

Trous noirs et trous gris

Jean-Pierre Chabert

Table des matières

1	Avertissement	2
2	Résumé	3
3	Vitesse de libération en gravitation newtonienne	3
4	L'horizon des trous noirs en gravitation newtonienne	4
5	Densité et compacité	7
6	Aphélie et périhélie en gravitation newtonienne	8
7	Vitesse circulaire en gravitation newtonienne	10
8	Les orbites elliptiques et leurs limites	10
9	Vitesse de libération en métrique de Schwarzschild	12
10	Vitesse circulaire en métrique de Schwarzschild	13
11	Orbite d'énergie minimale en métrique de Schwarzschild	13
12	Vitesse de décrochage en métrique de Schwarzschild	15
13	L'horizon des trous noirs de Schwarzschild	17
14	Sur l'immobilité en métrique de Schwarzschild	23
15	Discussion sur les trous noirs de Schwarzschild	25
16	Vitesse de libération en métrique de Ni	28
17	Vitesse circulaire en métrique de Ni	29
18	Orbite d'énergie minimale en métrique de Ni	30
19	Aphélie et périhélie en métrique de Ni	32

20	Vitesse de décrochage en métrique de Ni	33
21	Angle d'évasion en métrique de Ni	40
22	Les trous gris en métrique de Ni	43
23	Densité moyenne des trous gris	48
24	L'équilibre gravitationnel en métrique de Ni	50
25	Les trous noirs (ou gris) et l'observation	53

1 Avertissement

Ce document fait partie d'un ensemble centré sur la gravitation, comportant plusieurs volets, dont certains, à première vue, ne sont pas directement liés à la gravitation, mais qui seront supposés connus par la suite :

- 01) Gravitation relativiste : introduction
 - Relativité restreinte :
- 02) Les vitesses en Relativité restreinte
 - Physique quantique :
- 03) Physique quantique : généralités
- 04) Physique quantique : l'aventure collective
 - Gravitation :
- 05) La relativité générale a-t-elle été prise en défaut ?
- 06) Gravitation relativiste : principes fondamentaux
- 07) Gravitation et critère de Schild
- 08) L'hypothèse du champ d'entraînement
- 09) Métriques et géodésiques
- 10) Tenseur de Ricci
- 11) Potentiel gravitationnel

- 12) Ni ou Schwarzschild ?
- 13) Gravitation et vide quantique
- 14) L'hypothèse du flux à double sens
- 15) Etude du système solaire en métrique de Ni
- 16) Etude des systèmes binaires en métrique de Ni
- 17) Sur la matière noire
- 18) Trous noirs et trous gris
- 19) Ondes gravitationnelles
- 20) Gravitation et cosmologie

2 Résumé

Si on a lu attentivement ce qui précède, on ne s'étonnera pas de trouver ici une conception non-conformiste des trous noirs ; on pourrait parler plutôt de trous gris, car, en métrique de Ni, ils ne possèdent pas de véritable horizon, dans le sens popularisé par les médias.

3 Vitesse de libération en gravitation newtonienne

Nous avons vu, dans le document sur les métriques, des formules générales pour calculer la vitesse de libération, les relations entre aphélie et périhélie, etc., tout ceci en fonction des coefficients de la métrique. Mais il est impossible d'utiliser ces formules ici, puisque la théorie de Newton ne s'inscrit pas dans le cadre des théories métriques : l'espace est supposé euclidien et le temps absolu ; les effets de la gravitation sont justifiés par des champs de forces (ou d'accéléra-tions) et non par une courbure spatio-temporelle. Nous devons donc reprendre les calculs à partir de zéro.

Considérons une particule-test de masse m (négligeable) orbitant à la vitesse v dans le champ gravitationnel d'un corps sphérique immobile de rayon R et de masse M .

Selon les formules de Newton, l'énergie cinétique de cette particule s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}.m.v^2;$$

et (en notant r la distance entre les centres de gravité des deux corps) son énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = -\frac{G.M.m}{r}.$$

L'énergie totale (réduite) s'écrit donc :

$$\bar{E} = \frac{1}{2}.v^2 - \frac{G.M}{r}.$$

Sur l'orbite de la particule-test, cette quantité \bar{E} se conserve, tandis que r et v varient. Supposons qu'on puisse faire tendre r tend vers l'infini ; v tend alors vers une valeur v_∞ telle que : $\bar{E} = \frac{1}{2}.v_\infty^2$.

Supposons maintenant qu'à l'instant initial la particule se situe à la surface du corps central ($r = R$), et que sa vitesse initiale (qu'on pourra supposer radiale si on le désire, bien que ceci ne soit pas nécessaire) soit juste suffisante pour qu'elle s'évade du champ gravitationnel du corps central ; ceci signifie que v tend vers 0 quand r tend vers l'infini, donc $v_\infty = 0$ et $\bar{E} = 0$.

A l'instant initial, la vitesse v sera alors égale, par définition, à la vitesse de libération v_l , et on aura donc :

$$\bar{E} = \frac{1}{2}.v_l^2 - \frac{G.M}{R} = 0,$$

ce qui signifie que :

$$v_l = \sqrt{\frac{2.G.M}{R}}.$$

4 L'horizon des trous noirs en gravitation newtonienne

Comme l'avaient remarqué John Michell (en 1783) et Pierre-Simon de Laplace (en 1796), on aura $v_l = c$ pour $\frac{2.G.M}{R} = c^2$, autrement dit pour $R = \frac{2.G.M}{c^2}$.

Ce rayon est nommé aujourd'hui rayon de Schwarzschild, et noté R_s .

La vitesse de libération peut s'exprimer en fonction de R_s :

$$v_l = \sqrt{\frac{2.G.M}{R}} = \sqrt{\frac{2.G.M}{c^2}} \cdot \sqrt{\frac{c^2}{R}} = \sqrt{R_s} \cdot \sqrt{\frac{c^2}{R}} = \sqrt{\frac{R_s}{R}}.c.$$

Pour $R < R_s$, la vitesse de libération v_l est supérieure à c .

Ceci signifie qu'un rayon lumineux émis radialement à la surface du corps central de rayon R_s va décélérer en s'éloignant de celui-ci, et que sa vitesse va

tendre vers 0 lorsque $r \rightarrow \infty$.

Remarquons que le rayon de Schwarzschild R_s est un rayon limite. Supposons qu'il soit possible de "compactifier" encore davantage le corps de masse M , en faisant pénétrer toute la masse dans une sphère de rayon R_2 inférieur à R_s . Imaginons une fois de plus qu'un rayon lumineux radial soit émis "verticalement" à partir de la surface (à la vitesse c), et évaluons à quelle "altitude" R_1 la vitesse de ce rayonnement va s'annuler avant qu'il ne retombe. Car, évidemment, pour les équations de Newton, la lumière est un projectile comme les autres, soumis aux lois de la balistique...

A l'émission (vitesse c) l'énergie s'écrit :

$$\bar{E} = \frac{1}{2}.c^2 - \frac{G.M}{R_2} ;$$

et à son point culminant (vitesse nulle) :

$$\bar{E} = -\frac{G.M}{R_1}.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}.c^2 - \frac{G.M}{R_2} &= -\frac{G.M}{R_1} ; \\ \frac{1}{2}.c^2 &= \frac{G.M}{R_2} - \frac{G.M}{R_1} = G.M. \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) ; \\ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} &= \frac{c^2}{2.G.M} = \frac{1}{R_s} ; \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_s}. \end{aligned}$$

Cette égalité implique que $\frac{1}{R_2} > \frac{1}{R_s}$, donc que $R_2 < R_s$.

On en déduit que la lumière émise par le corps de masse M et de rayon R_2 ($R_2 < R_s = \frac{2.G.M}{c^2}$) ne peut pas atteindre un observateur situé à une distance r supérieure à R_1 . Pour cet observateur, le corps en question est invisible : c'est un trou noir.

Par exemple, en supposant que le corps soit subponctuel (rayon très inférieur à R_s), imaginons un observateur situé à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild et regardant en direction du centre :

- s'il est situé à la distance $R_1 = R_s$ du centre, il aura une visibilité s'étendant jusqu'à $R_2 = \frac{R_s}{2}$;
- s'il est situé à la distance $R_2 = \frac{R_s}{2}$ du centre, il aura une visibilité s'étendant jusqu'à $R_3 = \frac{R_s}{3}$;
- s'il est situé à la distance $R_3 = \frac{R_s}{3}$ du centre, il aura une visibilité s'étendant

jusqu'à $R_4 = \frac{R_s}{4}$;

- s'il est situé à la distance $R_4 = \frac{R_s}{4}$ du centre, il aura une visibilité s'étendant jusqu'à $R_5 = \frac{R_s}{5}$...

En effet, dans cet exemple, on a $R_1 = R_s$ donc $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_s}$, $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_s} = \frac{2}{R_s}$, $\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_s} = \frac{3}{R_s}$, $\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_s} = \frac{4}{R_s}$, etc.

Ceci signifie que chaque observateur aura une visibilité limitée par une surface sphérique (centrée sur le corps en question) appelée horizon. Lorsque l'observateur est très éloigné ("à l'infini") le rayon de cette sphère est égal à r_s : la vision de cet observateur ne pénètre pas à l'intérieur de cette sphère ; mais s'il se rapproche, sa visibilité à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild devient de plus en plus profonde, comme si de la sphère se contractait .

Si un observateur se trouve à la distance R du centre d'un trou noir dont le rayon de Schwarzschild est R_s , et regarde en direction du centre, alors sa visibilité sera limitée par une sphère de rayon R_h (horizon) facile à calculer grâce à la formule :

$$\frac{1}{R_h} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_s}.$$

Il faut retenir que le rayon de la sphère-horizon dépend de l'observateur, et varie quand celui-ci se déplace. Un observateur proche du trou noir aura une meilleure visibilité parce que sa sphère-horizon sera plus petite.

Si nous faisons tendre R vers l'infini, le rayon de l'horizon R_h tend vers R_s : c'est l'horizon de Schwarzschild. Si R décroît, le rayon de son horizon R_h décroît aussi. Si nous faisons tendre R vers 0 (ce qui n'est possible que dans le cas d'un trou noir ponctuel), le rayon de l'horizon R_h tend vers 0.

Le raisonnement que nous venons de faire soulève plusieurs questions. Tout d'abord, nous avons admis que la lumière doit subir la même accélération que tout corps matériel dans le champ de gravitation, bien que sa masse au repos soit nulle ; ceci signifie que nous concevons le champ gravitationnel comme un champ d'accélération plutôt que de forces. Ensuite, nous disons que la vitesse du rayon lumineux varie, ce qui est en contradiction avec la relativité restreinte. Mais il y a plus grave. Imaginons une particule-test tombant en chute libre radiale vers un corps massif compact de rayon inférieur à son rayon de Schwarzschild. Alors, en supposant que la particule soit partie de très loin (disons "de l'infini") avec une vitesse nulle, on doit admettre qu'elle va franchir la sphère de Schwarzschild à la vitesse de la lumière, et qu'elle va ensuite dépasser cette vitesse. Bien sûr, ce n'était pas un problème à l'époque de Newton : la vitesse de la lumière n'était pas conçue comme une limite indépassable. Mais aujourd'hui on ne peut plus admettre une telle conclusion.

Comme on le voit, la gravitation newtonienne fait nettement apparaître la

problématique des trous noirs; mais elle n'est pas armée pour la résoudre, car elle n'est pas relativiste.

5 Densité et compacité

Le phénomène de trou noir produit par un corps massif est étroitement lié au rapport entre son rayon de Schwarzschild et son rayon effectif : $\frac{R_s}{R} = \frac{G.M}{c^2.R}$; plus cette quantité est grande, plus le corps est dit "compact".

La compacité d'un corps sphérique est proportionnelle à $\frac{M}{R}$; sa densité est proportionnelle à $\frac{M}{R^3}$.

Attention : il ne faut pas confondre ces deux notions; en effet, un corps ayant une forte compacité peut avoir une densité faible!

Pour un corps sphérique de densité ρ uniforme :

$$M = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho ;$$

alors la compacité est proportionnelle à :

$$\frac{M}{R} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho.$$

Pour une densité ρ faible, on peut obtenir une compacité aussi grande qu'on le veut, en choisissant une valeur de R suffisamment grande.

Raisonnons par exemple sur un cas limite : un corps de densité ρ fixée, et de rayon R_s (limite à partir de laquelle se manifeste le phénomène de trou noir), de masse M_s (masse limite). Nous savons que $R_s = \frac{2.G.M_s}{c^2}$. On a alors :

$$M_s = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_s^3 \cdot \rho = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2.G.M_s}{c^2} \right)^3 \cdot \rho = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{8.G^3}{c^6} \cdot \rho \cdot M_s^3 ;$$

$$M_s^2 = \frac{3.c^6}{32.\pi.G^3.\rho} ;$$

$$M_s = \sqrt{\frac{3}{32.\pi.G^3.\rho}} \cdot c^3 ;$$

$$R = R_s = \frac{2.G.M_s}{c^2} = \frac{2.G}{c^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{32.\pi.G^3.\rho}} \cdot c^3 = \sqrt{\frac{3}{8.\pi.G.\rho}} \cdot c.$$

Donc, pour obtenir un trou noir de densité ρ quelconque, il "suffit" de faire entrer une masse $M_s = \sqrt{\frac{3}{32.\pi.G^3.\rho}} \cdot c^3$ dans une sphère de rayon $R = R_s =$

$$\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}} \cdot c.$$

Cette masse limite et ce rayon limite sont inversement proportionnels à la racine carrée de la densité. Autrement dit, la densité est inversement proportionnelle au carré de la masse limite, ou inversement proportionnelle au carré du rayon de Schwarzschild, ou, si on préfère, inversement proportionnelle à l'aire de la sphère de Schwarzschild.

6 Aphélie et périhélie en gravitation newtonienne

Nous étudions l'orbite d'une particule-test (ou planète) de masse m négligeable autour d'un corps massif de masse M . L'orbite est supposée elliptique ou apparentée : le rayon passe périodiquement par deux valeurs extrêmes r_1 et r_2 ; en ces deux points, la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur, avec pour module v_1 et v_2 respectivement.

La conservation de l'énergie implique que :

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_2},$$

et la conservation du moment cinétique s'écrit :

$$m \cdot v_1 \cdot r_1 = m \cdot v_2 \cdot r_2.$$

Nous écrirons la première égalité sous la forme :

$$v_1^2 - v_2^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) ;$$

la seconde deviendra :

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot r_1}{r_2}.$$

En faisant la substitution de v_2 dans la première équation, nous obtenons :

$$v_1^2 - \frac{v_1^2 \cdot r_1^2}{r_2^2} = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) ;$$

$$v_1^2 \cdot r_1^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) ;$$

$$v_1^2 \cdot r_1^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) ;$$

d'où, en divisant les deux membres par $c^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$:

$$\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} = r_s ;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} &= \frac{r_s}{\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1^2} ; \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{r_s}{\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1^2} - \frac{1}{r_1} = \frac{r_s - \frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1}{\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1^2} ; \\ r_2 &= \frac{\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1^2}{r_s - \frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1} ; \\ r_2 &= \frac{\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1}{\frac{r_s}{r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}} . \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi calculer v_2 . Sachant que $v_2 \cdot r_2 = v_1 \cdot r_1$, on tire :

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{v_1 \cdot r_1}{r_2} = v_1 \cdot r_1 \cdot \frac{1}{r_2} = v_1 \cdot r_1 \cdot \frac{r_s - \frac{v_1^2}{c^2}}{\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1} ; \\ \frac{v_2}{c} &= \frac{\frac{r_s}{r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}}{\frac{v_1}{c}} . \end{aligned}$$

Par conséquent, r_1 étant supposé fixé, à toute vitesse v_1 correspond une valeur de r_2 , à une seule condition : $\frac{v_1^2}{c^2}$ doit être inférieur à $\frac{r_s}{r_1} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_1 \cdot c^2}$, ce qui s'écrit :

$$v_1^2 < \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_1}$$

ou encore :

$$v_1 < \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r_1}} = v_l .$$

Cette condition étant supposée réalisée, on peut voir que la fonction qui, à v_1 , associe r_2 (r_1 étant toujours fixé) est toujours croissante. On s'en rend compte facilement en examinant l'égalité $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_s}{\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1^2}$. Ceci signifie que, pour r_1 (périhélie ou aphélie) fixé, tout accroissement de la vitesse v_1 se traduit par un accroissement de r_2 (l'aphélie - resp. périhélie - monte), et inversement : toute réduction de la vitesse v_1 se traduit par une réduction de r_2 (l'aphélie - resp. périhélie - descend). Quand v_1 tend vers 0, r_2 tend vers 0 ; Quand v_1 tend vers v_l , r_2 tend vers ∞ .

Mais dans ce raisonnement nous admettons, comme on le faisait au temps de Newton, que les vitesses v_1 et v_2 peuvent dépasser la vitesse de la lumière. Nous examinerons ce problème plus loin.

7 Vitesse circulaire en gravitation newtonienne

Pour étudier les orbites circulaires, nous reprenons l'étude sur l'aphélie et le périhélie et nous écrivons que $r_2 = r_1$:

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1}{\frac{r_s}{r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}} = r_1 ; \\ \frac{\frac{v_1^2}{c^2}}{\frac{r_s}{r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}} &= 1 ; \\ \frac{v_1^2}{c^2} &= \frac{r_s}{r_1} - \frac{v_1^2}{c^2} ; \\ 2 \cdot \frac{v_1^2}{c^2} &= \frac{r_s}{r_1} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot r_1} ; \\ v_1 &= \sqrt{\frac{G \cdot M}{r_1}}. \end{aligned}$$

Pour un rayon r donné, la vitesse circulaire v_c est donc :

$$v_c = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

On peut remarquer que $v_c^2 = \frac{1}{2} \cdot v_l^2$.

Pour $r = \frac{G \cdot M}{c^2} = \frac{r_s}{2}$, la vitesse circulaire est égale à celle de la lumière ; pour $r < \frac{r_s}{2}$, elle est supérieure à la vitesse de la lumière. Ceci n'est pas un problème dans le cadre newtonien ; mais si on considère la vitesse de la lumière comme une limite indépassable, alors on doit admettre qu'il ne peut pas exister d'orbite circulaire de rayon inférieur à $\frac{r_s}{2}$.

8 Les orbites elliptiques et leurs limites

Nous allons reprendre l'étude de l'aphélie et du périhélie dans la théorie de Newton, et imposer la vitesse de la lumière comme limite indépassable, pour examiner les conséquences de cette contrainte.

Supposons que r_1 soit inférieur à r_s . Dans ce cas, la vitesse de libération est supérieure à c , et ne peut donc pas être atteinte. La valeur maximale de r_2 s'obtiendra alors en faisant $v_1 = c$, ce qui donne :

$$r_{2max} = \frac{\frac{v_1^2}{c^2} \cdot r_1}{\frac{r_s}{r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{r_1}{\frac{r_s}{r_1} - 1} = \frac{r_1^2}{r_s - r_1}.$$

Si le périhélie a pour valeur $r_1 < r_s$, alors l'aphélie ne peut pas dépasser $\frac{r_1^2}{r_s - r_1}$.

Voyons maintenant si la vitesse v_2 , calculée grâce à la formule $\frac{v_2}{c} = \frac{r_s - \frac{v_1^2}{c^2}}{\frac{r_1}{v_1} - \frac{v_1}{c}}$, est bien inférieure à la vitesse de la lumière. On doit avoir :

$$\begin{aligned} \frac{r_s}{r_1} - \frac{v_1^2}{c^2} &< \frac{v_1}{c} ; \\ \frac{v_1^2}{c^2} + \frac{v_1}{c} - \frac{r_s}{r_1} &> 0. \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré en $\frac{v_1}{c}$. On a : $\Delta = 1 + 4 \cdot \frac{r_s}{r_1}$; les racines sont : $\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{r_s}{r_1}}}{2}$. Pour que le polynôme ci-dessus soit positif, il faut que la variable $\frac{v_1}{c}$ soit supérieure à la plus grande racine (la plus petite étant négative) :

$$\frac{v_1}{c} > \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{r_s}{r_1}}}{2}.$$

Donc, r_1 étant fixé ($r_1 < r_s$), il existe pour la vitesse v_1 un minimum au-dessous duquel la vitesse au périhélie v_2 dépasserait celle de la lumière.

Pour que ce minimum ait un sens, il faut encore qu'il soit inférieur à c , autrement dit :

$$\begin{aligned} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{r_s}{r_1}}}{2} &< 1 ; \\ -1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{r_s}{r_1}} &< 2 ; \\ \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{r_s}{r_1}} &< 3 ; \\ 1 + 4 \cdot \frac{r_s}{r_1} &< 9 ; \\ 4 \cdot \frac{r_s}{r_1} &< 8 ; \\ \frac{r_s}{r_1} &< 2 ; \\ r_1 &> \frac{r_s}{2} = \frac{G.M}{c^2}. \end{aligned}$$

Si r_1 est inférieur au demi-rayon de Schwarzschild, toute orbite elliptique fait nécessairement intervenir une vitesse (v_1 ou v_2) supérieure à c . Ce que nous avons dit au sujet des orbites circulaires le laissait prévoir.

Nous allons voir maintenant comment ces questions sont traitées en métrique de Schwarzschild et de Ni.

9 Vitesse de libération en métrique de Schwarzschild

Rappelons qu'en métrique de Ni on a $\alpha = 1 - \frac{2.k}{r}$, $\beta = \frac{1}{1 - \frac{2.k}{r}}$, $\gamma = 1$, avec $k = \frac{G.M}{c^2}$.

Nous avons vu, dans le document sur les métriques, puis dans le document "Ni ou Schwarzschild?", plusieurs formules générales que nous allons pouvoir utiliser pour les métriques de Schwarzschild et de Ni. La première concerne la vitesse de libération, évaluée par les observateurs locaux immobiles :

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - \alpha}.$$

Comme $1 - \alpha = \frac{2.k}{r} = \frac{2.G.M}{r.c^2}$, on a :

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - \alpha} = \sqrt{\frac{2.G.M}{r.c^2}} = \sqrt{\frac{2.k}{r}}.$$

Cette formule est identique à celle de Newton. Mais la conclusion est quand même bien différente, puisqu'en relativité générale la vitesse locale ne peut pas dépasser celle de la lumière.

Or on voit tout de suite que, quand r tend vers le rayon de Schwarzschild $r_s = \frac{2.G.M}{c^2} = 2.k$, la vitesse de libération v_l tend vers c .

Pour $r < r_s$, la formule nous donne une vitesse de libération supérieure à c , ce qui signifie que toute libération est impossible.

Que voit l'observateur distant ?

Supposons que le mobile soit en chute libre rectiligne radiale, selon une trajectoire d'évasion inversée. On a alors :

$$v_{dist} = \frac{dr_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{dr_{loc}}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{dt_{loc}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot v_{loc}.$$

En métrique de Schwarzschild, on a $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{(1 - \frac{2.k}{r})^2} = 1 - \frac{2.k}{r}$, donc :

$$v_{l(dist)} = \left(1 - \frac{2.k}{r}\right) \cdot v_l = c \cdot \left(1 - \frac{2.k}{r}\right) \cdot \sqrt{\frac{2.k}{r}}.$$

Pour l'observateur distant, la vitesse de ce mobile en chute libre semble tendre vers 0 quand r tend vers le rayon de Schwarzschild $r_s = 2.k$.

10 Vitesse circulaire en métrique de Schwarzschild

Nous allons calculer la vitesse circulaire évaluée par l'observateur distant, en métrique de Schwarzschild, grâce à la formule :

$$\left(\frac{v_{dist}}{c}\right)^2 = \frac{r^2 \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma \cdot r^2)}{\partial r}}.$$

On a : $\alpha = 1 - \frac{2 \cdot k}{r}$ et $\gamma = 1$, donc :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{2 \cdot k}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\gamma \cdot r^2)}{\partial r} = 2 \cdot r ;$$

$$\left(\frac{v_{dist}}{c}\right)^2 = \frac{2 \cdot k}{2 \cdot r} = \frac{k}{r} ;$$

$$\frac{v_{dist}}{c} = \sqrt{\frac{k}{r}}.$$

Notons v_c la vitesse circulaire évaluée par un observateur local (immobile) :

$$\left(\frac{v_c}{c}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \left(\frac{v_{dist}}{c}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2 \cdot k}{r}} \cdot \frac{k}{r} = \frac{k}{r - 2 \cdot k} ;$$

$$\frac{v_c}{c} = \sqrt{\frac{k}{r - 2 \cdot k}}.$$

Comme on doit avoir $v_c < c$, on voit que la vitesse circulaire n'est pas définie pour $r < 3 \cdot k$.

Pour $r = 3 \cdot k = \frac{3 \cdot G \cdot M}{c^2}$, la vitesse circulaire atteint celle de la lumière ; c'est la dernière orbite circulaire stable.

11 Orbite d'énergie minimale en métrique de Schwarzschild

Voyons comment évolue l'énergie circulaire E_c (énergie d'un mobile tournant sur une orbite circulaire) en fonction du rayon de l'orbite.

$$1 - \frac{v_c^2}{c^2} = 1 - \frac{k}{r - 2 \cdot k} = \frac{r - 3 \cdot k}{r - 2 \cdot k} ;$$

$$ch \frac{w_c}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{r - 2 \cdot k}{r - 3 \cdot k}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot k}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{3 \cdot k}{r}}} ;$$

$$E_c = m_0 \cdot c^2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot ch \frac{w_c}{c} = m_0 \cdot c^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{2.k}{r}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{2.k}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{3.k}{r}}};$$

$$E_c = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1 - \frac{2.k}{r}}{\sqrt{1 - \frac{3.k}{r}}}.$$

Dérivons cette expression par rapport à r :

$$\frac{dE_c}{dr} = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{3.k}{r}} \cdot \frac{2.k}{r^2} - \left(1 - \frac{2.k}{r}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3.k}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{3.k}{r}}}}{1 - \frac{3.k}{r}};$$

$$\frac{dE_c}{dr} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\left(1 - \frac{3.k}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[\left(1 - \frac{3.k}{r}\right) \cdot \frac{2.k}{r^2} - \left(1 - \frac{2.k}{r}\right) \cdot \frac{3.k}{2.r^2} \right];$$

$$\frac{dE_c}{dr} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\left(1 - \frac{3.k}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{k}{2.r^2} \cdot \left[4 \cdot \left(1 - \frac{3.k}{r}\right) - 3 \cdot \left(1 - \frac{2.k}{r}\right) \right];$$

$$\frac{dE_c}{dr} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\left(1 - \frac{3.k}{r}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{k}{2.r^2} \cdot \left(1 - \frac{6.k}{r}\right).$$

Cette dérivée s'annule pour $r = 6.k = 6 \cdot \frac{G.M}{c^2} = 3.r_s$, où $r_s = 2 \cdot \frac{G.M}{c^2}$ est le rayon de Schwarzschild. Elle est négative pour $3.k < r < 6.k$ et positive pour $r > 6.k$.

Ce rayon :

$$r = 6.k = 6 \cdot \frac{G.M}{c^2} = 3.r_s$$

est le rayon de l'orbite circulaire d'énergie minimale. Il est égal au triple du rayon de Schwarzschild.

Si nous faisons décroître r de $+\infty$ à $3.k$, la valeur de E_c , initialement égale à $m_0 \cdot c^2$, décroît jusqu'à un minimum E_m , qui est atteint pour $r = 6.k$; puis elle croît de nouveau et tend vers $+\infty$ quand $r \rightarrow 3.k$. L'énergie E_c (comme la vitesse circulaire v_c) n'est pas définie pour $r < 3.k$. Calculons le minimum E_m :

$$E_m = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1 - \frac{2.k}{6.k}}{\sqrt{1 - \frac{3.k}{6.k}}} = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \approx 0,9428 \cdot m_0 \cdot c^2.$$

La période évaluée par l'observateur distant est :

$$T_{dist} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_{dist}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{c} \cdot \sqrt{\frac{r}{k}}.$$

Quand r décroît de $+\infty$ à $3.k$, cette période décroît de $+\infty$ à $\frac{6 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot k}{c} \approx 32,648 \cdot \frac{k}{c}$.

Pour $r = 6.k$, sa valeur est : $\frac{12 \cdot \sqrt{6} \cdot \pi \cdot k}{c} \approx 92,344 \cdot \frac{k}{c}$.

12 Vitesse de décrochage en métrique de Schwarzschild

Dans la section sur l'aphélie et le périhélie (cas général), nous avons étudié le cas d'une orbite elliptique dans laquelle la distance au centre r passe par deux extrema (au périhélie et à l'aphélie). Nous allons reprendre cette étude en métrique de Schwarzschild. Notons que la forme elliptique de l'orbite est sans importance : ce qui nous importe, c'est qu'il y ait (au moins) deux points sur l'orbite où le vecteur vitesse soit perpendiculaire au rayon vecteur \vec{r} .

Nous avons noté $r_1, v_1, w_1, \alpha_1, \gamma_1$ les valeurs de r, v, w, α et γ à l'aphélie, et $r_2, v_2, w_2, \alpha_2, \gamma_2$ leurs valeurs au périhélie.

Nous avons démontré cette formule :

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}{1 - \frac{\gamma_1 \cdot r_1^2}{\gamma_2 \cdot r_2^2}}.$$

Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, on a : $\alpha = 1 - \frac{2k}{r}$ et $\gamma = 1$, ce qui nous donne :

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{1 - \frac{2k}{r_1}}{1 - \frac{2k}{r_2}}}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} = \frac{\left(1 - \frac{2k}{r_2}\right) - \left(1 - \frac{2k}{r_1}\right)}{\left(1 - \frac{2k}{r_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)} = \frac{\frac{2k}{r_1} - \frac{2k}{r_2}}{\left(1 - \frac{2k}{r_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)};$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{\frac{2k}{r_1} - \frac{2k}{r_2}}{r_1^2 \cdot \left(1 - \frac{2k}{r_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)} = \frac{4k^2}{r_1^2} \cdot \frac{\frac{2k}{r_1} - \frac{2k}{r_2}}{\left(1 - \frac{2k}{r_2}\right) \cdot \left(\frac{4k^2}{r_1^2} - \frac{4k^2}{r_2^2}\right)}.$$

Posons $u_1 = \frac{2k}{r_1}$ et $u_2 = \frac{2k}{r_2}$.

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{u_1^2 \cdot (u_1 - u_2)}{(1 - u_2) \cdot (u_1^2 - u_2^2)} = \frac{u_1^2 \cdot (u_1 - u_2)}{(1 - u_2) \cdot (u_1 + u_2) \cdot (u_1 - u_2)};$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{u_1^2}{(1 - u_2) \cdot (u_1 + u_2)}.$$

Inversons le problème, et (r_1 étant toujours fixé) voyons s'il est possible de calculer r_2 (ou u_2) pour une valeur donnée de v_1 .

$$(1 - u_2) \cdot (u_1 + u_2) = \frac{u_1^2 \cdot c^2}{v_1^2};$$

$$-u_2^2 + (1 - u_1) \cdot u_2 + u_1 = \frac{u_1^2 \cdot c^2}{v_1^2};$$

$$u_2^2 - (1 - u_1) \cdot u_2 - u_1 + \frac{u_1^2 \cdot c^2}{v_1^2} = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré, dans laquelle l'inconnue est u_2 .
Calculons le discriminant :

$$\Delta = (1 - u_1)^2 + 4.u_1 - \frac{4.u_1^2.c^2}{v_1^2}.$$

On aura $\Delta = 0$ si :

$$\frac{4.u_1^2.c^2}{v_1^2} = (1 - u_1)^2 + 4.u_1 = 1 - 2.u_1 + u_1^2 + 4.u_1 ;$$

$$\frac{4.u_1^2.c^2}{v_1^2} = 1 + 2.u_1 + u_1^2 = (1 + u_1)^2 ;$$

$$\frac{2.u_1.c}{v_1} = 1 + u_1 ;$$

$$\frac{v_1}{c} = \frac{2.u_1}{1 + u_1} = \frac{2}{\frac{1}{u_1} + 1} = \frac{2}{\frac{r_1}{2k} + 1}.$$

La vitesse de décrochage v_d est donc donnée par :

$$\frac{v_d}{c} = \frac{2}{1 + \frac{r_1}{2k}}.$$

Cette formule n'a de sens que pour $r_1 > 2k$.

Pour $v_1 < v_d$, on a : $\Delta < 0$, donc il n'existe aucune valeur de r_2 remplissant les conditions imposées.

Pour $v_1 = v_d$, on a : $\Delta = 0$; l'équation a pour solution :

$$u_2 = \frac{1 - u_1}{2} ;$$

$$2.u_2 + u_1 = 1 ;$$

$$\frac{4k}{r_2} + \frac{2k}{r_1} = 1.$$

Le rayon r_1 (à l'aphélie) étant fixé, cette formule permet de calculer la plus petite valeur possible de r_2 (rayon au périhélie), que nous noterons r_{2min} :

$$\frac{2}{r_{2min}} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{2k}.$$

A partir de l'équation

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{u_1^2}{(1 - u_2).(u_1 + u_2)}$$

nous aurions pu faire un raisonnement un peu différent : u_1 étant fixé, on peut dire que v_1 atteint son minimum quand le dénominateur $(1 - u_2).(u_1 + u_2)$ atteint son maximum, c'est-à-dire quand sa dérivée par rapport à u_2 s'annule, ce

qui s'écrit :

$$\frac{d[(1-u_2) \cdot (u_1+u_2)]}{du_2} = (1-u_2) - (u_1+u_2) = 1-u_1-2u_2 = 0 ;$$

$$2u_2 + u_1 = 1 ;$$

$$\frac{4k}{r_2} + \frac{2k}{r_1} = 1.$$

Nous retrouvons le résultat déjà démontré.

On peut remarquer que :

- quand r_1 tend vers l'infini, r_{2min} tend vers $4k$;
- quand r_1 décroît, r_{2min} croît ;
- on aura $r_{2min} = r_1$ si : $\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{2k} = \frac{3}{r_1}$, soit $r_1 = 6k$;
- pour $r_1 > 6k$, on a $r_{2min} < 6k$.

Rappelons que $6k$ est le rayon de l'orbite circulaire d'énergie minimale.

Rappelons aussi que, selon notre définition, r_1 et r_2 sont les rayons à l'aphélie et au périhélie ($r_1 < r_2$), mais par symétrie des calculs on peut aussi envisager l'inverse : $r_1 < r_2$. Cependant, dans ce cas, l'impossibilité de trouver une valeur de r_2 remplissant les conditions imposées ne signifiera pas que le mobile plonge sans retour vers la singularité centrale, mais au contraire qu'il s'évade vers l'infini.

On peut alors faire d'autres remarques ; par exemple :

- pour $r_1 < 6k$, on a $r_{2min} > 6k$;
- quand r_1 tend vers $2k$, r_{2min} tend vers l'infini et la vitesse de décrochage tend vers c .

13 L'horizon des trous noirs de Schwarzschild

Rappelons que le rayon de Schwarzschild r_s d'un corps massif se calcule facilement, connaissant sa masse : $r_s = 2k = \frac{2GM}{c^2}$. Si la dimension apparente du corps en question semble inférieure à son rayon de Schwarzschild, on en déduit, d'après la relativité générale, qu'il s'agit d'un trou noir, limité par un horizon.

A quoi correspond exactement cette notion d'horizon au sens de Schwarzschild ?

Pour éclairer cette question, nous allons étudier la trajectoire d'une particule-test de masse m tombant en ligne droite vers le trou noir de masse M .

Nous avons déjà parlé de la chute libre radiale dans le document sur les métriques. Nous avons démontré deux formules valables pour toutes les métriques symétriques :

$$1) ds = c.d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - \alpha}} ;$$

$$2) c.dt = -\frac{\bar{E}}{\alpha} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - \alpha}}.$$

Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, on a : $\alpha = 1 - \frac{2.k}{r}$; les formules s'écrivent donc :

$$1) ds = c.d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - 1 + \frac{2.k}{r}}} ;$$

$$2) c.dt = -\frac{\bar{E}}{1 - \frac{2.k}{r}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - 1 + \frac{2.k}{r}}}.$$

Rappelons que τ est le temps propre de la particule. Nous voudrions savoir s'il est possible d'intégrer d'une part $c.d\tau$, d'autre part $c.dt$ pour calculer le temps (estimé par la particule elle-même ou par l'observateur distant) que met la particule pour aller de r_1 à r_2 ($r_2 < r_1$).

Nous imaginons donc une particule tombant en ligne droite vers un corps massif, selon une trajectoire rectiligne de chute libre radiale.

Nous allons distinguer 3 cas selon que \bar{E} est égal, supérieur ou inférieur à 1.

Premier cas : $\bar{E} = 1$. Ceci signifie que la particule est sur une trajectoire d'évasion inversée d'énergie minimale : sa vitesse est nulle à l'infini et augmente quand elle se rapproche du corps massif.

$$1) c.d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{\frac{2.k}{r}}} = -\frac{\sqrt{r}.dr}{\sqrt{2.k}} ;$$

$$2) c.dt = -\frac{1}{1 - \frac{2.k}{r}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\frac{2.k}{r}}} = -\frac{\sqrt{r}.dr}{(1 - \frac{2.k}{r}) \cdot \sqrt{2.k}}.$$

Posons : $u = \sqrt{r}$, donc $r = u^2$ et $dr = 2.u.du$:

$$c.d\tau = -\frac{\sqrt{r}.dr}{\sqrt{2.k}} = -\frac{2.u^2.du}{\sqrt{2.k}} = -\sqrt{\frac{2}{k}}.d\left(\frac{u^3}{3}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{k}}.d\left(r^{\frac{3}{2}}\right).$$

Lorsque la particule-test se déplace de r_1 à r_2 , la variation de son temps propre est donnée par :

$$c.\Delta\tau = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot \Delta\left(r^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot \left(r_1^{\frac{3}{2}} - r_2^{\frac{3}{2}}\right).$$

Que se passe-t-il au voisinage de la limite de Schwarzschild $r = r_s$? Rien! Apparemment, de son propre point de vue, un voyageur, ou une particule, va pouvoir franchir cette limite, en un temps fini, sans même s'en rendre compte...

En supposant que toute la masse soit concentrée en un point unique ($r = r_0$), que se passe-t-il à l'approche de ce point? Il suffit de faire tendre r_2 vers 0; on voit que la particule l'atteint en un temps (propre) fini : $c.\Delta\tau = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot r_1^{\frac{3}{2}}$. Que devient-elle après? On l'ignore...

C'est là le principal problème posé par les trous noirs de Schwarzschild!

Mais que voit l'observateur distant immobile par rapport au trou noir? Pour le savoir, étudions comment s'écoule le "temps distant" t par rapport au temps propre du mobile. D'après ce qui précède, on a :

$$c.dt = \frac{1}{1 - \frac{2.k}{r}} \cdot c.d\tau = -\frac{1}{1 - \frac{2.k}{r}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot d\left(r^{\frac{3}{2}}\right).$$

Cette fonction est intégrable entre r_1 et r_2 ($r_1 > r_2 > r_s = 2.k$); mais si nous faisons tendre r_2 vers r_s l'intégrale diverge à cause du dénominateur $1 - \frac{2.k}{r}$ qui tend vers 0; $c.\Delta t$ tend donc vers l'infini. Ceci signifie que, pour l'observateur distant, la particule-test va sembler ralentir au voisinage du trou noir, et n'atteindra jamais l'horizon de Schwarzschild.

Second cas : $\bar{E} > 1$. Ceci signifie que la particule est sur une trajectoire de chute libre radiale d'énergie non minimale (la vitesse ne s'annule pas à l'infini).

$$c.d\tau = -\frac{\sqrt{r}.dr}{\sqrt{2.k} \cdot \sqrt{1 + \frac{\bar{E}^2 - 1}{2.k} \cdot r}} = -\frac{\sqrt{r}.dr}{\sqrt{2.k} \cdot \sqrt{1 + a.r}},$$

où $a = \frac{\bar{E}^2 - 1}{2.k}$ est une constante positive.

Posons : $u = a.r$, ce qui signifie que $r = \frac{u}{a}$ et que $dr = \frac{du}{a}$.

$$c.d\tau = -\frac{\sqrt{r}.dr}{\sqrt{2.k} \cdot \sqrt{1 + a.r}} = -\frac{\sqrt{\frac{u}{a}} \cdot \frac{du}{a}}{\sqrt{2.k} \cdot \sqrt{1 + u}} = -\frac{\sqrt{u}.du}{a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2.k} \cdot \sqrt{1 + u}}.$$

Posons $u = sh^2 x$, ou $x = Argsh \sqrt{u}$, ce qui entraîne : $\sqrt{u} = sh x$, $\sqrt{1 + u} = ch x$ et $du = 2.sh x.ch x.dx$.

$$c.d\tau = -\frac{sh x \cdot 2.sh x.ch x \cdot dx}{a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2.k} \cdot ch x} = -\frac{2.sh^2 x \cdot dx}{a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2.k}}.$$

On sait que $2.sh^2 x = ch(2.x) - 1$.

$$c.d\tau = -\frac{(ch(2.x) - 1).dx}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}} = -d\left(\frac{\frac{1}{2}.sh(2.x) - x}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}}\right) = -d\left(\frac{ch x.sh x - x}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}}\right).$$

Rappelons-nous que $sh x = \sqrt{u} = \sqrt{a.r} = \sqrt{\frac{\bar{E}^2 - 1}{2.k}.r}$,
que $ch x = \sqrt{1 + u} = \sqrt{1 + a.r} = \sqrt{1 + \frac{\bar{E}^2 - 1}{2.k}.r}$, et que $x = Argsh \sqrt{\frac{\bar{E}^2 - 1}{2.k}.r}$.

Il n'y a donc aucune discontinuité au niveau de la limite de Schwarzschild : comme dans le premier cas, la particule-test va franchir cette limite sans s'en rendre compte. De plus, s'il y a une singularité au centre du trou noir, la particule va l'atteindre en un temps (propre) fini.

Passons à $c.dt$ (temps estimé par l'observateur distant) :

$$c.dt = \frac{\bar{E}.c.d\tau}{1 - \frac{2.k}{r}} = -\frac{\bar{E}}{1 - \frac{2.k}{r}}.d\left(\frac{ch x.sh x - x}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}}\right).$$

Comme dans le premier cas, l'intégrale va diverger au voisinage de l'horizon de Schwarzschild à cause du dénominateur $1 - \frac{2.k}{r}$, et l'observateur distant verra jamais la particule franchir l'horizon.

Troisième cas : $\bar{E} < 1$. Ceci signifie que la particule n'est pas sur une trajectoire d'évasion inversée : la vitesse s'annule à une distance finie r_0 , qu'on pourra considérer comme le point de départ de la chute.

$$c.d\tau = -\frac{\sqrt{r}.dr}{\sqrt{2.k}.\sqrt{1 + \frac{\bar{E}^2 - 1}{2.k}.r}} = -\frac{\sqrt{r}.dr}{\sqrt{2.k}.\sqrt{1 - a.r}},$$

où $a = \frac{1 - \bar{E}^2}{2.k}$ est une constante positive.

On doit avoir : $1 - a.r > 0$, donc $r < \frac{1}{a} = \frac{2.k}{1 - \bar{E}^2}$. On posera : $r_0 = \frac{2.k}{1 - \bar{E}^2}$. On remarque que : $r_0 > 2.k$.

Posons : $u = a.r$, ce qui signifie que $r = \frac{u}{a}$ et que $dr = \frac{du}{a}$.

$$c.d\tau = -\frac{\sqrt{r}.dr}{\sqrt{2.k}.\sqrt{1 - a.r}} = -\frac{\sqrt{\frac{u}{a}}.\frac{du}{a}}{\sqrt{2.k}.\sqrt{1 - u}} = -\frac{\sqrt{u}.du}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}.\sqrt{1 - u}}.$$

Posons $u = \sin^2 x$, ou $x = Arcsin \sqrt{u}$, ce qui entraîne :
 $\sqrt{u} = \sin x$, $\sqrt{1 - u} = \cos x$ et $du = 2.\sin x.\cos x.dx$.

$$c.d\tau = -\frac{\sin x.2.\sin x.\cos x.dx}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}.\cos x} = -\frac{2.\sin^2 x.dx}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}}.$$

On sait que $2.\sin^2 x = 1 - \cos (2.x)$.

$$c.d\tau = -\frac{(1 - \cos (2.x)).dx}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}} = -d\left(\frac{x - \frac{1}{2}.\sin (2.x)}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}}\right) = -d\left(\frac{x - \cos x.\sin x}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}}\right).$$

Rappelons-nous que $\sin x = \sqrt{u} = \sqrt{a.r} = \sqrt{\frac{1-\bar{E}^2}{2.k}.r}$,
que $\cos x = \sqrt{1-u} = \sqrt{1-a.r} = \sqrt{1 - \frac{1-\bar{E}^2}{2.k}.r}$, et que $x = \text{Arcsin} \sqrt{\frac{1-\bar{E}^2}{2.k}.r}$.

On peut sans problème intégrer de r_1 à r_2 ($r_2 < r_1 < r_0$).

Encore une fois, on voit qu'il n'y a aucune discontinuité au niveau de la limite de Schwarzschild : comme dans les deux autres cas, la particule-test va franchir cette limite sans s'en rendre compte, et, s'il y a une singularité au centre de trou noir, la particule va l'atteindre en un temps fini.

Passons à $c.dt$ (temps estimé par l'observateur distant) :

$$c.dt = \frac{\bar{E}.c.d\tau}{1 - \frac{2.k}{r}} = -\frac{\bar{E}}{1 - \frac{2.k}{r}}.d\left(\frac{x - \cos x.\sin x}{a^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2.k}}\right).$$

L'intégrale va diverger au voisinage de l'horizon de Schwarzschild à cause du dénominateur $1 - \frac{2.k}{r}$, et l'observateur distant ne verra jamais la particule franchir l'horizon.

Ceci suggère que la sphère de Schwarzschild n'est pas une limite infranchissable pour la particule en chute libre, mais que c'est seulement un horizon qui limite la visibilité de l'observateur distant.

Remplaçons maintenant la particule-test par un rayon lumineux, venu de loin (de l'"infini") et se dirigeant en ligne droite vers le trou noir. Comme la trajectoire est radiale, on a $d\theta = 0$ et $d\phi = 0$, ce qui simplifie la formule de la métrique. De plus, dans le cas de la lumière, on a $ds = c.d\tau = 0$, donc :

$$\begin{aligned} c^2.d\tau^2 = ds^2 &= \left(1 - \frac{2.k}{r}\right).c^2.dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2.k}{r}} = 0 ; \\ \left(1 - \frac{2.k}{r}\right).c^2.dt^2 &= \frac{dr^2}{1 - \frac{2.k}{r}} ; \\ c^2.dt^2 &= \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2.k}{r}\right)^2}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} c.d\tau &= 0 ; \\ c.dt &= \pm \frac{dr}{1 - \frac{2.k}{r}}. \end{aligned}$$

Comme pour la particule-test, l'intégrale va diverger pour $r = 2.k$; donc du point de vue de l'observateur distant le rayon lumineux n'atteint jamais la limite de Schwarzschild. C'est un horizon infranchissable.

Nous voyons donc une contradiction entre le point de vue de l'observateur distant (situé "à l'infini", immobile dans un potentiel nul) et les observateurs mobiles : pour l'observateur distant, la sphère de Schwarzschild ne semble franchissable par aucun mobile ; mais pour les mobiles eux-mêmes, ce franchissement ne présente aucune difficulté.

Complétons le calcul dans le cas d'un rayon lumineux (de sens non précisé).

$$\pm c.dt = \frac{dr}{1 - \frac{2.k}{r}} = \frac{r.dr}{r - 2.k} = \frac{r.d(r - 2.k)}{r - 2.k}.$$

Posons $r - 2.k = u$.

$$\pm c.dt = \frac{(u + 2.k).du}{u} = du + 2.k.\frac{du}{u} = dr + 2.k.d(\text{Log}(r - 2.k)).$$

En intégrant de (t_1, r_1) à (t_2, r_2) , on obtient :

$$\pm c.\Delta t = c.(t_2 - t_1) = r_2 - r_1 + 2.k. [\text{Log}(r_2 - 2.k) - \text{Log}(r_1 - 2.k)] ;$$

$$\pm c.(t_2 - t_1) = r_2 - r_1 + 2.k.\text{Log}\frac{r_2 - 2.k}{r_1 - 2.k}.$$

Cette quantité diverge aussi bien quand $r_1 \rightarrow 2.k$ que quand $r_2 \rightarrow 2.k$.

On peut écrire aussi :

$$\pm c.(t_2 - t_1) = r_2 - r_1 + 2.k.\text{Log}\frac{r_2.\left(1 - \frac{2.k}{r_2}\right)}{r_1.\left(1 - \frac{2.k}{r_1}\right)} ;$$

$$\pm c.(t_2 - t_1) = r_2 - r_1 + 2.k.\text{Log}\frac{r_2.\left(1 + \frac{2.\Phi_2}{c^2}\right)}{r_1.\left(1 + \frac{2.\Phi_1}{c^2}\right)}.$$

Une question que nous nous posons est la suivante : serait-il possible, par changement de repère, de passer du point de vue de l'observateur distant à celui d'un observateur mobile quelconque ? Dans ce cas, ne verrait-on pas l'horizon se déplacer, comme le suggère l'étude de l'horizon en gravitation newtonienne ? Ceci nous rapprocherait de la notion usuelle d'horizon, vulgarisée depuis l'Antiquité par les marins qui sillonnaient les mers...

Mais la métrique de Schwarzschild n'est pas adaptée à ce type de transformation. Ceci vient du fait que le potentiel y est absolu (voir le document sur le potentiel) et non relatif comme en métrique de Ni. Ceci confère à l'observateur distant un rôle unique, absolu, qui ne peut être transféré à aucun autre observateur. Nous verrons que le problème se pose de manière bien différente en métrique de Ni.

14 Sur l'immobilité en métrique de Schwarzschild

Dans notre approche de la métrique de Ni, nous avons souvent employé le mot "immobilité". Dans le champ gravitationnel d'une étoile ou d'un trou noir, l'immobilité dont nous parlions était définie par : $r = \text{constante}$, $\phi = \text{constante}$, $\theta = \text{constante}$; or il se trouve que dans la section précédente nous avons basé notre travail sur deux équations très générales (valables pour toute métrique symétrique) :

$$1) \quad c.d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - \alpha}} ;$$

$$2) \quad c.dt = -\frac{\bar{E}}{\alpha} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - \alpha}} ;$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$1) \quad \frac{dr}{c.d\tau} = -\sqrt{\bar{E}^2 - \alpha} ;$$

$$2) \quad \frac{dr}{c.dt} = -\frac{\alpha}{\bar{E}} \cdot \sqrt{\bar{E}^2 - \alpha}.$$

Il est clair qu'on aura : $\frac{dr}{c.d\tau} = \frac{dr}{c.dt} = 0$ à une seule condition : $\bar{E}^2 = \alpha$.

Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, on sait que $\alpha = 1 - \frac{2.k}{r}$; la condition s'écrit donc :

$$\bar{E}^2 = 1 - \frac{2.k}{r}.$$

Le problème est que pour $r < 2.k$, on a $1 - \frac{2.k}{r} < 0$, donc cette condition ne peut pas être réalisée. Autrement dit une particule située à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild ne peut pas rester immobile : elle se précipite nécessairement vers le centre du trou noir. Plus exactement, si nous supposons que la totalité de la masse M du corps central est concentrée dans une sphère de rayon $R < R_s$, alors toute particule venue de l'extérieur qui franchit la limite de Schwarzschild R_s se précipite vers le corps central ; et on ne doit pas s'imaginer qu'elle va s'arrêter en entrant en collision avec celui-ci : c'est mathématiquement impossible ; de plus, la "surface" de ce corps, qui se trouvait là un instant auparavant, n'y est déjà plus, puisqu'elle aussi s'effondre nécessairement vers le centre.

Nous aurions pu l'expliquer d'une autre façon : si nous pouvions déposer une particule à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild, à la distance $r_0 < r_s$, avec une vitesse nulle, alors elle commencerait une chute radiale rectiligne avec une énergie $\bar{E} < 1$. Mais nous avons vu dans la section précédente que $r_0 = \frac{2.k}{1-\bar{E}^2}$; pour $\bar{E} < 1$, r_0 est nécessairement supérieur à $2.k$, donc le point de départ de

cette chute libre est nécessairement à l'extérieur de la sphère de Schwarzschild !

Non seulement la particule ne peut pas arrêter sa chute vers le centre, mais en plus elle l'atteint en un temps fini (je parle ici du temps propre τ). Par exemple, dans le cas où $\bar{E} = 1$, nous avons vu que :

$$c \cdot \Delta\tau = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot \left(r_1^{\frac{3}{2}} - r_2^{\frac{3}{2}} \right).$$

Si nous faisons tendre r_2 vers 0, $c \cdot \Delta\tau$ tend vers $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{k}} \cdot r_1^{\frac{3}{2}}$: c'est le temps propre nécessaire pour que la particule en chute libre atteigne le centre du trou noir, sachant qu'elle est partie de la distance r_1 avec une énergie réduite $\bar{E} = 1$. Le choix de \bar{E} (supérieur ou inférieur à 1) n'y change rien : le temps (propre) de chute est fini, et rien ne peut l'arrêter.

Bien entendu, pour l'observateur distant, ce scénario est un pur délire, puisque pour lui, la particule ralentit à l'approche de la sphère de Schwarzschild et ne la franchit jamais !

Le point central vers lequel se précipite toute la matière qui franchit la limite de Schwarzschild est appelé : singularité. On peut se demander ce que devient la matière qui arrive en ce point. Une astuce des physiciens consiste à dire qu'on ne peut pas le savoir : il y aura toujours un horizon pour la cacher ; personne ne verra jamais la singularité nue, parce qu'elle est pudique ! Ce qui est vrai, c'est que, comme en gravitation newtonienne, un observateur quelconque, aussi proche qu'il soit de la singularité, aura toujours une visibilité limitée par un horizon.

Le fait que l'immobilité au sens usuel soit interdite à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild, et que toute particule tombe nécessairement vers le centre, entraîne que l'idée même qu'elle puisse remonter vers la surface est totalement absurde. Le franchissement de la limite de Schwarzschild par une particule venue de l'extérieur est nécessairement irréversible.

Si une étoile, par suite d'une accrétion de matière ou par fusion avec une autre étoile, franchit la limite critique de compacité (ce qui veut dire que $\frac{M}{r}$ dépasse $\frac{c^2}{2G}$, ou que r devient inférieur à $r_s = \frac{2GM}{c^2}$), elle entre dans une phase d'effondrement irréversible, comme si elle était aspirée sans retour par la singularité centrale. Mais cet effondrement n'est pas visible pour un observateur distant.

La notion d'immobilité au sens usuel n'a pas de sens à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild, mais on peut proposer, dans ce contexte, une autre définition de l'immobilité : on dira tout simplement qu'une particule-test est immobile si elle est sur une trajectoire de chute libre rectiligne avec $\bar{E} = 1$ (trajectoire

d'évasion inversée).

Ceci signifie que c'est l'espace lui-même qui est, si on peut dire, en mouvement vers le centre du trou noir, à une vitesse égale à la vitesse d'évasion, mais de sens inverse. Cette vitesse, nulle à l'infini, atteint la vitesse de la lumière pour $r = 2.k$, puis la dépasse, et tend vers l'infini quand $r \rightarrow 0$ (en supposant que toute la matière soit concentrée en un point).

On comprend facilement qu'une particule située à l'intérieur du trou noir ($r < r_s$), ayant une vitesse propre (par rapport au vide qui l'entoure) inférieure à c , ne pourra jamais lutter contre la vitesse du vide, qui est supérieure à c .

Cette idée que le vide puisse avoir une vitesse, et même une vitesse supérieure à c , peut sembler étrange; c'est pourtant une conséquence incontournable de la métrique de Schwarzschild, et donc de la relativité générale. Cette notion de vitesse du vide intervient aussi dans l'étude de l'expansion de l'Univers et de la fuite des galaxies. Dans ce cas aussi, cette vitesse peut dépasser celle de la lumière.

Ces questions peuvent être présentées d'une autre façon. Dans notre étude sur les métriques, nous avons fait intervenir des observateurs "locaux" ou "distants" supposés "gravitationnellement immobiles". La métrique de Schwarzschild est incompatible avec ce concept d'"observateurs locaux", puisqu'il ne peut pas exister de repères immobiles à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild. En relativité générale, cette notion d'immobilité n'a pas cours : on peut alors admettre qu'il y a seulement des observateurs "inertiels", qui suivent des géodésiques. Et la vitesse relative de deux mobiles inertiels peut dépasser celle de la lumière ! Ceci est nécessaire si on veut prolonger les trajectoires de l'autre côté de la l'horizon de Schwarzschild.

Ce point de vue peut sembler, à première vue, très judicieux. Mais avec les trous noirs on bute sur une absurdité : les géodésiques (ou les lignes d'univers) suivies par les corps qui pénètrent dans un trou noir ne peuvent que plonger vers la singularité centrale, qu'elles atteignent en un temps fini (le temps en question étant le temps propre). Que deviennent les corps qui suivent ces trajectoires ? Disparaissent-ils instantanément et définitivement sans laisser de trace ? Certains physiciens ont imaginé qu'ils pouvaient réapparaître ailleurs ("trous de vers", "fontaines blanches")... Mais ces idées n'ont aucun fondement scientifique : c'est plutôt de la science-fiction !

15 Discussion sur les trous noirs de Schwarzschild

Alors que les trous noirs de la gravitation newtonienne contredisent de manière flagrante certains principes aujourd'hui bien établis comme la constance

locale de la vitesse de la lumière, les trous noirs de Schwarzschild sont des entités mathématiques parfaitement formalisées et cohérentes. Cependant, ils suscitent des interrogations ou même des réticences de la part de certains physiciens. Voici quelques-unes des raisons qui justifient ces réticences.

La première raison, c'est que les physiciens (contrairement aux mathématiciens) considèrent généralement que les quantités infinies qui apparaissent dans leurs calculs sont dues à des erreurs, à des interprétations erronées, ou à des extrapolations hâtives... Parmi ces quantités infinies, il y a par exemple le temps mis par une particule-test pour pénétrer dans un trou noir (du point de vue d'un observateur distant), ou bien la densité infinie de la matière concentrée dans la singularité centrale (du point de vue des particules qui viennent s'y entasser...). Cette singularité est le problème majeur de la notion de trou noir en relativité générale. Nous disions que la gravitation de Newton était incapable de résoudre le problème des trous noirs, mais nous constatons que la relativité générale n'y parvient pas mieux. Que faut-il en penser ? Que ce problème prouve que la théorie de la relativité générale est fautive ? Peut-être... Mais beaucoup de physiciens préfèrent dire : la solution viendra d'une synthèse avec la mécanique quantique. Soyons patients...

La deuxième raison est que cette conception du trou noir semble contredire le principe de conservation de Lavoisier, qu'on a l'habitude de résumer par la formule : "rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme". En effet, si la matière et la lumière pouvaient pénétrer dans un trou noir (en franchissant son horizon), alors, pour l'observateur distant, cette matière et cette lumière disparaîtraient de manière irréversible. Il n'y aurait pas, à proprement parler, de perte d'énergie (puisque la masse du trou noir augmente en fonction de ce qu'il avale), mais, au minimum, une perte irréversible d'information.

Troisième raison : les lois fondamentales de la physique sont presque toutes symétriques par rapport à la variable temps (symétrie T). Si les équations de la gravitation vérifient la symétrie T, comment peuvent-elles donner lieu à des phénomènes irréversibles, comme le franchissement de l'horizon d'un trou noir ?

Si nous reprenons l'étude de la chute libre radiale en inversant le sens du temps, que se passe-t-il ? La vitesse de la particule est inversée, mais la "vitesse du vide" l'est-elle aussi ? Si oui, on doit voir le "trou noir" se transformer en "fontaine blanche" ; pourtant, les astronomes observent des candidats trous noirs, pas des fontaines blanches ! La symétrie ne semble pas respectée... Et cette "vitesse du vide" est-elle une vraie vitesse, ou seulement la traduction d'une courbure ? L'inversion du sens du temps modifie-t-elle la courbure ?

Quatrième raison : c'est le processus de formation des trous noirs, tel qu'il est décrit par la théorie dominante, qui a été l'objet de critiques.

Cinquième raison : l'intérieur de la sphère de Schwarzschild est un monde

inaccessible pour un observateur distant ; d'une certaine manière, on pourrait dire qu'il est au-delà de l'infini dans le temps, dans la mesure où une particule met un temps infini pour pénétrer dans le trou noir, du point de vue de cet observateur. Imaginons deux particules intriquées A et B , ayant par exemple des spins opposés ; supposons que l'une (disons A) pénètre dans un trou noir, en un temps infini du point de vue de l'observateur distant, en un temps fini selon son temps propre. Si un expérimentateur situé dans le trou noir mesure le spin de A , celui de B se fixera sur la valeur opposée, cette communication se faisant instantanément vers l'infini dans le passé. Cette cinquième raison rejoint d'ailleurs la première.

Sixième raison : selon la mécanique quantique, les forces fondamentales de la physique (électromagnétisme, interaction faible, interaction forte) sont basées sur des échanges entre particules matérielles par l'intermédiaire de particules-vecteurs se déplaçant, au maximum, à la vitesse de la lumière. De nombreux chercheurs (dont Einstein lui-même) ont tenté sans succès de faire entrer la gravitation dans ce schéma. Les trous noirs sont l'un des obstacles les plus visibles à ce projet : la matière située à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild a un effet à l'extérieur, mais cette interaction ne peut pas être transmise par une particule-vecteur, puisque rien ne peut sortir de cette sphère.

Septième raison : formulons la même idée en termes de courbure : imaginons que la matière située à l'intérieur d'un trou noir soit la cause de la courbure de l'espace-temps à l'extérieur du trou noir (cette courbure étant donc sa conséquence). Dans ce cas, comment cette cause pourrait-elle être responsable de cette conséquence, sachant qu'aucun message ne peut sortir du trou noir ? On doit admettre que la courbure spatio-temporelle, à proximité du trou noir, se met en place au moment où celui-ci se forme, et "se fossilise" ensuite ; autrement dit, le champ ainsi créé n'a pas besoin d'un apport continu d'information pour se maintenir : il s'agit d'un état d'équilibre de la structure même de l'espace-temps. C'est une façon de marginaliser la matière au profit de la courbure. Si, d'un coup de baguette magique, on pouvait annihiler toute la matière contenue dans le trou noir, la courbure de l'espace-temps demeurerait, comme la courbure d'une bulle de savon quand on s'arrête de souffler ! Mais la bulle de savon a une structure matérielle (molécules) soumise à des forces connues (tension superficielle de nature électrique), tandis que le vide, à priori, n'est ni matériel, ni susceptible de réagir à des forces (d'ailleurs, de quel type de force pourrait-il s'agir ?).

Plusieurs théoriciens ont pensé que l'horizon des trous noirs était un artefact mathématique dû à un mauvais choix des variables, et ils ont essayé de le faire disparaître, avec un succès mitigé, grâce à des changements de variables astucieux, mais artificiels. Il n'en demeure pas moins que, pour l'observateur distant, les paradoxes que nous venons d'évoquer sont irréductibles. A moins de remplacer la métrique de Schwarzschild par celle de Ni... Il est bien possible que l'horizon des trous noirs soit un artefact ; mais il ne provient pas d'un mauvais

choix des variables : il provient, évidemment, du pari d'Einstein.

D'autres chercheurs ont essayé de résoudre le problème de la perte d'information en imaginant que toute l'information absorbée par un trou noir demeure présente, codée d'une manière mystérieuse, sur son horizon. Cette idée est à l'origine de la théorie holographique.

D'autres ont étudié les trous noirs d'un point de vue quantique. Par exemple, Stephen Hawking a montré que, pour être en accord avec la mécanique quantique, les trous noirs devraient s'"évaporer", en émettant un rayonnement calculable et, en principe, observable.

On doit cependant se demander si cette discussion sur les trous noirs concerne vraiment la réalité physique, ou s'il ne s'agit pas plutôt d'un rêve dû à un dérapage de la relativité générale.

Rappelons qu' Einstein lui-même était très sceptique sur les trous noirs : il estimait, paradoxalement, que les discontinuités de Schwarzschild ne devaient pas exister dans la réalité physique...

Ceci ne minimise pas l'intérêt des études menées par les astronomes sur les "trous noirs stellaires" et les "trous noirs géants" : ces travaux sont passionnants, même s'il ne s'agit en réalité que d'"objets très compacts" et non de véritables trous noirs au sens de Schwarzschild !

Nous allons maintenant reprendre cette étude en métrique de Ni.

16 Vitesse de libération en métrique de Ni

Rappelons qu'en métrique de Ni on a $\alpha = e^{-\frac{2.k}{r}}$ et $\beta = \gamma = e^{\frac{2.k}{r}}$, où $k = \frac{G.M}{c^2}$.

De plus, on pose : $r_s = 2.k = \frac{2.G.M}{c^2}$ (rayon de Schwarzschild).

Nous appliquons la formule générale :

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - \alpha} ;$$
$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - e^{-\frac{2.k}{r}}} = \sqrt{1 - e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}}} = \sqrt{1 - e^{-\frac{r_s}{r}}}.$$

On a toujours $0 \leq e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}} \leq 1$, donc $0 \leq \sqrt{1 - e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}}} \leq 1$, donc la vitesse de libération est toujours inférieure ou égale à c . Quand $r \rightarrow 0$, elle tend vers c .

Pour r suffisamment grand, on a : $e^{-\frac{2.G.M}{r.c^2}} \approx 1 - \frac{2.G.M}{r.c^2}$, ce qui donne :

$$\frac{v_l}{c} \approx \sqrt{\frac{2.G.M}{r.c^2}} = \sqrt{\frac{2.k}{r}} ;$$

$$v_l \approx \sqrt{\frac{2.G.M}{r}}.$$

On retrouve alors la formule de Newton.

Que voit l'observateur distant ?

Nous savons que $v_{dist} = \frac{dr_{dist}}{dt_{dist}} = \frac{dr_{loc}}{\sqrt{\beta}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{dt_{loc}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot v_{loc}$; de plus, en métrique de Ni, on a $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{e^{-\frac{2.k}{r}} \cdot e^{-\frac{2.k}{r}}} = e^{-\frac{2.k}{r}}$, donc :

$$v_{l(dist)} = e^{-\frac{2.k}{r}} \cdot v_l = e^{-\frac{2.k}{r}} \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{2.k}{r}}} \cdot c.$$

Remarquons que, pour $r = r_s = 2.k$, on a :

$$\frac{v_l}{c} = \sqrt{1 - e^{-1}} \approx 0,795 ;$$

$$\frac{v_{l(dist)}}{c} = e^{-1} \sqrt{1 - e^{-1}} \approx 0,292.$$

17 Vitesse circulaire en métrique de Ni

Nous avons déjà calculé la vitesse circulaire évaluée par l'observateur distant, en métrique de Ni, grâce à la formule :

$$\left(\frac{v_{dist}}{c}\right)^2 = \frac{r^2 \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r}}{\frac{\partial(\gamma \cdot r^2)}{\partial r}}.$$

On a : $\alpha = e^{-\frac{2.k}{r}}$ et $\gamma = e^{\frac{2.k}{r}}$, donc :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{2.k}{r^2} \cdot e^{-\frac{2.k}{r}}, \quad \text{donc } r^2 \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 2.k \cdot e^{-\frac{2.k}{r}} ;$$

$$\frac{\partial(\gamma \cdot r^2)}{\partial r} = \frac{\partial\left(e^{\frac{2.k}{r}} \cdot r^2\right)}{\partial r} = 2.r \cdot e^{\frac{2.k}{r}} - r^2 \cdot \frac{2.k}{r^2} \cdot e^{\frac{2.k}{r}} = 2.(r - k) \cdot e^{\frac{2.k}{r}}.$$

$$\left(\frac{v_{dist}}{c}\right)^2 = \frac{2.k \cdot e^{-\frac{2.k}{r}}}{2.(r - k) \cdot e^{\frac{2.k}{r}}} = \frac{k}{r - k} \cdot e^{-\frac{2.k}{r}} ;$$

$$\frac{v_{dist}}{c} = \sqrt{\frac{k}{r - k}} \cdot e^{-\frac{2.k}{r}}.$$

Notons v_c la vitesse circulaire évaluée par un observateur local (immobile) :

$$\left(\frac{v_c}{c}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \left(\frac{v_{dist}}{c}\right)^2 = \frac{e^{\frac{2.k}{r}}}{e^{-\frac{2.k}{r}}} \cdot \frac{k}{r-k} \cdot e^{-\frac{4.k}{r}} = \frac{k}{r-k} ;$$

$$\frac{v_c}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-k}}.$$

On aurait pu faire le calcul à partir de cette formule vue précédemment :

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{G.M.m}{r^2} \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{m.v_y^2}{r}.$$

Sur une orbite circulaire, on a : $\frac{dp_r}{dt} = 0$ et $v_y = v = v_c$, donc :

$$\frac{m.v_c^2}{r} = \frac{G.M.m}{r^2} \cdot \left(1 + \frac{v_c^2}{c^2}\right) ;$$

$$v_c^2 = \frac{G.M}{r} \cdot \left(1 + \frac{v_c^2}{c^2}\right) ;$$

$$v_c^2 \cdot \left(1 - \frac{G.M}{r.c^2}\right) = \frac{G.M}{r} ;$$

$$v_c^2 \cdot \left(1 - \frac{k}{r}\right) = \frac{k.c^2}{r} ;$$

$$\frac{v_c^2}{c^2} = \frac{\frac{k}{r}}{1 - \frac{k}{r}} = \frac{k}{r-k} ;$$

$$\frac{v_c}{c} = \sqrt{\frac{k}{r-k}}.$$

On remarque tout de suite que cette vitesse circulaire n'est pas définie pour $r \leq k$, car le dénominateur $r - k$ serait alors négatif.

De plus, on doit avoir $v_c \leq c$, donc $k \leq r - k$, donc $r \geq 2.k = r_s$.

Lorsque le rayon de l'orbite tend vers le rayon de Schwarzschild par valeurs supérieures, la vitesse circulaire tend vers c : c'est la dernière orbite circulaire stable. Pour $r \leq r_s$, il n'y a pas d'orbite circulaire stable.

18 Orbite d'énergie minimale en métrique de Ni

Voyons comment évolue l'énergie circulaire E_c (énergie d'un mobile tournant sur une orbite circulaire) en fonction du rayon de l'orbite.

$$1 - \frac{v_c^2}{c^2} = 1 - \frac{k}{r-k} = \frac{r-2.k}{r-k} ;$$

$$ch \frac{w_c}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{r-k}{r-2.k}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{k}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{2.k}{r}}};$$

$$E_c = m_0.c^2.\sqrt{\alpha}.ch \frac{w_c}{c} = m_0.c^2.e^{-\frac{k}{r}}.\frac{\sqrt{1 - \frac{k}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{2.k}{r}}};$$

$$E_c = m_0.c^2.e^{-\frac{k}{r}}.\sqrt{\frac{r-k}{r-2.k}}.$$

Dérivons cette expression par rapport à r :

$$\frac{1}{m_0.c^2} \cdot \frac{dE_c}{dr} = \frac{k}{r^2}.e^{-\frac{k}{r}}.\sqrt{\frac{r-k}{r-2.k}} + \frac{1}{2}.e^{-\frac{k}{r}}.\sqrt{\frac{r-2.k}{r-k}} \cdot \frac{(r-2.k) - (r-k)}{(r-2.k)^2};$$

$$\frac{1}{m_0.c^2} \cdot \frac{dE_c}{dr} = \frac{k}{r^2}.e^{-\frac{k}{r}}.\sqrt{\frac{r-k}{r-2.k}} - \frac{1}{2}.e^{-\frac{k}{r}}.\sqrt{\frac{r-2.k}{r-k}} \cdot \frac{k}{(r-2.k)^2};$$

$$\frac{dE_c}{dr} = m_0.c^2.k.e^{-\frac{k}{r}} \cdot \left[\frac{1}{r^2}.\sqrt{\frac{r-k}{r-2.k}} - \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{r-2.k}{r-k}} \cdot \frac{1}{(r-2.k)^2} \right];$$

$$\frac{dE_c}{dr} = \frac{m_0.c^2.k.e^{-\frac{k}{r}}}{\sqrt{r-k}.\sqrt{r-2.k}} \cdot \left[\frac{r-k}{r^2} - \frac{1}{2.(r-2.k)} \right];$$

$$\frac{dE_c}{dr} = \frac{m_0.c^2.k.e^{-\frac{k}{r}}}{\sqrt{r-k}.\sqrt{r-2.k}} \cdot \frac{2.(r-k).(r-2.k) - r^2}{2.r^2.(r-2.k)};$$

$$\frac{dE_c}{dr} = \frac{m_0.c^2.k.e^{-\frac{k}{r}}}{2.r^2.\sqrt{r-k}.\sqrt{r-2.k}.(r-2.k)} \cdot (r^2 - 6.k.r + 4.k^2);$$

$$\frac{dE_c}{dr} = \frac{m_0.c^2.k^3.e^{-\frac{k}{r}}}{2.r^2.\sqrt{r-k}.\sqrt{r-2.k}.(r-2.k)} \cdot \left[\left(\frac{r}{k}\right)^2 - 6.\frac{r}{k} + 4 \right].$$

Cette dérivée s'annule lorsque le binôme entre crochets s'annule. La seule racine supérieure à 2 est : $\frac{r}{k} = 3 + \sqrt{5}$, soit :

$$r = (3 + \sqrt{5}).k = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.r_s.$$

C'est le rayon de l'orbite circulaire d'énergie minimale. Il vaut environ 2,618 fois le rayon de Schwarzschild.

La dérivée est positive pour $r > (3 + \sqrt{5}).k$ et négative pour $2.k < r < (3 + \sqrt{5}).k$.

Si nous faisons décroître r de $+\infty$ à $2.k$, la valeur de E_c , initialement égale à $m_0.c^2$, décroît jusqu'à un minimum E_m , qui est atteint pour $r = (3 + \sqrt{5}).k$; puis elle croît de nouveau et tend vers $+\infty$ quand $r \rightarrow 2.k$. L'énergie E_c (comme

la vitesse circulaire v_c) n'est pas définie pour $r < 2.k$. Calculons le minimum E_m :

$$E_m = m_0.c^2.e^{-\frac{1}{3+\sqrt{5}}}. \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}-1}{3+\sqrt{5}-2}} = m_0.c^2.e^{-\frac{1}{3+\sqrt{5}}}. \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} \approx 0,9712.m_0.c^2.$$

La période évaluée par l'observateur distant est :

$$T_{dist} = \frac{2.\pi.r}{v_{dist}} = \frac{2.\pi.r}{c} . \sqrt{\frac{r-k}{k}} . e^{\frac{2.k}{r}}.$$

Quand r décroît de $+\infty$ à $2.k$, cette période décroît de $+\infty$ à $\frac{4.\pi.e.k}{c} \approx 34,159.\frac{k}{c}$.

Pour $r = (3 + \sqrt{5}).k$, on a : $T_{dist} = \frac{2.\pi}{c} . (3 + \sqrt{5}).k . \sqrt{2 + \sqrt{5}} . e^{\frac{2}{3+\sqrt{5}}} \approx 99,209.\frac{k}{c}$.

19 Aphélie et périhélie en métrique de Ni

Nous notons toujours $r_1, v_1, w_1, \alpha_1, \gamma_1$ les valeurs de r, v, w, α et γ à l'aphélie, et $r_2, v_2, w_2, \alpha_2, \gamma_2$ leurs valeurs au périhélie.

Rappelons qu'en métrique de Ni on a : $\alpha = e^{-\frac{2k}{r}}$ et $\gamma = e^{\frac{2k}{r}}$.

Nous allons reprendre et adapter les formules que nous avons démontrées dans la section sur l'aphélie et le périhélie (cas général).

Comme $\bar{E} = \sqrt{\alpha}.ch\frac{w}{c} = e^{-\frac{k}{r}}.ch\frac{w}{c}$ et $\bar{\mu} = \sqrt{\gamma}.r.sh\frac{w}{c} = e^{\frac{k}{r}}.r.sh\frac{w}{c}$ (à l'aphélie et au périhélie), on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E} = e^{-\frac{k}{r_1}}.ch\frac{w_1}{c} = e^{-\frac{k}{r_2}}.ch\frac{w_2}{c} ; \\ \bar{\mu} = e^{\frac{k}{r_1}}.r_1.sh\frac{w_1}{c} = e^{\frac{k}{r_2}}.r_2.sh\frac{w_2}{c}. \end{array} \right.$$

$$\bar{\mu}.\bar{E} = r_1.ch\frac{w_1}{c}.sh\frac{w_1}{c} = r_2.ch\frac{w_2}{c}.sh\frac{w_2}{c} ;$$

$$\bar{\mu}.\bar{E} = \frac{1}{2}.r_1.sh\frac{2.w_1}{c} = \frac{1}{2}.r_2.sh\frac{2.w_2}{c} ;$$

$$\frac{\bar{\mu}}{\bar{E}} = e^{\frac{2k}{r_1}}.r_1.th\frac{w_1}{c} = e^{\frac{2k}{r_2}}.r_2.th\frac{w_2}{c} ;$$

$$\frac{\bar{\mu}}{\bar{E}} = e^{\frac{2k}{r_1}}.r_1.\frac{v_1}{c} = e^{\frac{2k}{r_2}}.r_2.\frac{v_2}{c}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{c^2} &= \frac{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}{1 - \frac{\gamma_1 \cdot r_1^2}{\gamma_2 \cdot r_2^2}} ; \\ \frac{v_1^2}{c^2} &= \frac{1 - \frac{e^{-\frac{2k}{r_1}}}{e^{-\frac{2k}{r_2}}}}{1 - \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot r_1^2}{e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot r_2^2}} = \frac{1 - \frac{e^{-\frac{2k}{r_2}}}{e^{-\frac{2k}{r_1}}}}{1 - \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot r_1^2}{e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot r_2^2}} ; \\ \frac{v_1^2}{c^2} &= r_2^2 \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_2}}}{e^{\frac{2k}{r_1}}} \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} - e^{\frac{2k}{r_2}}}{e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot r_2^2 - e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot r_1^2} ; \\ \frac{v_2^2}{c^2} &= r_1^2 \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_1}}}{e^{\frac{2k}{r_2}}} \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} - e^{\frac{2k}{r_2}}}{e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot r_2^2 - e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot r_1^2} ; \\ \bar{E}^2 &= \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\gamma_1 \cdot r_1^2 - \gamma_2 \cdot r_2^2)}{\alpha_2 \cdot \gamma_1 \cdot r_1^2 - \alpha_1 \cdot \gamma_2 \cdot r_2^2} = \frac{e^{-\frac{2k}{r_1}} \cdot e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot (e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot r_1^2 - e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot r_2^2)}{e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot r_1^2 - e^{-\frac{2k}{r_1}} \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot r_2^2} ; \\ \bar{E}^2 &= \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot r_1^2 - e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot r_2^2}{e^{\frac{4k}{r_1}} \cdot r_1^2 - e^{\frac{4k}{r_2}} \cdot r_2^2} ; \\ \bar{\mu}^2 &= \frac{\gamma_1 \cdot r_1^2 \cdot \gamma_2 \cdot r_2^2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_2 \cdot \gamma_1 \cdot r_1^2 - \alpha_1 \cdot \gamma_2 \cdot r_2^2} = r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot (e^{-\frac{2k}{r_1}} - e^{-\frac{2k}{r_2}})}{e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot r_1^2 - e^{-\frac{2k}{r_1}} \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot r_2^2} ; \\ \bar{\mu}^2 &= r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot (e^{\frac{2k}{r_2}} - e^{\frac{2k}{r_1}})}{e^{\frac{4k}{r_1}} \cdot r_1^2 - e^{\frac{4k}{r_2}} \cdot r_2^2} . \end{aligned}$$

20 Vitesse de décrochage en métrique de Ni

Nous reprenons ici la même problématique qu'en métrique de Schwarzschild, et nous allons aboutir à des conclusions similaires, bien que la présence d'exponentielles dans les calculs nous interdise une résolution purement algébrique des équations.

Nous allons partir de cette égalité :

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{e^{-\frac{2k}{r_2}}}{e^{-\frac{2k}{r_1}}}}{1 - \frac{e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot r_1^2}{e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot r_2^2}} .$$

Nous supposons r_1 fixé (raisonnablement grand, disons supérieur au rayon de l'orbite circulaire d'énergie minimale), et nous faisons varier v_1 pour étudier comment évolue r_2 (ou, inversement, nous faisons varier r_2 pour étudier comment

évolue v_1). Nous allons voir qu'il existe (comme en métrique de Schwarzschild) une valeur minimale de v_1 (la vitesse de décrochage v_d) au-dessous de laquelle il est impossible de trouver r_2 remplissant la condition imposée par l'équation ci-dessus.

Posons $x_1 = e^{\frac{2k}{r_1}}$ et $x_2 = e^{\frac{2k}{r_2}}$. Ceci entraîne que $\text{Log } x_1 = \frac{2k}{r_1}$, $\text{Log } x_2 = \frac{2k}{r_2}$,
 $r_1 = \frac{2k}{\text{Log } x_1}$ et $r_2 = \frac{2k}{\text{Log } x_2}$.

Nous supposons que $x_2 > x_1$, ce qui signifie que $r_2 < r_1$.

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{x_2}{x_1}}{1 - \frac{x_1}{x_2} \cdot \left(\frac{\frac{2k}{\text{Log } x_1}}{\frac{2k}{\text{Log } x_2}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{x_2}{x_1}}{1 - \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{\text{Log}^2 x_2}{\text{Log}^2 x_1}} = \frac{\frac{1}{x_1} \cdot (x_1 - x_2)}{\frac{x_1}{\text{Log}^2 x_1} \cdot \left(\frac{\text{Log}^2 x_1}{x_1} - \frac{\text{Log}^2 x_2}{x_2}\right)} ;$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{\text{Log}^2 x_1}{x_1^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{\frac{\text{Log}^2 x_2}{x_2} - \frac{\text{Log}^2 x_1}{x_1}}.$$

Posons :

$$f(x) = \frac{\text{Log}^2 x}{x},$$

$K_1 = \frac{\text{Log}^2 x_1}{x_1^2} = \frac{f(x_1)}{x_1}$ (c'est une constante, puisque r_1 est fixé - donc x_1 aussi)

et $K_2 = \frac{\text{Log}^2 x_2}{x_2^2} = \frac{f(x_2)}{x_2}$.

$$\frac{v_1^2}{c^2} = K_1 \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{f(x_1)}{x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

De même :

$$\frac{v_2^2}{c^2} = K_2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{f(x_2)}{x_2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Comme $\frac{v_1^2}{c^2}$ doit être compris entre 0 et 1, les deux conditions suivantes doivent être remplies :

a) $f(x_2) > f(x_1) ;$

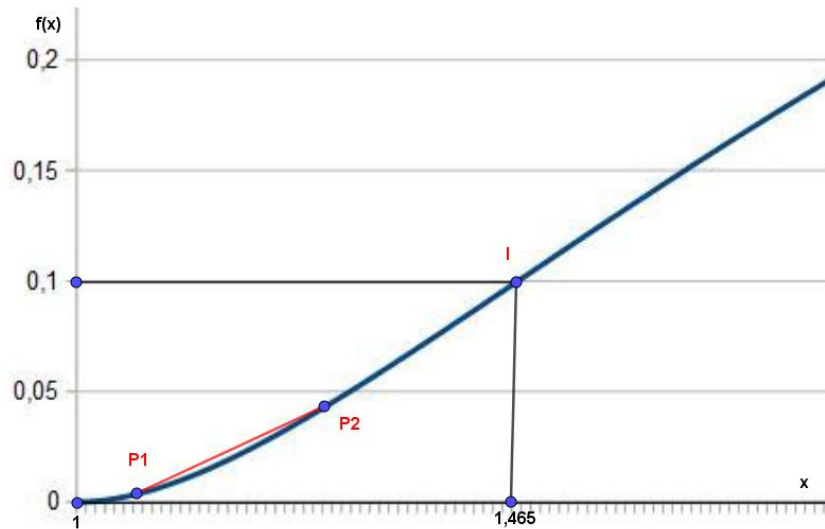
b) $K_1 \cdot (x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1)$, soit :

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \cdot (x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) ;$$

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \cdot x_2 - f(x_1) < f(x_2) - f(x_1) ;$$

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \cdot x_2 < f(x_2) ;$$

$$\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2}.$$



Par commodité, nous allons étudier plutôt l'inverse de $\frac{v_1^2}{c^2}$:

$$\frac{c^2}{v_1^2} = \frac{x_1^2}{\text{Log}^2 x_1} \cdot \frac{\text{Log}^2 x_2 - \text{Log}^2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{K_1} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Sur la courbe représentant la fonction f , considérons les points $P_1(x_1, f(x_1))$ et $P_2(x_2, f(x_2))$. La quantité $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ représente la pente de la droite (P_1, P_2) .

Notre but est de montrer que cette quantité est bornée, c'est-à-dire qu'elle ne peut en aucun cas tendre vers l'infini lorsque P_2 se déplace sur la courbe. Ceci prouvera que v_1 ne peut pas tendre vers 0, mais possède une valeur minimale positive non nulle au-dessous de laquelle l'égalité imposée ne peut être assurée.

Étudions la dérivée première de f :

$$f'(x) = \frac{x \cdot 2 \text{Log} x \cdot \frac{1}{x} - \text{Log}^2 x}{x^2} = \frac{\text{Log} x \cdot (2 - \text{Log} x)}{x^2}.$$

Dans notre étude, $x = e^{\frac{2k}{r}} > 1$ et $\text{Log} x = \frac{2k}{r} > 0$.

$$f'(x) = \frac{\text{Log} x \cdot (2 - \text{Log} x)}{x^2} = \frac{\frac{2k}{r} \cdot (2 - \frac{2k}{r})}{x^2} = \frac{\frac{2k}{r} \cdot (\frac{2 \cdot (r-k)}{r})}{x^2} = \frac{4k \cdot (r-k)}{r^2 \cdot x^2}.$$

$f'(x)$ s'annule pour $\text{Log} x = 0$ ($x = 1, r = +\infty$) et pour $\text{Log} x = 2$ ($x = e^2 \approx 7,389\dots, r = k$).

On aura donc : $f'(x) > 0$ pour $r > k$ et $f'(x) < 0$ pour $r < k$.

Attention : dire que $f'(x)$ est positif signifie que $f(x)$ croît quand x croît, c'est-à-dire quand r décroît.

La fonction f est croissante pour $\text{Log } x < 2$ ($x < e^2 \approx 7,389\dots$), décroissante ensuite. Elle passe par un maximum qui est : $\frac{\text{Log}^2 x}{x} = \frac{4}{e^2} \approx 0,541\dots$

Etudions la dérivée seconde de f :

$$f''(x) = \frac{x^2 \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{2 \cdot \text{Log } x}{x} \right) - 2 \cdot x \cdot \text{Log } x \cdot (2 - \text{Log } x)}{x^4} ;$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} \cdot [2 - 2 \cdot \text{Log } x - 4 \cdot \text{Log } x + 2 \cdot (\text{Log } x)^2] ;$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \cdot [\text{Log}^2 x - 3 \cdot \text{Log } x + 1] .$$

On aura $f''(x) = 0$ si $\text{Log}^2 x - 3 \cdot \text{Log } x + 1 = 0$. Résolvons cette équation du second degré dans laquelle l'inconnue est $\text{Log } x$:

$\Delta = 9 - 4 = 5$; les solutions sont donc : $\text{Log } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\text{Log } x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Les valeurs correspondantes de x sont :

$$x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \approx 1,46516\dots$$

$$x = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 13,70874\dots$$

Comme $\text{Log } x = \frac{2k}{r}$, ces solutions correspondent à $\frac{2k}{r} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{2k}{r} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, autrement dit :

$$r = \frac{4k}{3-\sqrt{5}} = (3+\sqrt{5}) \cdot k \approx 5,236067977 \cdot k$$

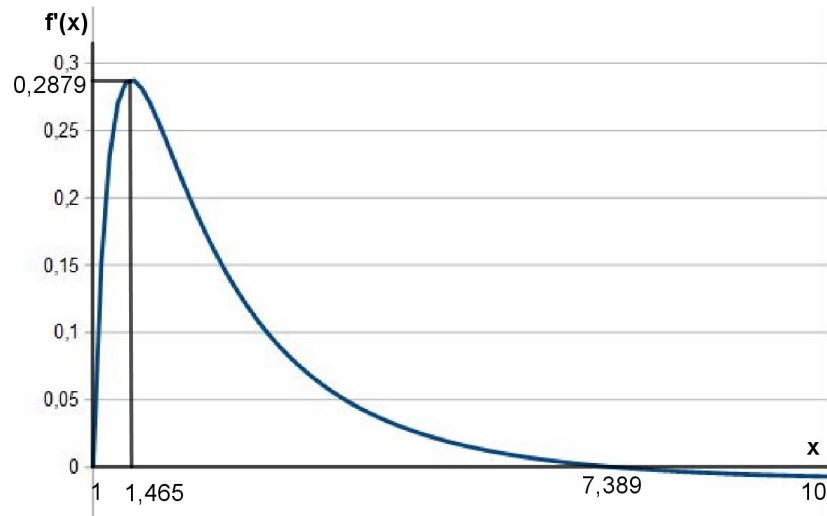
$$r = \frac{4k}{3+\sqrt{5}} = (3-\sqrt{5}) \cdot k \approx 0,673932022 \cdot k.$$

La première solution correspond au rayon de l'orbite circulaire d'énergie minimale, dont nous avons déjà parlé dans la section sur les orbites circulaires en métrique de Ni. Elle nous permet de calculer le maximum M de la fonction f' . On obtient :

$$M = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \left(2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)}{e^{3-\sqrt{5}}} \approx 0,2879\dots$$

La seconde correspond à une valeur de r inférieure à k , donc elle nous intéresse moins dans la recherche que nous menons actuellement. Elle permettrait de calculer le minimum de f' .

Voici une représentation graphique de la dérivée première f' :



La dérivée seconde $f''(x)$ est négative pour $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \text{Log } x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, soit : $(3-\sqrt{5}).k < r < (3+\sqrt{5}).k$, c'est-à-dire $0,673932022\dots k < r < 5,236067977\dots k$; elle est positive en dehors de cet intervalle.

Remarquons que $f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, après être passée par un minimum (négatif).

Voici ensuite une nouvelle représentation de la fonction f , avec un champ plus étendu ($0 < x < 40$) que dans la première, pour faire apparaître le maximum, de coordonnées $(e^2, \frac{4}{e^2})$.

Nous avons tracé aussi la tangente issue du point $O(0, 0)$. Son point de contact avec la courbe vérifie l'équation : $\frac{f(x)}{x} = f'(x)$, autrement dit :

$$\frac{\text{Log}^2 x}{x^2} = \frac{\text{Log } x \cdot (2 - \text{Log } x)}{x^2} ;$$

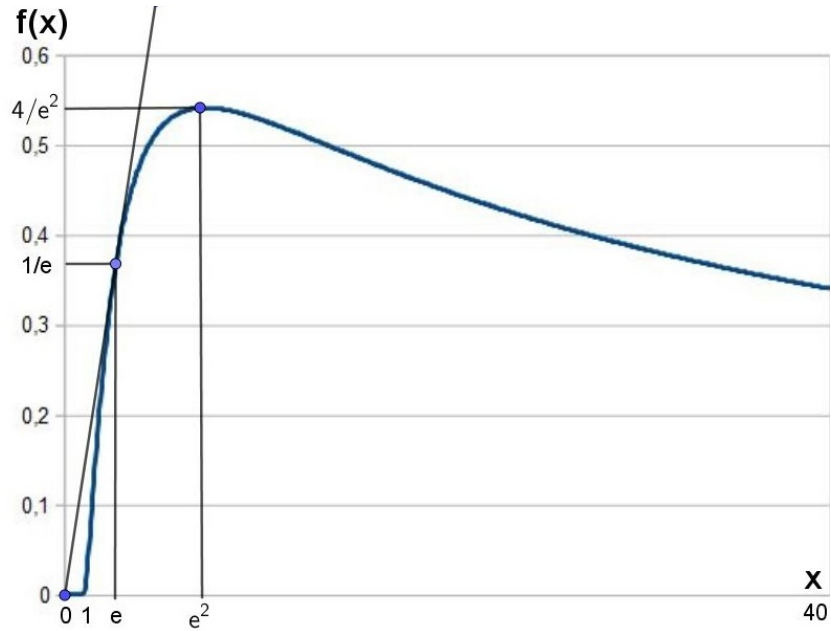
$$\text{Log } x = 2 - \text{Log } x ;$$

$$2 \cdot \text{Log } x = 2 ;$$

$$\text{Log } x = 1 ;$$

$$x = e ;$$

$$r = 2k.$$



Il nous reste à répondre à la question que nous avons posée au début de cette section. D'après le théorème des accroissements finis, nous savons qu'il existe x_3 compris entre x_1 et x_2 tel que le quotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ soit égal à $f'(x_3)$. Mais nous avons montré que la fonction f' est bornée. On a donc : $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < M \approx 0,2879\dots$, et par conséquent : $\frac{c^2}{v_1^2} < \frac{M}{K_1}$, ce qui entraîne :

$$\frac{v_1^2}{c^2} > \frac{K_1}{M}.$$

Il existe donc une vitesse d'aphélie minimale au-dessous de laquelle l'existence d'un périhélie est exclue. C'est la vitesse de décrochage v_d .

On peut ajouter une précision. Reprenons le premier graphique sur lequel nous avons représenté les points P_1 (aphélie) et P_2 (périhélie), et déplaçons P_2 sur la courbe, en direction du point I , qui est un point d'inflexion (correspondant à l'orbite circulaire d'énergie minimale). La pente du segment $[P_1P_2]$ augmente, car la dérivée seconde est positive. Au-delà de I , elle devient négative. On peut donc dire que $\frac{c^2}{v_1^2}$ croît, et par suite que v_1 décroît, au moins jusqu'à ce que P_2 arrive en I . Il en résulte que, parmi tous les périhélie possibles, celui qui correspond à la plus grande valeur de x (ou au plus petit rayon r_2) est au-delà de I , ce qui signifie que : $r_{2min} < (3 + \sqrt{5}) \cdot k \approx 5,236067977 \cdot k$. Si r_1 est plus grand que le rayon de l'orbite circulaire d'énergie minimale, alors r_{2min} est plus petit.

Remarquons encore qu'on peut déplacer P_2 sur la courbe jusqu'à ce que la droite (P_1 , P_2) soit tangente (en P_2) à la courbe. On atteint alors le point de décrochage r_{2min} .

Cette notion de décrochage peut être mise en relation avec le comportement de la métrique de Ni vis-à-vis de l'accélération centrifuge. En gravitation newtonienne, l'accélération centrifuge d'une particule-test tournant autour d'un corps central de masse M est :

$$r \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{r} \cdot \left(r \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{v_y^2}{r}.$$

Pour contrebalancer la force d'attraction du corps central, la vitesse circulaire v_y peut dans certains cas dépasser la vitesse de la lumière : ce n'est pas un problème insurmontable dans cette théorie.

Rappelons la seconde équation des géodésiques en métrique de Ni; nous l'avons écrite ainsi :

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{G.M.m}{r^2} \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{m \cdot v_y^2}{r}.$$

Ceci signifie que l'accélération centrifuge s'exprime, comme chez Newton, par :

$$\frac{v_y^2}{r},$$

où v_y est la vitesse circulaire de la particule-test évaluée localement (le rayon r étant évalué par l'observateur distant).

Comme dans la théorie de Newton, une vitesse circulaire supérieure à c peut être, théoriquement, nécessaire pour contrebalancer l'accélération centripète.

On pourrait se demander si l'existence d'une vitesse de décrochage n'entraîne pas un effondrement semblable à celui des trous noirs de Schwarzschild. Les lignes d'univers des corps qui "décrochent" ne vont-elles pas converger inéluctablement vers une singularité centrale ?

Ce n'est pas le cas, pour plusieurs raisons. La première est que ces corps qui décrochent contribuent à augmenter la "compacité" (rapport masse/rayon) du corps central, ce qui entraîne une "création d'espace" qui modifie la géométrie de l'espace-temps. Ce phénomène existe aussi en relativité restreinte, mais il est quantitativement différent.

Seconde raison : en métrique de Ni, un corps n'est jamais totalement piégé dans le champ gravitationnel d'un "trou gris"; il peut toujours s'en évader, à condition de récupérer, à la faveur de collisions par exemple, une énergie cinétique suffisante, et d'avoir un vecteur vitesse convenablement orienté. C'est ce

que nous allons étudier maintenant.

21 Angle d'évasion en métrique de Ni

Nous allons maintenant étudier le problème suivant : r_1 est toujours supposé fixé, mais très petit ($r_1 < r_2$, donc $x_1 > x_2$, et surtout $r_1 < 2k$, donc $x_1 > e$, ce qui situe le point P_1 à l'intérieur de la "sphère de Schwarzschild"); la vitesse \vec{v}_2 est toujours perpendiculaire au rayon vecteur \vec{r}_2 (on peut toujours parler d'aphélie), mais pour \vec{v}_1 nous changeons la donne de manière radicale : nous supposons que \vec{v}_1 forme avec \vec{r}_1 un angle α . Le point P_1 n'est plus le périhélie mais un point quelconque de l'orbite.

Nous voudrions savoir comment varie r_2 (ou x_2) en fonction de v_1 et de α . Nous voudrions surtout savoir si le mobile peut sortir de la sphère de Schwarzschild, et à quelle condition.

Nous allons reprendre et adapter les calculs que nous avons détaillés dans les sections sur l'aphélie et le périhélie dans le cas général puis en métrique de Ni, et sur la vitesse de décrochage en métrique de Ni.

Nos formules de base seront :

$$\begin{cases} \bar{E} = e^{-\frac{k}{r_1}} \cdot ch \frac{w_1}{c} = e^{-\frac{k}{r_2}} \cdot ch \frac{w_2}{c} ; \\ \bar{\mu} = e^{\frac{k}{r_1}} \cdot r_1 \cdot c \cdot sh \frac{w_1}{c} \cdot \sin \alpha = e^{\frac{k}{r_2}} \cdot r_2 \cdot c \cdot sh \frac{w_2}{c} . \end{cases}$$

D'où on tire $ch^2 \frac{w_2}{c}$ et $sh^2 \frac{w_2}{c}$:

$$\begin{cases} ch^2 \frac{w_2}{c} = e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{-\frac{2k}{r_1}} \cdot ch^2 \frac{w_1}{c} ; \\ sh^2 \frac{w_2}{c} = e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \sin^2 \alpha \cdot sh^2 \frac{w_1}{c} . \end{cases}$$

Retranchons membre à membre :

$$\begin{aligned} 1 &= e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{-\frac{2k}{r_1}} \cdot ch^2 \frac{w_1}{c} - e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \sin^2 \alpha \cdot sh^2 \frac{w_1}{c} ; \\ 1 &= e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{-\frac{2k}{r_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} - e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{\frac{v_1^2}{c^2}}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} ; \\ 1 - \frac{v_1^2}{c^2} &= e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{-\frac{2k}{r_1}} - e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{v_1^2}{c^2} ; \\ 1 - e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{-\frac{2k}{r_1}} &= \frac{v_1^2}{c^2} - e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{v_1^2}{c^2} = \frac{v_1^2}{c^2} \cdot \left[1 - e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \sin^2 \alpha \right] ; \end{aligned}$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{1 - e^{\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{-\frac{2k}{r_1}}}{1 - e^{-\frac{2k}{r_2}} \cdot e^{\frac{2k}{r_1}} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{x_2}{x_1}}{1 - \frac{x_1}{x_2} \cdot \left(\frac{2k}{\text{Log } x_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\text{Log } x_2}{2k}\right)^2 \cdot \sin^2 \alpha} ;$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{x_2}{x_1}}{1 - \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{\text{Log}^2 x_2}{\text{Log}^2 x_1} \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{x_1} \cdot (x_1 - x_2)}{\frac{x_1 \cdot \sin^2 \alpha}{\text{Log}^2 x_1} \cdot \left(\frac{\text{Log}^2 x_1}{x_1 \cdot \sin^2 \alpha} - \frac{\text{Log}^2 x_2}{x_2}\right)} ;$$

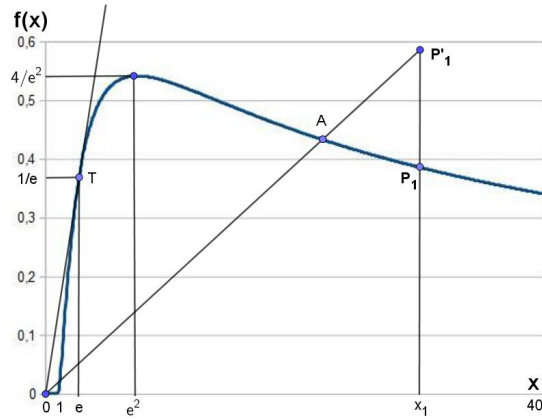
$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{\text{Log}^2 x_1}{x_1^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \frac{x_1 - x_2}{\frac{\text{Log}^2 x_1}{x_1 \cdot \sin^2 \alpha} - \frac{\text{Log}^2 x_2}{x_2}} ;$$

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{f(x_1)}{x_1 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \frac{x_1 - x_2}{\frac{f(x_1)}{\sin^2 \alpha} - f(x_2)} .$$

Pour que $\frac{v_1^2}{c^2}$ soit compris entre 0 et 1, les conditions suivantes doivent être remplies (sachant que $x_1 > x_2$) :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{f(x_1)}{\sin^2 \alpha} > f(x_2) ; \\ \text{b) } & \frac{f(x_1)}{x_1 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot (x_1 - x_2) < \frac{f(x_1)}{\sin^2 \alpha} - f(x_2) ; \\ & \frac{f(x_1)}{\sin^2 \alpha} - \frac{x_2 \cdot f(x_1)}{x_1 \cdot \sin^2 \alpha} < \frac{f(x_1)}{\sin^2 \alpha} - f(x_2) ; \\ & \frac{x_2 \cdot f(x_1)}{x_1 \cdot \sin^2 \alpha} > f(x_2) ; \\ & \frac{f(x_1)}{x_1 \cdot \sin^2 \alpha} > \frac{f(x_2)}{x_2} . \end{aligned}$$

Reprenons la courbe de la fonction f , déjà vue dans la section précédente; plaçons le point P_1 de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ et le point P'_1 de coordonnées $\left(x_1, \frac{f(x_1)}{\sin^2 \alpha}\right)$.



Supposons, pour commencer, α constant. Pour $v_1 = 0$, on aura $x_2 = x_1$, donc le point P_2 sera confondu avec P_1 . Pour $v_1 = c$, on aura $\frac{f(x_1)}{x_1 \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{f(x_2)}{x_2}$, ce qui signifie que P_2 sera confondu avec A . En définitive, P_2 sera situé sur la portion de courbe délimitée par P_1 et A .

Faisons maintenant décroître α . P_1 est fixé, mais l'ordonnée de P'_1 , qui est $\frac{x_1}{\sin^2 \alpha}$, augmente; P_1 se déplace (vers le haut) sur la droite verticale d'abscisse x_1 (passant par P_1), et le point A se déplace sur la courbe de f (vers la gauche).

Pour que le point A arrive en T , il faut que P'_1 rejoigne la tangente (OT), de pente $\frac{1}{e^2}$; le quotient de son ordonnée par son abscisse sera alors :

$$\frac{f(x_1)}{x_1 \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{1}{e^2},$$

ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{f(x_1) \cdot e^2}{x_1} = \frac{\text{Log}^2 x_1 \cdot e^2}{x_1^2}; \\ \sin \alpha &= \frac{\text{Log } x_1 \cdot e}{x_1} = \frac{\frac{2k}{r_1} \cdot e}{e^{\frac{2k}{r_1}}} = \frac{2k}{r_1} \cdot e^{1 - \frac{2k}{r_1}}. \end{aligned}$$

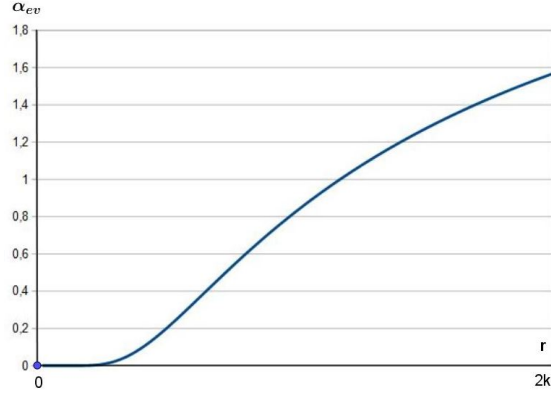
Nous appelons "angle d'évasion" cette valeur de α , que nous notons :

$$\alpha_{ev} = \text{Arcsin} \left(\frac{2k}{r_1} \cdot e^{1 - \frac{2k}{r_1}} \right).$$

Le point T a pour abscisse $x = e$, ce qui correspond à $\frac{2k}{r} = \text{Log } x = 1$, donc à $r = 2k$. On voit donc que, si $v_1 = c$, le fait de faire tendre α vers α_{ev} fait tendre A vers T , et l'aphélie de l'orbite tend alors vers $r = 2k$. Pour $\alpha < \alpha_{ev}$, la trajectoire sort de la sphère de Schwarzschild et le mobile s'échappe : il n'y a plus d'aphélie possible, car la droite (OP'_1) ne coupe plus la courbe.

Pour $v_1 < c$, l'évasion est toujours possible, mais un angle α inférieur à α_{ev} est nécessaire. Dans ce cas, le point P'_1 se situera au-dessus de la tangente (OT). L'aphélie pourra parcourir la courbe de $x = x_1$ jusqu'à $x = 1$.

Voici la courbe de la fonction donnant l'angle d'évasion α_{ev} en fonction de r ($0 < r < 2k$) :



Pour $r = 2k$, l'angle est ouvert à 90° ($\alpha_{ev} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57\dots$); quand r tend vers 0, l'angle se ferme.

Imaginons un astre compact, sphérique et opaque, de masse M , de rayon $r < 2k = \frac{2.G.M}{c^2}$. Cet astre est donc inclus dans sa sphère de Schwarzschild. Supposons que chaque point de sa surface émette dans toutes les directions des rayonnements orientés aléatoirement. Les seuls rayonnements qui vont sortir de cette sphère sont situés dans un angle solide Ω de demi-angle au sommet α_{ev} . La mesure de l'angle solide (en steradians) est donnée par :

$$\Omega = 2\pi.(1 - \cos \alpha_{ev}) = 2\pi.(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{ev}}) ;$$

$$\Omega = 2\pi. \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2k}{r} . e^{1 - \frac{2k}{r}} \right)^2} \right) .$$

La proportion de rayonnements qui s'échappent est donc : $1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2k}{r} . e^{1 - \frac{2k}{r}} \right)^2}$,
et la proportion de rayonnements qui restent prisonniers est : $\sqrt{1 - \left(\frac{2k}{r} . e^{1 - \frac{2k}{r}} \right)^2}$.

Pour un observateur distant, la luminosité apparente de cet astre sera normale pour $r = 2k$, plus faible pour $r < 2k$, nulle pour $r = 0$.

Nous appelons un tel astre "trou gris de Ni" ; il tend vers un trou noir de Schwarzschild quand r tend vers 0.

22 Les trous gris en métrique de Ni

Dans notre approche, basée sur la métrique de Ni, le coefficient de ralentissement du temps ne tend pas vers 0 quand on s'approche de la sphère de Schwarzschild ; pour qu'il tende vers 0, il faudrait que la masse M (non nulle)

soit concentrée dans un volume nul. Cette sphère constitue cependant une limite de stabilité des orbites, puisqu'aucune orbite circulaire (ou elliptique) ne peut exister à l'intérieur de celle-ci. Si on imagine la masse M concentrée dans un volume nul (singularité centrale), alors toutes les orbites pénétrant dans la sphère de Schwarzschild plongeront vers la singularité, et il n'y aura plus de force centrifuge pour les retenir.

Comme nous l'avons fait pour la métrique de Schwarzschild, nous allons étudier la chute libre radiale (en ligne droite) d'une particule-test de masse m vers un "trou noir" de masse M . Nous avons démontré (voir le document sur les métriques, section sur la chute libre radiale) deux formules valables pour toutes les métriques symétriques :

$$1) ds = c.d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - \alpha}} ;$$

$$2) c.dt = -\frac{\bar{E}}{\alpha} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - \alpha}}.$$

Dans le cas de la métrique de Ni, on a : $\alpha = e^{-\frac{2.k}{r}}$; les formules s'écrivent donc :

$$1) c.d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - e^{-\frac{2.k}{r}}}} ;$$

$$2) c.dt = -\frac{\bar{E}}{e^{-\frac{2.k}{r}}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{\bar{E}^2 - e^{-\frac{2.k}{r}}}}.$$

Quand r varie de 0 à $+\infty$, $e^{-\frac{2.k}{r}}$ décroît de $+\infty$ à 1 et $e^{-\frac{2.k}{r}}$ est son inverse, qui varie donc de 0 à 1.

Pour $\bar{E} = 1$ ou $\bar{E} > 1$, le dénominateur $\sqrt{\bar{E}^2 - e^{-\frac{2.k}{r}}}$ ne s'annule pas, car $\bar{E}^2 > e^{-\frac{2.k}{r}}$; on peut intégrer $c.d\tau$ de r_1 à r_2 ($r_2 < r_1$), et l'intégrale ne diverge pas. On peut même aller jusqu'à $r_2 = 0$ (si l'objet central est supposé ponctuel) : la durée de la chute, en temps propre, est toujours finie.

L'intégration de $c.dt$ se passe bien également : l'intégrale ne diverge pas au voisinage de la limite de Schwarzschild, donc l'observateur distant va voir la particule franchir cette limite et continuer son parcours en ralentissant progressivement. C'est seulement au voisinage de $r = 0$ que l'intégrale va diverger à cause du dénominateur $e^{-\frac{2.k}{r}}$, qui tend alors vers 0. Pour l'observateur distant, la particule n'atteint jamais le centre.

Pour $\bar{E} < 1$, le dénominateur $\sqrt{\bar{E}^2 - e^{-\frac{2k}{r}}}$ s'annule lorsque $\bar{E}^2 = e^{-\frac{2k}{r}}$, ou $e^{-\frac{k}{r}} = \bar{E}$, ou $-\frac{k}{r} = \text{Log}\bar{E}$, ou encore $r = -\frac{k}{\text{Log}\bar{E}}$. Nous pouvons donc poser :

$$r_0 = -\frac{k}{\text{Log}\bar{E}}.$$

Notons que $\text{Log}\bar{E} < 0$.

C'est le point de départ (l'origine) de la chute libre. Ensuite tout se passe comme précédemment : la particule atteint le centre en un temps fini selon sa propre estimation, en un temps infini selon l'observateur distant (mais la sphère de Schwarzschild n'est pas une barrière).

Reprenons notre étude appliquée à la lumière ; imaginons un rayon lumineux se dirigeant radialement vers le trou noir. Pour décrire sa trajectoire, utilisons la métrique de Ni, avec $d\theta = d\phi = 0$, et aussi $ds^2 = 0$ (puisque'il s'agit de lumière). Les quantités dt et dr sont toujours évaluées par l'observateur distant. Il vient :

$$ds^2 = e^{-\frac{2k}{r}}.c^2.dt^2 - e^{\frac{2k}{r}}.dr^2 = 0 ;$$

$$c^2.dt^2 = e^{\frac{4k}{r}}.dr^2 ;$$

$$c.dt = \pm e^{\frac{2k}{r}}.dr.$$

Le signe \pm est à choisir selon le sens de parcours.

Selon l'observateur distant, le temps nécessaire pour que la lumière aille de (t_1, r_1) à (t_2, r_2) est donné par :

$$c.(t_2 - t_1) = \pm \int_{r=r_1}^{r_2} e^{\frac{2k}{r}}.dr.$$

La quantité $e^{\frac{2k}{r}}$ ne tend pas vers l'infini quand $r \rightarrow 2k$, donc son intégrale ne diverge pas au voisinage de la sphère de Schwarzschild ; le rayon lumineux semblera seulement ralentir, mais sans s'arrêter, à l'approche de la surface critique. En effet, sa vitesse apparente sera :

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = c.e^{-\frac{2k}{r}} \approx 0,368.c \text{ pour } r=2k.$$

Remarquons que ce coefficient : $e^{-1} \approx 0,368$ sera inchangé si nous remplaçons le rayon lumineux par un mobile de vitesse quelconque se déplaçant radialement.

Un autre remarque s'impose : il est clair que le coefficient $e^{\frac{2k}{r}}$ tend vers l'infini quand r tend vers 0 ; on peut montrer que son intégrale diverge au voisinage de 0. Donc s'il existait un corps (disons une particule élémentaire) de

masse non nulle et de rayon nul, alors cette particule ne pourrait communiquer avec aucune autre, puisqu'un message quelconque, transmis à la vitesse de la lumière, mettrait un temps infini pour atteindre sa cible. Si toutes les particules élémentaires étaient de rayon nul, elles s'ignoraient, et il n'y aurait pas de physique!

Bien sûr, le fait d'imaginer des particules de masse non nulle et de rayon nul (donc de densité infinie) est une façon d'injecter, par la pensée, de l'infini dans la théorie; mais cette densité infinie n'est admise ni par la mécanique quantique, ni par la relativité générale. La différence entre la métrique de Schwarzschild et celle de Ni, c'est que, dans la première, des quantités infinies apparaissent spontanément, même si le théoricien prend soin de ne pas en injecter au départ, de manière artificielle et arbitraire; dans la seconde, on ne trouvera de quantités infinies que si on les a apportées soi-même.

Avec la métrique de Schwarzschild, nous avons dit que le potentiel était absolu, et que le rôle de l'observateur distant, qui est plongé dans un potentiel nul, ne pouvait pas être joué par un autre observateur situé dans un potentiel non nul. Tout se simplifie en métrique de Ni. Reprenons l'égalité ci-dessus :

$$c.dt = \pm e^{\frac{2.k}{r}} .dr,$$

et remplaçons $\frac{2.k}{r}$ par $-\frac{2.\Phi}{c^2}$:

$$c.dt = \pm e^{-\frac{2.\Phi}{c^2}} .dr.$$

On doit comprendre que, dans cette égalité établie par l'observateur distant, Φ est la différence de potentiel entre la scène observée et l'observateur distant : $\Phi = \Phi_{sc} - \Phi_{dist}$. On peut écrire :

$$c.dt_{dist} = \pm e^{-\frac{2.(\Phi_{sc} - \Phi_{dist})}{c^2}} .dr_{dist}.$$

Considérons maintenant un observateur local immobile, observant la même scène; soit Φ_{loc} son potentiel. On sait que :

$$dt_{loc} = e^{\frac{\Phi_{loc} - \Phi_{dist}}{c^2}} .dt_{dist} \quad \text{et} \quad dr_{loc} = e^{-\frac{\Phi_{loc} - \Phi_{dist}}{c^2}} .dr_{dist}, \quad \text{ou bien :}$$

$$dt_{dist} = e^{-\frac{\Phi_{loc} - \Phi_{dist}}{c^2}} .dt_{loc} \quad \text{et} \quad dr_{dist} = e^{\frac{\Phi_{loc} - \Phi_{dist}}{c^2}} .dr_{loc}.$$

L'égalité précédente $\left(c.dt_{dist} = \pm e^{-\frac{2.(\Phi_{sc} - \Phi_{dist})}{c^2}} .dr_{dist} \right)$ devient donc :

$$e^{-\frac{\Phi_{loc} - \Phi_{dist}}{c^2}} .c.dt_{loc} = \pm e^{-\frac{2.(\Phi_{sc} - \Phi_{dist})}{c^2}} .e^{\frac{\Phi_{loc} - \Phi_{dist}}{c^2}} .dr_{loc} ;$$

$$c.dt_{loc} = \pm e^{-\frac{2.(\Phi_{sc} - \Phi_{dist})}{c^2}} .e^{\frac{\Phi_{loc} - \Phi_{dist}}{c^2}} .e^{\frac{\Phi_{loc} - \Phi_{dist}}{c^2}} .dr_{loc} ;$$

$$c.dt_{loc} = \pm e^{-\frac{2.(\Phi_{sc} - \Phi_{loc})}{c^2}} .dr_{loc}.$$

Ce calcul un peu "lourd" traduit une chose très simple : le potentiel est relatif (ce sont seulement les différences de potentiel qui jouent un rôle physique) et toute formule établie pour un observateur immobile situé dans un potentiel donné peut être adaptée pour tout autre observateur immobile situé dans un autre potentiel.

Ceci peut sembler évident, car c'est vrai aussi bien pour le potentiel gravitationnel de la physique classique que pour le potentiel électrique, par exemple. Mais ce n'est pas vrai en métrique de Schwarzschild.

Abordons maintenant une autre question : en métrique de Ni, est-il possible de sortir de la sphère de Schwarzschild ? Avec la métrique de la relativité générale (c'est-à-dire celle de Schwarzschild), c'est impossible, du point de vue d'un observateur distant, car le temps nécessaire pour que le mobile entre dans le trou noir (ou en sorte) est infini ! En métrique de Ni, l'impossibilité rencontrée en relativité générale s'évanouit : un mobile pourra franchir la limite, de l'extérieur vers l'intérieur, en un temps fini ; il suffira alors de "passer le film à l'envers" (ou d'inverser le sens du vecteur vitesse) pour le voir ressortir. Un mobile pourra donc ressortir de la sphère de Schwarzschild, mais pour cela il devra changer d'orbite (car une orbite qui entre dans cette sphère n'en ressort pas spontanément) ; ceci nécessitera un échange d'énergie, dont la probabilité sera d'autant plus faible que le puits de potentiel sera plus profond. Mais il n'est plus question d'une durée infinie ! Les "trous noirs" ne sont peut-être pas aussi noirs qu'on le dit !

Voyons maintenant si l'immobilité à l'intérieur de la sphère de Schwarzschild est exclue, comme c'est le cas en métrique de Schwarzschild. Pour cela, reprenons les résultats obtenus dans l'étude de la chute libre d'une particule-test (ci-dessus) et plus particulièrement ceux qui concernent \bar{E} , et voyons s'il y a une raison qui impose à r_0 d'être supérieur à $2.k$.

On aura $r_0 < 2.k$ si $-\frac{k}{\text{Log}\bar{E}} < 2.k$, soit : $-\frac{1}{\text{Log}\bar{E}} < 2$, ou encore : $\text{Log}\bar{E} < -\frac{1}{2}$, ce qui signifie que : $\bar{E} < e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Il n'y a aucune raison d'interdire à l'énergie réduite d'être inférieure à $\frac{1}{\sqrt{e}}$, donc aucune raison d'interdire l'immobilité dans la sphère de Schwarzschild.

Imaginons par exemple une étoile à neutrons dont la masse augmente par accrétion de matière ou par fusion avec une autre étoile. Rien n'interdit à sa compacité de dépasser la limite critique ($r < r_s$) qui en fait un "trou gris". Mais, en métrique de Ni, contrairement à la métrique de Schwarzschild, ceci n'entraîne pas un effondrement irréversible ; l'étoile n'est pas aspirée sans retour vers la singularité centrale ; d'ailleurs, en métrique de Ni, il n'y a aucune raison d'admettre l'existence de ces singularités. L'étoile peut parfaitement trouver un équilibre, en conservant la forme sphérique usuelle des étoiles. De plus, la compacité très élevée entraîne une courbure spatio-temporelle qui "crée de l'espace", donc la

densité n'augmente pas dans la proportion qu'on pourrait imaginer; elle peut même diminuer, comme on va le voir ci-après.

Non seulement l'intérieur d'un "trou gris" de Ni peut être étudié, comme l'extérieur, en utilisant les mêmes observateurs références (observateur distant, observateur local immobile, observateur inertiel) et les mêmes règles de transformation, mais en plus l'équilibre de ce type d'astre, qui ne peut plus être assuré par la force centrifuge (voir la section sur la vitesse de décrochage), peut très bien être assuré par la pression. Il n'y a pas d'aspiration irréversible vers une singularité centrale : il n'y a tout simplement aucune singularité centrale.

Considérons par exemple un "trou gris stellaire" résultant de l'effondrement d'une étoile à neutrons. L'étoile à neutrons résulte elle-même de l'effondrement d'une étoile de type solaire, dans laquelle l'équilibre était assuré par les réactions nucléaires, capables de produire assez d'énergie pour contrebalancer la gravité. C'est l'épuisement de cette source d'énergie qui entraîne une contraction de l'étoile, arrêtée par l'entrée en jeu d'un autre type de force : les protons ayant avalé les électrons pour donner des neutrons, c'est l'interaction nucléaire forte entre les neutrons qui arrête l'effondrement. Mais que se passe-t-il ensuite ? Si, par exemple, un nouvel apport de matière conduit la gravité à l'emporter sur l'interaction forte entre neutrons, autrement dit si elle "écrase" les neutrons ? C'est ici qu'intervient l'hypothèse des étoiles à quarks. Et après ? Existe-t-il une autre force capable de prendre le relais ? Mais, comme on va le voir, le fait d'entasser une plus grande quantité de matière dans une sphère de rayon donné entraîne évidemment une augmentation de la "compacité" (rapport masse/rayon), mais pas nécessairement de la densité (rapport masse/volume). En réalité, si on veut "comprimer" une étoile à neutrons en réduisant son volume, sa densité va d'abord augmenter très légèrement, puis, de manière inattendue, elle va décroître très rapidement. Ceci est dû au phénomène de "création d'espace". Il en résulte que l'équilibre de l'astre pourra être assuré par des forces tout-à-fait conventionnelles (comme dans un gaz), et que le recours à l'interaction forte ne sera nécessaire que dans la phase "étoile à neutrons", qui est une sorte de goulot d'étranglement.

23 Densité moyenne des trous gris

Voyons donc le rôle du phénomène que nous avons appelé "création d'espace".

Imaginons une masse M incluse dans une sphère de rayon R . Pour la commodité du calcul, nous souhaitons que le potentiel gravitationnel soit constant à l'intérieur de celle-ci. Cette condition sera réalisée si la masse est répartie uniformément à la surface de la sphère, et non à l'intérieur (d'après le théorème de Gauss). C'est donc ce que nous supposerons, car le calcul est plus compliqué

si la masse est répartie uniformément dans tout le volume de la sphère. Nous appelons ρ la densité moyenne, obtenue en divisant la masse totale M par le volume total inclus dans la sphère. Nous allons faire varier R pour observer les variations de la densité moyenne ρ .

Nous admettrons que les volumes élémentaires mesurés par les observateurs locaux (à l'intérieur de la sphère) sont multipliés par le coefficient $e^{-\frac{3\Phi}{c^2}} = e^{-\frac{3.G.M}{R.c^2}}$ (en effet, le potentiel étant constant, toutes les mesures de distance sont multipliées par le même coefficient de dilatation de l'espace : $e^{-\frac{G.M}{R.c^2}}$); le volume total inclus dans la sphère (obtenu en sommant les mesures locales des observateurs locaux) est donc : $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3.e^{-\frac{3.G.M}{R.c^2}}$. La masse M est évaluée par un observateur distant ; nous supposons qu'elle ne varie pas quand r diminue, ce qui signifie que son énergie cinétique augmente, tandis que son énergie potentielle diminue. Notons bien que dans ce calcul, contrairement au précédent, il n'est pas question de "prélever l'énergie cinétique" : les variations de r se font à énergie constante, donc à masse constante. La densité moyenne (évaluée par un observateur local) est donc :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}.\pi.R^3.e^{-\frac{3.G.M}{R.c^2}}} = \frac{3.M}{4.\pi.R^3}.e^{-\frac{3.G.M}{R.c^2}}.$$

La masse M est supposée fixée ; faisons varier le rayon R (évalué, lui aussi, par l'observateur distant). Si on fait tendre R vers l'infini, ρ tend vers 0, comme on pouvait s'y attendre. Mais lorsqu'on fait tendre R vers 0, alors ρ tend encore vers 0, ce qui est plus surprenant ! La densité admet un maximum ρ_{max} , facile à calculer en étudiant la dérivée de la fonction $\rho = f(R)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dR} &= \frac{3.M}{4.\pi} \cdot \frac{R^3 \cdot \frac{3.G.M}{R^2.c^2} \cdot e^{-\frac{3.G.M}{R.c^2}} - 3.R^2 \cdot e^{-\frac{3.G.M}{R.c^2}}}{R^6} ; \\ \frac{d\rho}{dR} &= \frac{3.M}{4.\pi.R^4} \cdot \left(\frac{3.G.M}{R.c^2} - 3 \right) \cdot e^{-\frac{3.G.M}{R.c^2}} ; \\ \frac{d\rho}{dR} &= \frac{9.M}{4.\pi.R^4} \cdot \left(\frac{G.M}{R.c^2} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{3.G.M}{R.c^2}} . \end{aligned}$$

La dérivée s'annule pour $\frac{G.M}{R.c^2} = 1$, soit $R = \frac{G.M}{c^2}$ (la moitié du rayon de Schwarzschild). En substituant dans l'expression de ρ , on obtient :

$$\rho_{max} = \frac{3.M}{4.\pi.R^3} \cdot e^{-\frac{3.G.M}{R.c^2}} = \frac{3.M}{4.\pi. \left(\frac{G.M}{c^2}\right)^3} \cdot e^{-3} = \frac{3.c^6}{4.\pi.G^3.e^3.M^2} \approx \frac{2,9.10^{79}}{M^2} \text{ kg/m}^3.$$

Cette formule montre que la densité maximale diminue rapidement lorsque la masse augmente !

Comment interpréter ce résultat ?

Partons d'une sphère de grand rayon ($\frac{G.M}{R.c^2} \ll 1$), et supposons qu'elle se contracte, la masse M restant constante et répartie uniformément à la surface

de la sphère. Tant que le rayon R est suffisamment grand par rapport à la valeur limite $\frac{G.M}{c^2}$, la densité moyenne ρ croît sensiblement comme en gravitation newtonienne, car le coefficient de dilatation des distances $e^{\frac{k}{R}} = e^{\frac{G.M}{R.c^2}} = e^{-\frac{\Phi}{c^2}}$ reste très proche de 1, donc négligeable (de même que le coefficient de dilatation des volumes : $e^{\frac{3.G.M}{R.c^2}}$); mais à l'approche de la valeur critique, ce coefficient se met à augmenter brusquement : on pourrait dire que "la matière se met à fabriquer de l'espace"! Et lorsque R atteint la valeur critique, cette "création d'espace" contrebalance exactement l'accroissement de la densité!

24 L'équilibre gravitationnel en métrique de Ni

Si on n'est pas satisfait par le calcul ci-dessus, qui suppose toute la matière condensée à la surface de la sphère, nous pouvons proposer une situation plus réaliste.

Nous allons supposer que la masse est répartie dans la sphère entière, de telle sorte que le potentiel Φ soit identique partout. On va noter $m(r)$ la masse contenue dans la sphère de rayon r , et $\delta(r)$ la densité locale à la distance r du centre. La masse totale est $m(R) = M$. On va avoir :

$$\begin{aligned}\Phi = \Phi(r) &= -\frac{G.m(r)}{r} = \Phi(R) = -\frac{G.M}{R} ; \\ M &= -\frac{\Phi.R}{G} ; \\ m(r) &= \frac{M}{R}.r ; \\ dm(r) &= \frac{M}{R}.dr.\end{aligned}$$

En découpant la boule en sphères de rayon r et d'épaisseur dr , nous voyons que :

$$dm(r) = \delta(r).4.\pi.r^2.e^{-\frac{3.\Phi}{c^2}}.dr.$$

En rapprochant ces deux égalités, on obtient :

$$\delta(r).4.\pi.r^2.e^{-\frac{3.\Phi}{c^2}} = \frac{M}{R}.$$

Il en résulte que $\delta(r) = \frac{K}{r^2}$, où $K = \frac{M}{4.\pi.e^{-\frac{3.\Phi}{c^2}}.R} = \frac{M.e^{\frac{3.\Phi}{c^2}}}{4.\pi.R}$.

Ceci montre qu'on peut obtenir facilement, par le calcul, une répartition de la matière telle que $\Phi(r) = c^{te}$.

Nous allons maintenant calculer le "volume local" $V(r)$, sommation de volumes locaux infinitésimaux estimés localement, du centre jusqu'à la distance r :

$$V(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot e^{-\frac{3\Phi}{c^2}}.$$

Comme précédemment, nous appelons ρ la densité moyenne globale :

$$\rho = \frac{M(R)}{V(R)} = \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot e^{-\frac{3\Phi}{c^2}}} = \frac{3M}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^3 \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}}}.$$

La masse M étant constante, la dérivée de ρ par rapport à R s'annule lorsque la dérivée de $R^3 \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}}$ par rapport à R s'annule :

$$\begin{aligned} \frac{d\left(R^3 \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}}\right)}{dR} &= -\frac{3G.M}{R^2 \cdot c^2} \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}} \cdot R^3 + 3R^2 \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}} ; \\ \frac{d\left(R^3 \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}}\right)}{dR} &= e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}} \cdot \left[-\frac{3G.M.R}{c^2} + 3R^2\right] ; \\ \frac{d\left(R^3 \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}}\right)}{dR} &= 3R \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}} \cdot \left[R - \frac{G.M}{c^2}\right]. \end{aligned}$$

Nous retrouvons le même résultat que précédemment : cette dérivée s'annule pour $R = \frac{G.M}{c^2}$. La densité moyenne globale ρ est alors maximale.

Pour bien comprendre ce calcul, il faut avoir en tête que $V(R)$ n'est pas un volume évalué par l'observateur distant, mais une sommation d'évaluations locales infinitésimales. On a :

$$V(R) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot e^{-\frac{3\Phi}{c^2}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}}.$$

Ce volume est proportionnel à $R^3 \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}}$. Si on fait décroître R tout en conservant la masse M constante, ce volume "local" va d'abord décroître, puis il va atteindre son minimum, et croître de nouveau. Ceci vient du fait que la dérivée par rapport à R de cette quantité $R^3 \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}}$ est égale, comme on vient de le voir, à $3R \cdot e^{\frac{3G.M}{R \cdot c^2}} \cdot \left[R - \frac{G.M}{c^2}\right]$; elle s'annule pour $R = \frac{G.M}{c^2}$. C'est donc le comportement de ce volume local $V(R)$ qui explique le phénomène que nous décrivons ici. Et ce comportement vient du fait que les mesures de longueurs estimées par les observateurs locaux et distants sont différentes, en raison de la différence de potentiel.

Cette démarche nous a permis de trouver la répartition de la densité, de la forme $\delta(r) = \frac{K}{r^2}$, pour laquelle le potentiel $\Phi(r)$ est le même partout à l'intérieur de la sphère. Dans cette configuration, le gradient du potentiel s'annule partout dans la sphère, ce qui signifie que les forces gravitationnelles disparaissent.

Réfléchissons à la signification de cette configuration. Imaginons un immense nuage de gaz et/ou de poussières, à rotation nulle (pas de force centrifuge). Il se contracte sous l'effet de son propre poids. Supposons qu'il n'y ait aucune force pour s'opposer à cette contraction : pas de résistance des matériaux due aux forces électriques entre molécules (comme dans les planètes), pas de pression de radiation (comme dans les étoiles), pas de pression de la matière dégénérée (comme dans les naines blanches), pas de pression due au principe d'exclusion de Pauli (comme dans les étoiles à neutrons). **Puisque la gravitation ne rencontre aucun obstacle, on pourrait s'attendre à un effondrement semblable à celui des trous noirs de Schwarzschild, où toute la matière est avalée sans retour possible vers la singularité centrale. Mais ce n'est pas du tout ce que prévoit la métrique de Ni. Au contraire, elle prévoit une situation d'équilibre généré par la gravitation elle-même, sans intervention d'aucune autre force. On pourrait dire que la gravité s'auto-équilibre ; la clé de ce processus étant la "création d'espace".**

Cette situation ne peut pas se réaliser de manière parfaite : c'est une limite vers laquelle le nuage devrait tendre en l'absence d'autre force. Le fait que, dans ce modèle, la densité locale $\delta(r) = \frac{K}{r^2}$ tende vers l'infini au centre du nuage suppose une compressibilité parfaite, ce qui n'existe pas dans la nature ; des phénomènes physiques, peut-être très violents, vont se manifester dans la région centrale, bien avant que la situation d'équilibre gravitationnel ne soit atteinte.

Ces phénomènes physiques susceptibles de s'enclencher au centre du nuage n'entrent pas dans le cadre d'une étude de la gravitation. Cependant, on peut quand même se permettre de remarquer qu'une densité extrêmement forte doit s'accompagner d'une pression et d'une température très élevées, ce qui suggère que des réactions thermonucléaires pourraient démarrer dans la région centrale du nuage, accompagnées de deux phénomènes d'importance capitale dans son évolution : d'une part une pression de radiation susceptible de créer un nouvel équilibre des forces en jeu, d'autre part une nucléosynthèse complexe pouvant transformer profondément la nature et les proportions des éléments chimiques. Des phénomènes, somme toute, très habituels pour des astronomes...

Notre but, ici, était avant tout de montrer que le concept de "trou gris", résultant de la métrique de Ni, est profondément différent de celui de "trou noir", popularisé par la relativité générale.

Il pourrait être intéressant d'étudier le rôle possible de ces trous gris dans la formation des galaxies, des quasars, peut-être des premières étoiles. Et, pourquoi pas, dans ce phénomène que les cosmologistes appellent le Big Bang.

25 Les trous noirs (ou gris) et l'observation

Les trous noirs stellaires, prévus par la théorie, n'ont pas encore été mis en évidence de manière directe : la plupart des candidats pourraient être des étoiles à neutrons. Dans certains cas, on a cependant la preuve qu'il ne peut pas s'agir d'étoiles à neutrons. Citons par exemple le cas de Cygnus X-1 : dans ce système double, une étoile est en rotation autour d'une source de rayons X. L'étude du mouvement de l'étoile a permis d'évaluer la masse de cette source : elle est supérieure à 6 masses solaires (probablement comprise entre 7 et 13 masses solaires), ce qui est très supérieur à la masse maximale d'une étoile à neutrons, qui serait de l'ordre de 3,3 masses solaires (selon les calculs d'Oppenheimer et Volkoff). D'après la théorie, une étoile ayant une telle masse est une géante, qui doit s'effondrer en trou noir une fois ses réserves de combustible épuisées, car aucune force connue ne peut alors résister à la gravité. Ceci est vrai, du moins, dans une théorie basée sur la métrique de Schwarzschild.

Actuellement, on connaît un bon nombre de binaires X apparentées à Cygnus X-1 ; mais c'est surtout l'étude des sursauts gamma qui apporte un indice intéressant en faveur de l'existence des trous noirs stellaires : on suppose qu'ils trahissent l'effondrement d'étoiles situées dans des galaxies lointaines. Lors de tels événements, une étoile massive se transformerait en trou noir. Trou noir au sens de Schwarzschild ou de Ni ?

Quant aux trous noirs supermassifs, on estime qu'ils sont présents au centre de la plupart des galaxies spirales. Dans le cas de la Voie Lactée, on a pu mettre en évidence une concentration impressionnante de matière dans un volume très réduit : c'est l'étude des orbites des étoiles autour de ce grumeau central qui a permis de déterminer sa masse de manière précise : 3,6 millions de masses solaires ! Pour qu'une telle masse forme un trou noir, il faudrait qu'elle soit concentrée dans une sphère de rayon inférieur à 16 rayons solaires, c'est-à-dire dans un volume équivalent à celui d'une étoile géante (nettement plus grosse qu'une naine comme le Soleil, mais beaucoup plus petite qu'une supergéante).

En ce qui concerne les quasars, ces galaxies primitives très lointaines et exceptionnellement lumineuses, ils sont interprétés comme des trous noirs géants, de plusieurs millions (ou centaines de millions ?) de masses solaires.

La détection des ondes gravitationnelles a permis, depuis quelques années, de détecter des fusions d'astres compacts. Les calculs, basés sur la relativité générale, sont compatibles, selon les cas, avec des fusions d'étoiles à neutrons ou de trous noirs, de masses parfois inattendues. Ce type de recherche est très prometteur ; il serait souhaitable que les enregistrements des détecteurs soient publiés intégralement, et pas seulement les résultats de calculs basés sur une théorie unique.

La première "photographie d'un trou noir" (le trou noir supermassif situé au

centre de la galaxie *M87*) est d'un intérêt majeur ; elle permet de visualiser le tore lumineux qui gravite, comme prévu par la théorie, autour de ce "trou noir", mais laisse dans l'ombre, bien entendu, l'objet supermassif qui, probablement, trône au centre... La seconde est celle du "trou noir" situé au centre de notre galaxie, la Voie Lactée. Pour le moment, ces photos sont surtout des reconstitutions informatiques à partir de signaux infimes, traités par ordinateur en se basant sur une modélisation préalable. Mais dans l'avenir on peut en attendre de vraies informations, et peut-être des surprises.