}+\frac{\dot{\alpha}}{r}\right)-\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha}\right)}{\left(\frac{\dot{\alpha}}{r}\right)-\left(\frac{\dot{\alpha}}{4}+\frac{\alpha}{r}\right)}=\frac{\frac{\dot{\alpha}}{r}}{-\frac{\alpha}{r}}\ ;$$

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta}=-\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\ ;$$

$$d\left(Log\ \beta\right)=-d\left(Log\ \alpha\right)\ ;$$

$$Log\ \beta=-Log\ \alpha+K\ ;$$

$$\beta=e^K.\frac{1}{\alpha}=K'.\frac{1}{\alpha}.$$

Comme α et β tendent vers 1 quand r tend vers l'infini, on a nécessairement $K'=1$, donc $\beta=\frac{1}{\alpha}$. Ceci signifie que la métrique est non seulement radiale, mais aussi symétrique. D'après ce que nous avons vu précédemment, en admettant qu'elle soit éligible, il ne peut s'agir que de la métrique de Schwarzschild.

Théorème

La seule métrique radiale, à tenseur de Ricci identiquement nul, qui soit éligible, est la métrique de Schwarzschild.

12 Tenseur de Ricci d'une métrique isotrope et symétrique ($\beta = \gamma,\ \alpha.\beta = 1$)

Reprenons les expressions des composantes du tenseur de Ricci en métrique isotrope, puis exprimons que $\alpha.\beta = 1$, ce qui se traduit par $\frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$; remarquons aussi que $\dot{\beta} = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}.\beta = -\frac{\dot{\alpha}}{\alpha^2}$, ce qui entraîne : $\ddot{\beta} = -\frac{\ddot{\alpha}.\alpha^2 - 2.\alpha.\dot{\alpha}^2}{\alpha^4} = -\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha^2} + 2\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^3}$, ou encore : $\frac{\ddot{\beta}}{\beta} = -\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + 2\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2}$.

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} - \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{1}{r}\right)\ ;$$

$$R_{11} = \alpha.\dot{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} - \frac{1}{r}\right)\ ;$$

$$R_{11} = \alpha.\dot{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{1}{r}\right).$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right) + \frac{1}{r}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}\ ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + 2\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} + \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}\right) - \frac{1}{r}.\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\ ;$$

$$R_{22} = -\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - \frac{1}{r}.\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}.$$

$$R_{33} = \left(\frac{\ddot{\beta}}{2.\beta} - \frac{\dot{\beta}^2}{4.\beta^2} + \frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}\right).r^2 + \left(\frac{3.\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r\ ;$$

$$R_{33} = \left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2} - \frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}\right).r^2 + \left(-\frac{3.\dot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r\ ;$$

$$R_{33} = \left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{2.\alpha^2}\right).r^2 - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}.r\ ;$$

$$R_{33} = \frac{\dot{\alpha}.r^2}{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{1}{r}\right).$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} R_{11} = \alpha.\dot{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{1}{r}\right) \ ; \\ R_{22} = -\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - \frac{1}{r}.\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \ ; \\ R_{33} = \frac{\dot{\alpha}.r^2}{\alpha}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{1}{r}\right) \ ; \\ R_{44} = R_{33}.sin^2\theta \ ; \\ R_{ij} = 0 \ \text{ pour } \ i \neq j. \end{cases}$$

13 Métrique isotrope et symétrique, à tenseur de Ricci radial $(\beta = \gamma,\ \alpha.\beta = 1,\ R_{11} = R_{33} = R_{44} = 0,\ R_{22} \neq 0)$

Posons-nous maintenant cette question : à quelle condition ce tenseur de Ricci sera-t-il radial, autrement à quelle condition ses composantes seront-elles toutes nulles, sauf R_{22} ?

Cette condition s'écrit :

$$-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha} - \frac{1}{r} = 0 \ ;$$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{2}{r} = 0.$$

Nous savons que $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ la dérivée de $Log\ \alpha$; de même, $\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}}$ est la dérivée de $Log\ \dot{\alpha}$. Quant à $\frac{2}{r}$, c'est la dérivée de $2.Log\ r$. Sous forme différentielle, on peut écrire :

$$d\,(Log\ \dot{\alpha}) - d\,(Log\ \alpha) + 2.d\,(Log\ r) = 0.$$

En intégrant :

$$Log\ \dot{\alpha} - Log\ \alpha + Log\ r^2 = K_1 \ ;$$

$$Log\frac{\dot{\alpha}.r^2}{\alpha} = K_1 \ ;$$

$$\frac{\dot{\alpha}.r^2}{\alpha} = e^{K_1} = K_2 \ ;$$

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \frac{K_2}{r^2} \ ;$$

$$d\,(Log\ \alpha) = -d\left(\frac{K_2}{r}\right) \ ;$$

$$Log\ \alpha = -\frac{K_2}{r} + K_3 \ ;$$

$$\alpha = e^{K_3}.e^{-\frac{K_2}{r}} = K_4.e^{-\frac{K_2}{r}}.$$

Comme α doit tendre vers 1 quand r tend vers l'infini, on doit prendre : $K_4 = 1$.

Pour respecter la limite newtonienne, on doit choisir $K_2 = \frac{2.G.M}{c^2}$. On a donc $\alpha = e^{-\frac{2.G.M}{c^2}}$.

Puisque $\beta = \gamma = \frac{1}{\alpha}$, on a $\beta = \gamma = e^{\frac{2.G.M}{c^2}}$.

La métrique obtenue est celle de Ni.

Théorème

La seule métrique isotrope, symétrique, à tenseur de Ricci radial, qui soit éligible, est la métrique de Ni.

14 Tenseur de Ricci d'une métrique pré-relativiste ($\alpha = e^{-\frac{2k}{r}}$)

Une métrique est dite pré-relativiste si :

$$\alpha = e^{-\frac{2k}{r}}.$$

Les métriques que nous allons étudier ici sont donc de la forme :

$$ds^2 = e^{-\frac{2k}{r}}.c^2.dt^2 - \beta.dr^2 - \gamma.(r^2.d\theta^2 + r^2.sin^2\theta.d\phi^2).$$

Nous allons reprendre les expressions de R_{11}, R_{22} et R_{33} obtenues dans le cas général, et nous allons remplacer α par $e^{-\frac{2k}{r}}$, $\dot{\alpha}$ par $\frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}$, $\ddot{\alpha}$ par $\left(\frac{4k^2}{r^4} - \frac{4k}{r^3}\right).e^{-\frac{2k}{r}}$.

Remarquons aussi que $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \frac{2k}{r^2}$, $\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}} = \frac{2k}{r^2} - \frac{2}{r}$, $\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = \frac{4k^2}{r^4} - \frac{4k}{r^3}$.

$$R_{11} = \frac{\dot{\alpha}}{\beta}.\left(-\frac{\ddot{\alpha}}{2.\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\alpha}}{4.\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) ;$$

$$R_{11} = \frac{1}{\beta}.\frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}.\left(-\frac{k}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{k}{2.r^2} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma} - \frac{1}{r}\right) ;$$

$$R_{11} = \frac{1}{\beta}.\frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}.\left(-\frac{k}{2.r^2} + \frac{\dot{\beta}}{4.\beta} - \frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma}\right).$$

$$R_{22}=\left(\frac{\ddot{\alpha}}{2.\alpha}+\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\alpha}^2}{4.\alpha^2}-\frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2}-\frac{\dot{\alpha}.\dot{\beta}}{4.\alpha.\beta}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right)+\frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta}+\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\ ;$$

$$R_{22}=\left(\frac{2k^2}{r^4}-\frac{2k}{r^3}+\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{k^2}{r^4}-\frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2}-\frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right)+\frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta}+\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\ ;$$

$$R_{22}=\left(\frac{k^2}{r^4}-\frac{2k}{r^3}+\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2}-\frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right)+\frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta}+\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right).$$

$$R_{33}=\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma}+\frac{\dot{\alpha}.\dot{\gamma}}{4.\alpha.\gamma}\right).r^2+\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{\dot{\alpha}}{2.\alpha}\right).r+\frac{\gamma}{\beta}-1\ ;$$

$$R_{33}=\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma}+\frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right).r^2+\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{k}{r^2}\right).r+\frac{\gamma}{\beta}-1.$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} R_{11}=\frac{1}{\beta}.\frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}.\left(-\frac{k}{2.r^2}+\frac{\dot{\beta}}{4.\beta}-\frac{\dot{\gamma}}{2.\gamma}\right)\ ; \\ R_{22}=\left(\frac{k^2}{r^4}-\frac{2k}{r^3}+\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\gamma}^2}{2.\gamma^2}-\frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{2.\beta.\gamma}\right)+\frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot{\beta}}{\beta}+\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\ ; \\ R_{33}=\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot{\gamma}}{2.\gamma}-\frac{\dot{\beta}.\dot{\gamma}}{4.\beta.\gamma}+\frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right).r^2+\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot{\gamma}}{\gamma}-\frac{\dot{\beta}}{2.\beta}+\frac{k}{r^2}\right).r+\frac{\gamma}{\beta}-1\ ; \\ R_{44}=R_{33}.sin^2\theta\ ; \\ R_{ij}=0\ \ \text{pour}\ \ i\neq j. \end{cases}$$

15 Métrique pré-relativiste et radiale ($\alpha=e^{-\frac{2k}{r}}$, $\gamma=1$)

Supposons maintenant que cette métrique soit, en plus, radiale ($\gamma=1$). Nous remplaçons γ par 1, $\dot{\gamma}$ et $\ddot{\gamma}$ par 0 dans les expressions ci-dessus, qui deviennent :

$$\begin{cases} R_{11} = \frac{1}{\beta}.\frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}.\left(-\frac{k}{2.r^2} + \frac{\dot\beta}{4.\beta}\right) \ ; \\ \\ R_{22} = \left(\frac{k^2}{r^4} - \frac{2k}{r^3} - \frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot\beta}{\beta}\right) - \frac{\dot\beta}{\beta.r} \ ; \\ \\ R_{33} = \frac{1}{\beta}.\left(-\frac{\dot\beta}{2.\beta} + \frac{k}{r^2}\right).r + \frac{1}{\beta} - 1 \ ; \\ \\ R_{44} = R_{33}.sin^2\theta \ ; \\ \\ R_{ij} = 0 \ \text{ pour } \ i \neq j. \end{cases}$$

On voit que R_{11} s'annule pour $\frac{\dot\beta}{\beta} = \frac{2k}{r^2}$; mais si on reporte cette valeur dans l'expression de R_{33}, on obtient :

$$R_{33} = \frac{1}{\beta} - 1 \neq 0.$$

On peut donc dire que le tenseur de Ricci d'une telle métrique ne peut être ni identiquement nul, ni radial.

16 Métrique pré-relativiste isotrope à tenseur de Ricci radial $(\alpha = e^{-\frac{2k}{r}},\ \beta = \gamma,\ R_{11} = R_{33} = R_{44} = 0,\ R_{22} \neq 0)$

Cette fois-ci, supposons que notre métrique pré-relativiste soit isotrope ($\beta = \gamma$). Reprenons les expressions des coefficients d'une métrique pré-relativiste, et remplaçons γ par β :

$$\begin{cases} R_{11} = \frac{1}{\beta}.\frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}.\left(-\frac{k}{2.r^2} + \frac{\dot\beta}{4.\beta} - \frac{\dot\gamma}{2.\gamma}\right) \ ; \\ \\ R_{22} = \left(\frac{k^2}{r^4} - \frac{2k}{r^3} + \frac{\ddot\gamma}{\gamma} - \frac{\dot\gamma^2}{2.\gamma^2} - \frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot\beta}{\beta} - \frac{\dot\beta.\dot\gamma}{2.\beta.\gamma}\right) + \frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot\beta}{\beta} + \frac{2.\dot\gamma}{\gamma}\right) \ ; \\ \\ R_{33} = \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\ddot\gamma}{2.\gamma} - \frac{\dot\beta.\dot\gamma}{4.\beta.\gamma} + \frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right).r^2 + \frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{2.\dot\gamma}{\gamma} - \frac{\dot\beta}{2.\beta} + \frac{k}{r^2}\right).r + \frac{\gamma}{\beta} - 1. \end{cases}$$

$$R_{11} = \frac{1}{\beta}.\frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}.\left(-\frac{k}{2.r^2} + \frac{\dot\beta}{4.\beta} - \frac{\dot\beta}{2.\beta}\right) = \frac{1}{\beta}.\frac{2k}{r^2}.e^{-\frac{2k}{r}}.\left(-\frac{k}{2.r^2} - \frac{\dot\beta}{4.\beta}\right) \ ;$$

$$R_{22} = \left(\frac{k^2}{r^4} - \frac{2k}{r^3} + \frac{\ddot\beta}{\beta} - \frac{\dot\beta^2}{2.\beta^2} - \frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot\beta}{\beta} - \frac{\dot\beta^2}{2.\beta^2}\right) + \frac{1}{r}.\left(-\frac{\dot\beta}{\beta} + \frac{2.\dot\beta}{\beta}\right) \ ;$$

$$R_{22} = \frac{k^2}{r^4} - \frac{2k}{r^3} + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - \frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{\beta}}{\beta.r} \ ;$$

$$R_{33} = \left(\frac{\ddot{\beta}}{2.\beta} - \frac{\dot{\beta}^2}{4.\beta^2} + \frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right).r^2 + \left(\frac{2.\dot{\beta}}{\beta} - \frac{\dot{\beta}}{2.\beta} + \frac{k}{r^2}\right).r \ ;$$

$$R_{33} = \left(\frac{\ddot{\beta}}{2.\beta} - \frac{\dot{\beta}^2}{4.\beta^2} + \frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right).r^2 + \left(\frac{3.\dot{\beta}}{2\beta} + \frac{k}{r^2}\right).r.$$

On aura $R_{11} = 0$ si $\frac{\dot{\beta}}{\beta} = -\frac{2k}{r^2}$. On aura alors :

$$d\,(Log\ \beta) = d\left(\frac{2k}{r}\right) \ ;$$

$$Log\ \beta = \frac{2k}{r} + K_1 \ ;$$

$$\beta = e^{K_1}.e^{\frac{2k}{r}} = K_2.e^{\frac{2k}{r}}.$$

Comme β doit tendre vers 1 quand r tend vers l'infini, on doit prendre $K_2 = 1$. On a alors : $\beta = \gamma = e^{\frac{2k}{r}}$. La métrique est donc celle de Ni. Nous savons qu'on a alors $R_{22} = \frac{2k^2}{r^4}$ et $R_{33} = R_{44} = 0$. Vérifions-le.

On sait que $\dot{\beta} = -\frac{2k}{r^2}.e^{\frac{2k}{r}}$ et que $\ddot{\beta} = \left(\frac{4k^2}{r^4} + \frac{4k}{r^3}\right).e^{\frac{2k}{r}}$, donc $\frac{\ddot{\beta}}{\beta} = \frac{4k^2}{r^4} + \frac{4k}{r^3}$. Nous remplaçons donc $\frac{\dot{\beta}}{\beta}$ par $-\frac{2k}{r^2}$ et $\frac{\ddot{\beta}}{\beta}$ par $\frac{4k^2}{r^4} + \frac{4k}{r^3}$.

$$R_{22} = \frac{k^2}{r^4} - \frac{2k}{r^3} + \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - \frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{\beta}}{\beta.r} \ ;$$

$$R_{22} = \frac{k^2}{r^4} - \frac{2k}{r^3} + \frac{4k^2}{r^4} + \frac{4k}{r^3} - \frac{4k^2}{r^4} + \frac{k}{2.r^2}.\frac{2k}{r^2} - \frac{2k}{r^3} = \frac{2.k^2}{r^4}.$$

$$R_{33} = \left(\frac{\ddot{\beta}}{2.\beta} - \frac{\dot{\beta}^2}{4.\beta^2} + \frac{k}{2.r^2}.\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right).r^2 + \left(\frac{3.\dot{\beta}}{2\beta} + \frac{k}{r^2}\right).r \ ;$$

$$R_{33} = \left(\frac{2k^2}{r^4} + \frac{2k}{r^3} - \frac{k^2}{r^4} - \frac{k}{2.r^2}.\frac{2k}{r^2}\right).r^2 + \left(-\frac{3k}{r^2} + \frac{k}{r^2}\right).r \ ;$$

$$R_{33} = \frac{2k}{r} - \frac{2k}{r} = 0.$$

Théorème

La seule métrique pré-relativiste, isotrope, à tenseur de Ricci radial, qui soit éligible, est la métrique triviale de Ni :

$$ds^2 = e^{-\frac{2.k}{r}}.c^2.dt^2 - e^{\frac{2.k}{r}}.dl^2.$$

17 Tenseur de Ricci et potentiel

Les rapports entre les propriétés du tenseur de Ricci et celles du potentiel seront traitées dans le document sur le potentiel.